Проблемы логики и методологии науки

УДК 160.1
DOI:
10.15372/PS20170202

В.В. Целищев, А.В. Бессонов

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ТЕОРЕМА ГУДСТЕЙНА ГЕДЕЛЕВЫМ ПРЕДЛОЖЕНИЕМ?*

В статье рассматривается вопрос, в какой степени теорема Гудстейна может считаться аналогом истинного, но недоказуемого геделевого предложения. Показано, что такая трактовка подводит к тезису Исааксона, согласно которому демонстрация истинности реальных математических аналогов геделева предложения в формальном языке арифметики использует концептуальные ресурсы, выходящие за пределы ресурсов, требуемых для понимания базисной арифметики конечных натуральных чисел. Правдоподобность тезиса оспаривается с точки зрения непостижимости арифметического содержания геделева предложения.

Ключевые слова: теорема Гудстейна, геделево предложение, тезис Исааксона, формальная арифметика,

V.V. Tselishchev, A.V. Bessonov

IS GOODSTEIN THEOREM A GODELIAN SENTENCE?

The paper considers the question of the degree to which Goodstein's theorem may be considered to be an analogue of a true, but not provable Gödelian sentence. It is shown that such an interpretation leads to Isaacson's thesis, according to which the demonstration of the truth of real mathematical analogues of the Gödelian sentence in the formal language of arithmetic uses conceptual resources that go beyond the resources required to understand the basic arithmetic of finite natural numbers. The plausibility of the thesis is disputed from the point of view of the incomprehensibility of the arithmetic content of the Gödelian sentence.

Keywords: Goodstein's theorem, Gödelian sentence, Isaacson's thesis, formal arithmetic.

---

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Российским научным фондом (грант 16-18-10359).

Теоремы Геделя о неполноте являются важнейшим результатом в области, широко именуемой математической логикой. В более узком смысле результат Геделя считается вкладом в теорию доказательства, а в последнее время – скорее вкладом в теорию вычислимости. Предложенное Геделем доказательство первой теоремы о неполноте элементарной арифметики дополнилось более современными доказательствами неполноты с использованием диагональной леммы или теоремы о неподвижной точке. Доказательство этих математических утверждений апеллирует к тонкостям кодирования синтаксических структур в терминах элементарной арифметики, при котором интуитивное содержание доказательства уступает место тому, что некоторые исследователи называют логическим трюком. Центральное понятие теоремы – так называемое геделево предложение, истинное в формальной системе, но недоказуемое в ней, в связи с этим имеет оттенок логического артефакта. Для такой трактовки есть и другой мотив. Геделево предложение является в высшей степени искусственной логической конструкцией, математическое содержание которой неясно. По своей природе оно имеет двойственный характер: с одной стороны, это метаматематическое утверждение, а с другой – арифметическое утверждение. Эта двойственность создает трудности для понимания ряда особенностей геделева предложения, в частности природы его истинности. Чтобы разрешить подобного рода вопросы, было бы желательно иметь «реальное» геделево предложение с реальным математическим содержанием. Тем более что сама постановка проблемы, решение которой предлагается теоремами Геделя, связано с математическим проектом Д. Гильберта установления непротиворечивости математики. Часто провозглашаемое крушение программы Гильберта в связи с теоремами о неполноте апеллирует к искусственной логической конструкции.

По этим причинам большой интерес представляет поиск математических утверждений, которые были бы истинными в формальной системе, но недоказуемыми в ней. Речь, конечно же, идет о недоказуемости в рамках определенной системы, поскольку искомое утверждение должно быть доказуемо в рамках более сильной системы. В последнее время внимание исследователей в этом направлении было сфокусировано на интересных примерах арифметических истин, недоказуемых в арифметике Пеано. Наиболее обсуждаемыми случаями являются доказательство теоремы Гудстейна [5, p. 33–41] в работе Кирби и Париса [8], вариант конечной теоремы Рамсея в работе Париса и Харрингтона [10] и финитная версия теоремы Крушкала в работе Фридмана [13]. В данной статье рассматривается случай теоремы Гудстейна, имеющий преимущества как с точки зрения парадоксальности самой теоремы, так и с точки зрения внимания, которое ей уделяется в популярных изложениях философских следствий результатов Геделя.

К последним относится обсуждение теоремы Гудстейна в нескольких работах Р. Пенроуза. В одной из своих последних книг он изложил содержание теоремы в отдельном приложении [1]. Теорема Гудстейна имеет дело с порождением числовой последовательности, каждый член которой представим в виде суммы степенных членов с определенным числом в качестве основания. Начинаем с некоторого числа (в примере Пенроуза – 581):

$$581 = 512+64+4+4+1 = 2^9+2^6+2^2+2^0.$$

Здесь основанием является число 2. Но и показатель степени может быть разложен аналогичным образом, и тогда мы имеем

$$581 = 2^{2^3+1} + 2^{2^2+2} + 2^2 + 1\,.$$

Разлагая число 3 в показателе степени, получаем

$$581 = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^2+2} + 2^2 + 1\,.$$

При этом нужно иметь в виду, что для любого числа b, $b > 0$ и $b \neq 1$, каждое положительное число n имеет единственное разложение с основанием b.

Пенроуз говорит о порождении последовательности чисел с помощью двух операций: (а) увеличения основания на 1 и (б) вычитания 1. Но при этом он не учитывает, что есть еще одна операция, а именно (в) увеличение на 1 и степенного показателя, потому что следующим числом у него оказывается (без операции (б))

$$3^{3^{3+1}+1} + 3^{3^{3-1}+3} + 3^3 + 1$$

и далее –

$$4^{4^{4+1}+1} + 4^{4^4+4} + 4^4\,.$$

Парадоксальность теоремы Гудстейна состоит в том, что согласно ее доказательству, несмотря на очень быстрый рост чисел в последовательности (для основания 4 получается 121210695-разрядное число!), в конечном счете в результате применения трех операций – (а), (б) и (в) получается 0. Для одного из доказательств теоремы, предпочтение которого связано с его большей интуитивной ясностью, полезно иметь в виду операции (а) и (в) как раздельные. Такой подход предпринят Ходжсоном [6], который вводит понятие слабой последовательности Гудстейна путем применения лишь операции (а) без использования операции (в).

Ходжсон начинает с разложения числа $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$. Последовательность U_n чисел получается применением операций (а) и (б) [9]:

$$
\begin{aligned}
&U_0 = 2^8 + 2^3 + 2^1 = 266;\\
&U_1 = 3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6590;\\
&U_2 = 4^8 + 4^3 + 2 - 1 = 4^8 + 4^3 + 1 = 65601;\\
&U_3 = 5^8 + 5^3 + 1 - 1 = 5^8 + 5^3 = 390750;\\
&U_4 = 6^8 + 6^3 - 1 = 6^8 + 5\cdot 6^2 + 5\cdot 6^1 + 5 = 1679831;\\
&\ldots\\
&U_{10} = 12^8 + 5\ 12^2 + 5\cdot 12^1 - 1 = 12^8 + 5\cdot 12^2 + 4\cdot 12^1 + 11 = 429982475;\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Как видно, последовательность растет быстро, и тем более удивительно, что по ходу увеличения основания ее члены постепенно уменьшаются до нуля. Доказательство этого противоречащего интуиции факта осуществляется средствами, выходящими за пределы элементарной арифметики, что и является причиной провозглашения теоремы Гудстейна геделевым предложением, истинным, но недоказуемым в системе формальной арифметики Пеано. Речь идет об арифметике ординальных чисел. Множество, первый член которого больше любого целого числа, является первым трансфинитным числом, обозначенным через ω. Арифметика ординальных чисел задает возрастающий ряд

$$\omega, \ldots, \omega 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^\omega + 1, \ldots, \omega^{2\omega}, \ldots, \omega^{2\omega} + \omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}.$$

Наименьшее ординальное число, большее, чем сумма возрастающих степеней, называется ε_0.

Множество ординальных чисел является вполне-упорядоченным, то есть, любое непустое множество ординальных чисел имеет наименьший элемент. Поэтому не может быть бесконечной последовательности строго уменьшающихся по величине ординальных чисел. Это обстоятельство используется для доказательства результата о слабой версии последовательности Гудстейна.

Сопоставим два рода последовательностей, один для натуральных чисел, другой – для ординальных. Тенденция к увеличению или уменьшению значений сумм будет определяться поведением последовательностей для ординальных чисел, поскольку любое ординальное число превосходит любое натуральное число. Сопоставление осуществляется заменой оснований слабой последовательности Гудстейна на ω.

$2^8 + 2^3 + 2^1$	$\omega^8 + \omega^3 + \omega^1$
$3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = 3^8 + 3^3 + 2$	$\omega^8 + \omega^3 + 2$
$4^8 + 4^3 + 2 - 1 = 4^8 + 4^3 + 1$	$\omega^8 + \omega^3 + 1$
$5^8 + 5^3 + 1 - 1 = 5^8 + 5^3$	$\omega^8 + \omega^3$
$6^8 + 6^3 - 1 = 6^8 + 5\,6^2 + 5\,6^1 + 5$	$\omega^8 + 5\,\omega^2 + \omega^1 + 5$
...	
$12^8 + 5\,12^2 + 5\,12^1 - 1 = 12^8 + 5\,12^2 + 4\,12^1 + 11$	$\omega^8 + 5\,\omega^2 + 4\,\omega^1 + 11$
…	

Каждое выражение справа больше соответствующего выражения слева. В то время как значение выражений слева растет, соответствующие значения справа уменьшаются. Последовательности ординальных чисел строго уменьшаются и, стало быть, имеют наименьший элемент, который является нулем. Следовательно, и последовательности натуральных чисел также оканчиваются нулем.

Переход к стандартной последовательности Гудстейна от слабой ничего не меняет в этом заключении, разве что кажущийся рост величин для натуральных чисел превосходит все ожидания, и тем не менее последовательность оканчивается нулем. Рассмотрим то же самое число 266. В стандартном представлении последовательности Гудстейна растут чрезвычайно быстро, что уже видно по первым членам последовательности:

$$M_0 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 = 266$$

$$M_1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 \approx 10^{38}$$

$$M_2 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616}$$

…

Важным фактом является то, что теорему Гудстейна нельзя доказать без использования трансфинитных ординальных чисел. Представленные эвристические соображения по поводу доказательства теоремы при сопоставлении последовательностей для натуральных и ординальных чисел не являются, конечно же, строгим доказательством. Однако стратегия доказательства видна, поскольку она опирается на уже упомянутый вывод о том, что не существует бесконечной убывающей цепи ординальных чисел, меньших чем ε_0. Доказательство уже этого вывода эквивалентно демонстрации того, что трансфинитная индукция до ε_0 обоснована. В этом смысле теорема Гудстейна может быть сведена к теореме Генцена о непротиворечивости арифметики Пеано с использованием принципа трансфинитной индукции. Но согласно второй теореме о неполноте Геделя непротиворечивость арифметики Пеано не может быть доказана при использовании лишь средств этой системы. Поэтому теорема Гудстейна не может быть доказана в рамках элементарной арифметики. Этот результат был получен, как уже было упомянуто, Кирби и Парисом [8]. Именно он является основанием для утверждения, что теорема Гудстейна является по своему характеру геделевым утверждением.

Следует сделать еще одно замечание по поводу эвристических соображений о доказательстве теоремы Гудстейна. Введенное Сичоном [4] понятие слабой последовательности Гудстейна действительно служит эвристическим целям, поскольку на самом деле сходимость такой последовательности может быть доказана в рамках арифметики Пеано. Но она не может быть доказана для стандартной последовательности Гудстейна.

Таким образом, есть основания полагать, что теорема Гудстейна является тем самым геделевым утверждением, теперь уже с реальным математическим содержанием. Правда, при этом не обращается внимания на различия между двумя типами «геделевых» предложений. Подлинно геделево предложение принадлежит к метаматематике, являясь искусственной логической конструкцией, арифметический смысл которой неясен. Что касается «естественного» геделева предложения типа теоремы Гудстейна, то оно должно быть простым и интересным с точки зрения его естественности. Оправдывает ли теорема Гудстейна эти ожидания?

Почему в противопоставлении с подлинно геделевым предложением может идти речь о «естественности» математического его аналога? Дело в том, что конструирование исходного геделева предложения включает в себя использование кодирования. В зависимости от выбранного способа кодирования получаются различные геделевы предложения. Реальное математическое утверждение не должно зависеть от каких-либо приемов кодирования. В определенном смысле теорема Гудстейна находится, так сказать, на половине пути от искусственного геделева предложения к реальному математическому аналогу, показывая, что теоремы о неполноте Геделя и трансфинитная арифметика могут быть использованы для изучения реальных математических объектов вроде последовательностей Гудстейна. Но одновременно такой промежуточный статус между двумя типами геделева предложения свидетельствует о том, что понимание природы истин элементарной арифметики требует выхода в более сильную систему, например в теорию множеств.

Сама по себе теорема Гудстейна связана с исследованием поведения быстро растущих функций, и в этом смысле можно заключить, что недоказуемость теорем и в ряде случае их неполнота ассоциируются с такими функциями. Неразрешимость теоремы Гудстейна в арифметике Пеано связана с тем, что эта формальная система не «видит» такой быстрый рост. Что касается силы формальных систем, то она связана в первую очередь с размером определенных ординальных чисел. В этом отношении некоторые важные теоремы остаются недоказуемыми даже в очень «сильных» формальных системах. Неполнота возникает при наличии оснований для утверждения истинности соответствующих предложений. Для утверждения истинности требуются правдоподобность и «обыденность» математического предложения. Теорема Гудстейна является таким обыденным арифметическим предложением, и ее важность при рассмотрении приложения теорем Геделя о неполноте состоит в том, что неразрешимость не ограничена патологическими предложениями, о которых говорится у Геделя.

Как известно, геделево предложение может быть представлено в полиномиальном виде. Для сопоставления логической структуры классического геделевого предложения и «квазигеделевого» утверждения теоремы Гудстейна полезно использовать арифметическую иерархию. Геделево предложение имеет структуру предложения Π_1, т.е. $(\forall x)\ f(x) = 0$, в то время как предложение Гудстейна имеет структуру Π_2, а именно, $(\forall x)\ (\exists y) \cdot f(x, y) = 0$. Как отмечает М. Поттер, различие в структуре имеет важное значение в свете программы Гильберта доказательства непротиворечивости арифметики [11, p. 217–218]. Пусть имеется доказательство некоторого утверждения элементарной арифметики в формальной системе PA. Принимая во внимание свойства PA, есть все основания полагать это утверждение истинным. Теперь рассмотрим теорию, которая получается путем расширения PA в некоторой теории множеств

U, расширения такого, которое дает уверенность только в непротиворечивости результирующей системы, но не в ее истинности. Встает вопрос: является ли доказательство в новой системе причиной полагания некоторого арифметического утверждения в ней истинным?

Для предложений типа Π_1 ответ будет положительным. В этом смысле Поттер подтверждает «наивную» версию истинности геделевого предложения, согласной которой неразрешимое предложение *F* истинно по способу своего построения. Действительно, если бы *F* было ложным, его отрицание имело бы характер Σ_1-истины относительно ω. Согласно известному результату, оно было бы доказуемо в PA и тем самым в *U*, что противоречит посылке о непротиворечивости *U*.

С другой стороны, если предложение в *U* имеет характер Π_2-предложения, (а именно такой характер имеет предложение в теореме Гудстейна, тем более имеющее характер Σ_1-предложения), то ситуация отлична от классического геделева предложения. Потому что если предложение F есть истинное Π_1-предложение, недоказуемое в PA (предполагаемое геделево предложение), то его отрицание является ложным Σ_1-предложением, которое совместимо с PA и отсюда доказуемо в некоторой непротиворечивой теории множеств, расширяющей PA. Таким образом, теорема Гудстейна не будет полным аналогом геделева предложения. В этом смысле понимание соотношения результата Геделя и программы Гильберта становится более сложным, чем это предполагается простым заявлением о крушении программы Гильберта. Коль скоро в реальной арифметике истинное, но недоказуемое утверждение не имеет гарантий истинности во всех расширениях, это несколько меняет повестку дня в разговорах о судьбе программы Гильберта. Потому что даже если, как утверждает Поттер, имеются два несовместимых, но индивидуально непротиворечивых расширения U_1 и U_2 в PA, Π_1, то арифметические следствия обеих теорий будут истинными.

Теорема Гудстейна наряду с другими случаями нетривиальных математических результатов, которые недоказуемы в PA, подводит к достаточно интересному и одновременно спорному тезису. В его основе лежит подозрение, что демонстрация истинности утверждений в формальном языке арифметики использует концептуальные ресурсы, выходящие за пределы ресурсов, требуемых для понимания базисной арифметики конечных натуральных чисел. Смит [14] упоминает в этой связи теорему Париса–Харрингтона о недоказуемости в PA теоремы Рамсея (еще один громкий пример содержательного геделевого предложения), поскольку последняя требует лемму Кенига, которая апеллирует к понятию бесконечного пути через бесконечное дерево.

В явном виде указанное подозрение было сформулировано Д. Исааксоном в виде тезиса, получившего его имя [7]. Тезис Исааксона может быть представлен в следующем виде:

> Если требуется доказать некоторое истинное предложение языка арифметики, которое независимо от PA, тогда необходимо обратиться к идеям, выходящим за пределы того, что составляет наше понимание базисной арифметики.

В основу соображений в пользу этого тезиса Исааксон кладет роль кодирования средствами геделевской нумерации. Перевод содержательных арифметических истин в формальную синтаксическую теорию, утверждения которой кодируются в арифметические утверждения, ставит вопрос о статусе этих самых арифметических утверждений, которые имеют дело с геделевыми числами. Геделевская нумерация дает возможность говорить не только о числах, но и о самих утверждениях о числах путем кодирования метаматематических утверждений в арифметические, т.е. путем формулирования метаматематических утверждений об арифметических предложениях в виде самих арифметических предложений. Однако истинные, но недоказуемые в PA утверждения, с точки зрения Исааксона, не имеют характера утверждений элементарной арифметики, и установление истинности неразрешимых утверждений требует использования концепций высших порядков. Именно отношение кодирования делает кажущиеся элементарными арифметические утверждения по-настоящему неарифметическими в том смысле, что они лишены интуитивной ясности.

Тогда возникает вопрос, могут ли вообще быть аналоги геделевого предложения в реальной математической практике. При этом главным становится вопрос об арифметической интерпретации геделевого предложения как такового, а именно о том, в каком смысле оно является арифметическим утверждением.

Отсутствие интуитивной ясности кодированных арифметических утверждений может быть объяснено тремя различными способами, каждый из которых является частью более общей аргументации о статусе арифметической интерпретации геделева предложения. Первый способ представлен тезисом Исааксона, согласно которому подлинное арифметическое знание ограничено первопорядковой арифметикой Пеано. Выход за ее пределы при доказательстве неразрешимых в РА утверждений означает апелляцию к арифметике высших порядков, где есть откровенное обращение к бесконечным структурам. С точки зрения Исааксона, такое обращение осуществляется скрыто при кодировании. В этом отношении неразрешимые утверждения все-таки являются арифметическими, хотя и в обобщенном смысле.

Другой способ состоит в полном отказе от усмотрения смысла в арифметической интерпретации геделева предложения. Г. Серени утверждает следующее: «Арифметическое значение предложения, истинность которого должна быть продемонстрирована, полностью непостижимо для человеческого существа. В самом деле, если не касаться размера и сложности геделева предложения, имеются непреодолимые препятствия для понимания его арифметического содержания. Действительно, согласно самому определению геделевой нумерации она представляет собой чисто механическую процедуру, которая избегает какой-либо осмысленности, и все реализации метаматематических предикатов верно отражают эту (неарифметическую) логику геделевой нумерации. Отсюда следует, что геделево предложение не может быть интерпретировано в терминах уже знакомых арифметических концепций. Другими словами, хотя оно является правильно построенным предложением с точки зрения формальной арифметики, оно не вписывается в концептуальный каркас неформальной арифметики (т.е. такой, которая практикуется математиками) и отсюда кажется полностью неправильным с точки зрения реальной математики. Проще говоря, геделево предложение кажется полной бессмыслицей, это пример грамматической правильности и бессмысленности арифметического предложения. Следовательно, кажется невозможным для человеческого существа постичь его арифметическое содержание и уж тем более доказать существование чисто арифметической демонстрации его истинности» [12, p. 70-71].

Этот аргумент Серени включает в себя ряд положений о соотношении метаматематической и арифметической интерпретаций геделева предложения, на которых мы здесь не останавливаемся. В частности, речь идет о способе доказательства истинности геделева предложения как универсальной квантификации. Более того, утверждение о непостижимости арифметической интерпретации геделевого предложения поднимает вопрос об эпистемических приоритетах в определении его истинности. Другими словами, аргумент Серени представляет собой, в отличие от тезиса Исааксона, подлинную программу.

Третий способ являет собой определенный компромисс между точками зрения Исааксона и Серени. Доказательство истинности геделева предложения действительно может требовать выхода за пределы элементарной арифметики, но не в драматическом варианте обращения к таким вещам, как трансфинитная индукция. Скорее речь может идти о возможности рефлексии над нашим собственным арифметическим теоретизированием, скажем, о причинах полагания геделева предложения истинным. Смит иллюстрирует эту точку зрения, говоря, что в такой рефлексии мы должны переходить от неявно принимаемой математической практики использования положения о том, что каждое натуральное число имеет последующее число, к четкому положению определенной теории, о том, что это утверждение в качестве аксиомы является обоснованным и не приведет к непротиворечивости [13, p. 225].

Какая мораль должна быть выведена из подобного рода рассмотрений для утверждений о нахождении математически содержательных аналогов геделева предложения? Теорема Гудстейна была, можно выразиться, «первой ласточкой» в этом направлении. Оптимизм сторонников успешности таких поисков укрепился при заявлении о демонстрации в работе Париса и Харрингтона первого примера истинного, но недоказуемого в PA, более естественного арифметического утверждения. В этом отношении очень характерен взгляд одного из наиболее авторитетных исследователей – К. Сморински: «Это (мнение. – *Авт.*) просто ложно. Я большой поклонник теоремы Париса–Харрингтона, но я никогда не принимал такое представление о ее значимости. Первым “естественным негеделевым арифметическим утверждением”, недоказуемым в PA, была индукция до ε_0, невыводимая, как это показал Генцен в 1939 г. в своей “Habilitationschrift”. Вслед за этим результатом идет недоказуемость тотальности определенных рекурсивных функций, показанных Крайзелем около 1958 г. Даже при учете этих более ранних результатов общепринятая история является этаким сверхупрощением. Джеф Парис первым заметил, что его работа по моделям арифметики дает невыводимые варианты теоремы Рамсея. Лео Харрингтон предложил более элегантный вариант, и они опубликовали совместную статью. Я полагаю, что это обстоятельство следует подчеркнуть, потому что внеисторический подход ведет к полностью неверной оценке результатов. Когда появилась теорема Париса-Харрингтона она была объявлена первым результатом о независимости для Арифметики Пеано, который был подлинно математическим, и не исходил от логики. Я вспоминаю, как один мастистый логик говорил мне, что он не понимает, как можно считать значимыми обе теоремы – Теорему о неполноте Геделя и Теорему Париса–Харрингтона, должно быть либо то, либо другое. Я помню слегка садистское удовольствие, которое испытал, напомнив одному молодому логику, разглагольствовавшему по поводу математического характера новых результатов, касающихся неполноты, название исходной статьи Рамсея («О проблемах формальной логики»). Надеюсь, что его разочарование, когда он уходил, было только временным. В любом случае, суть такова: если оставлять в стороне "общепринятую мудрость" или "партийную линию", то значимость результатов вроде результатов Генцена или Париса–Харрингтона есть нечто навязанное, требует тщательного объяснения и не должно приниматься на веру» [15, p. 126].

Как бы то ни было, вопрос о естественности геделевого предложения в реальной математике имеет два аспекта. С одной стороны, многие математики полагают, что теоремы Геделя о неполноте не повлияли на развитие собственно математики, не усматривая в предлагаемых в качестве геделевых по своему характеру математических утверждениях принципиально важных проблем. С другой стороны, авторы, склонные к философским обобщениям, считают эти теоремы важным вкладом в понимание возможностей человеческого мышления вообще. Между двумя этими крайностями находятся размышления самого Геделя о природе математического мышления в свете его теорем о неполноте, в частности о соотношении объективной и человеческой математики [3]. Но даже те, кто склонен усматривать в теоремах Геделя о неполноте важные следствия относительно природы математики, признают неестественность арифметической интерпретации геделевого предложения как такового. Ярким представителем сторонников этой точки зрения является Р. Пенроуз:

«Трудность восприятия теоремы связана с тем, что реальное арифметическое построение (геделевого предложения – *Авт.*), создаваемое по прямому рецепту Геделя, может оказаться исключительно трудным для понимания и не представлять никакого математического интереса (за исключением лишь самого факта, что оно является истинным, но одновременно не может быть выведено… Поэтому даже сами математики зачастую относятся к построению (геделевого предложения. – *Авт.*) с полным пренебрежением [1, с. 180].

Пенроуз в определенном смысле недоговаривает, считая, что геделево предложение «исключительно трудно для понимания», поскольку по-настоящему его можно считать просто непостижимым, относя его постижимое содержание к метаматематическому аспекту. Кроме того, Пенроуз отмечает математическую важность геделевого предложения в том факте, что оно истинно, полагая это обстоятельство само собой разумеющимся. Между тем вопрос об истинности геделевого предложения является достаточно трудным, предполагающим различное понимание природы неполноты формальных систем математики [2]. По этой причине, как и подчеркивает К. Сморински (см. выше), нужно с большой осторожностью относиться к провозглашению определенных математических результатов истинными геделевыми предложениями в реальной математике.

Литература

1. *Пенроуз Р.* Теорема Гудстейна и математическое мышление // Пенроуз Р. Большое, малое и человеческий разум. – М.: Мир, 2004. – С. 180–184.

2. *Целищев В.В.* Истинность, самоочевидность и геделево предложение // Вестник Новосибирского государственного университета. 2015. – Т. 13, вып. 1. – С. 5–11.

3. *Целищев В.В.* Незавершенность математики и абсолютно неразрешимые проблемы // Философия науки. – 2013. – № 1 (56). – С. 60–79.

4. *Cichon E.A.* A short proof of two recently discovered independence results using recursion theoretic methods // Proceedings of American Mathematical Society. – 1983. – Vol. 87. – P. 704–706.

5. *Goodstein R.L.* On the restricted ordinal theorem // Journal of Symbolic Logic – 1944. – Vol. 9. – P. 33–41.

6. *Hodgson B.* Herculean of Sisyphean tasks? // EMS Newsletter. – 2004. – March. – P. 11–16.

7. *Isaacson D.* Arithmetical truth and hidden higher-order concepts // The Philosophy of Mathematics / Ed. by W.D. Hart. – N.Y.: Oxford University Press, 1998. – P. 203–224.

8. *Kirby L., Paris J.* Accessible independence results for the Peano arithmetic // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1982. – Vol. 14. – P. 285–293.

9. *Nectoux A.* Goodstein Sequences: The Power of a Detour via Infinity. – URL: http://blog.kleinproject.org/?p=674 (May 27, 2015).

10. *Paris J., Harrington L.* A mathematical incompleteness in Peano arithmetic // Handbook of Mathematical Logic / Ed. by J. Barwise. – Amsterdam, North Holland, 1977. – P. 1133–1142.

11. *Potter M.* Set Theory and Its Philosophy. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – P. 217–218.

12. *Sereny G.* How do we know that the Gödel sentence of a consistent theory is true? // Philosophia Mathematica. – 2011. – Vol. 19, No. 1. – P. 77–73. P. 70–71.

13. *Simpson G.* Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees // Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics / Ed. by L.A. Harrington, M. Morley, A. Scedrov et al. – Amsterdam, North-Holland, 1985. – P. 87–117.

14. *Smith P.* An Introduction to Gödel’s Theorems. – Second Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

15. *Smorinski C.* Review of P. Smith “An Introduction to Gödel’s Theorem” // Philosophia Mathematica. – 2010. – Vol. 18, No. 1. – P. 122–127.

References

1. Penrose R. Teorema Gudsteina i matematicheskoje mishlenije // Penrose R. Bolshoje , maloje I chelovecheski rasum. Moscow.: Mir, 2004. p. 180-184.

2. Tselishchev V. Nezaveshennost matematiki I absolutno nerazeshimije problemi // Filosofija nauki, т. 56, n. 1, 2013. P. 60-79.

3. Tselishchev V. Istinnost, samoochevidnost I gedelevo predlozhenije // Vestnik NGU, т. 13, выпуск 1, 2015. С. 5-11.

4. Cichon E.A. A Short Proof of Two Recently Discovered Independence Results Using Recursion Theoretic Methods // Proceedings of American Mathematical Society,vol. 87, 1983. p. 704-706.

5. Goodstein R.L. On the Restricted Ordinal Theorem // Journal of Symbolic Logic, vol. 9, 1944, p. 33-41.

6. Hodgson B. Herculean of Sisyphean tasks? // EMS Newsletter, March 2004, pp. 11-16.

7. Isaacson D. Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts // The Philosophy of Mathematics / ed. W.D. Hart. N.Y.: Oxford University Press, 1998. p. 203- 224.

8. Kirby L., Paris J. Accessible Independence Results for the Peano Arithmetic // Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 14, 1982, p. 285-293.

9. Nectoux A. Goodstein Sequences: The Power of a Detour via Infinity. http://blog.kleinproject.org/?p=674 (May 27, 2015).

10. Paris J., Harrington L. A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic // Handbook of Mathematical Logic / ed. Barwise J. Amsterdam: North Holland, 1977. P. 1133-1142.

11. Potter M. Set Theory and Its Philosophy. Oxford: Oxford University Press, 2004. p. 217-218.

12. Sereny G. How Do We Know that the Gödel Sentence of a Consistent Theory Is True? // Philosophia Mathematica, vol. 19, 2011,n. 1. p. 77-73. p. 70-71

13. Simpson G. (1985), Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees // Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics / eds. Harrington, L. A.; Morley, M.; Scedrov, A.; et al. Amsterdam: North-Holland, 1985. p. 87–117.

14. Smith P. An Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. p. P. 225.

15. Smorinski C. Review of P. Smith "An Introduction to Gödel's Theorem" // Philosophia Mathematica, vol. 18, 2010, n. 1. p. 122-127. p. 126.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); научный руководитель Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail:leitval@gmail.com).

Бессонов Александр Владимирович – доктор философских наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).

Information about the authors

Tselishchev, Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Chief of the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Scientific Director at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: leitval@gmail.com).

Bessonov, Aleksandr Vlaimirovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Leading Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia).

Дата поступления 19.04.2017