УДК 539.375

МОДИФИКАЦИЯ КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ НЕЙБЕРА — НОВОЖИЛОВА ДЛЯ УГЛОВЫХ ВЫРЕЗОВ (АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучено разрушение в окрестности вершины углового выреза, для описания которого предлагается использовать критерий разрушения типа Нейбера — Новожилова. В предложенном критерии пределы осреднения напряжений на оси выреза зависят от наличия, размера и положения дефектов исходного материала. В качестве характерного линейного размера выбран параметр кристаллической решетки исходного материала. Для угловых вырезов получены простые соотношения, связывающие коэффициент интенсивности напряжений при модифицированном коэффициенте сингулярности, сам коэффициент сингулярности и теоретическую прочность на сдвиг монокристалла материала с учетом поврежденности материала в окрестности вершины. В полученных соотношениях возможен предельный переход по углу от углового выреза к трещине. Показано, что классический критический коэффициент интенсивности напряжений, используемый при оценке прочности тел с трещинами, не является константой материала.

Введение. Подход Нейбера — Новожилова [1, 2] позволяет описать разрушение трещиноватых сред с иерархией структур [3–5] при нагружениях, соответствующих трем классическим типам трещин. В работах [3–5] рассматривались как острые трещины, которые моделируются двусторонними разрезами, так и тупые трещины — узкие вырезы с закруглением в вершине и параллельными берегами. При построении дискретно-интегральных критериев используются понятия классической механики разрушения (механики твердого деформированного тела) и физики твердого тела [6, 7], связанные с кристаллическим строением монокристаллов. Если учитывать реальное пространственное расположение атомов в монокристалле, то трещины в них не моделируются двусторонними разрезами. Даже в плоском случае имеет смысл рассматривать угловые вырезы, причем угол раскрытия выреза определяется характеристиками кристаллической решетки. Своеобразие возникающих задач разрушения для тел с остроугольными вырезами отмечено в работах [8, 9]. Поля напряжений в окрестности углового выреза состоят из регулярной и сингулярной составляющих, причем коэффициент сингулярности зависит от угла раскрытия выреза [10]. Коэффициент сингулярности только в пределе совпадает с коэффициентом сингулярности поля напряжений для трещины, когда угловой вырез в окрестности вершины переходит в двусторонний разрез (трещину). Поле напряжений в окрестности углового выреза имеет наиболее простой вид для антиплоской деформации. Предлагаемый ниже критерий хрупкой прочности может быть использован при оценке прочности валов с трещинами-выточками при кручении, когда известна условная регулярная зернистость материала вала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-00873, 00-15-96180).

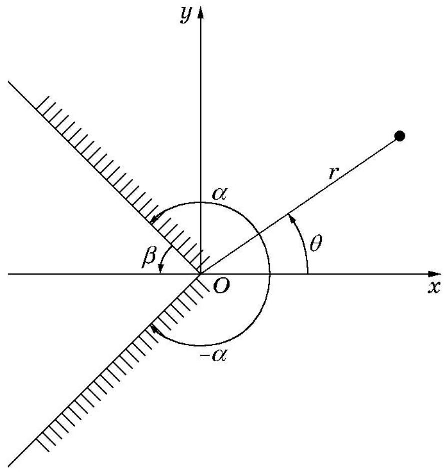

Рис. 1

1. Напряженное состояние в окрестности вершины углового выреза. Рассматривается поле напряжений в окрестности вершины углового выреза в антиплоской задаче, когда напряженно-деформированное состояние не зависит от третьей координаты z (рис. 1). На рис. 1 использованы следующие обозначения: Oxy и $Or\theta$ — декартовы и полярные системы координат, β — полуугол раскрытия выреза (ось выреза совпадает с осью Ox), причем $\alpha + \beta = \pi$ и при $\alpha < \pi$, $\beta > 0$, и при $\alpha > \pi$, $\beta < 0$. Допустим, что твердое тело, симметричное относительно оси выреза, нагружено симметрично относительно выреза. Тогда из-за симметрии задачи наибольшие напряжения возникают на оси выреза. Для углового выреза в окрестности его вершины с точностью до величин высшего порядка малости для линейной задачи сдвигающие напряжения $\tau_{\theta z}(r,\theta)$ на оси выреза $\theta = 0$ можно представить в виде

$$\tau_{\theta z}(r,0) \simeq \tau_\infty + K_{\rm III} r^{\omega-1}/(2\pi)^{1/2}. \qquad (1.1)$$

Здесь $\tau_\infty = \text{const}$ — характерные напряжения; $K_{\rm III}$ — обобщенный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для антиплоской задачи при сингулярной составляющей $r^{\omega-1}$; $\omega = \omega(\alpha)$ — корни характеристического уравнения [10]

$$\cos(\alpha\omega) = 0. \qquad (1.2)$$

Характерные напряжения τ_∞ определяются по построенному полю напряжений $\tau_{\theta z}(r,\theta)$. Следует отметить, что в общем случае построение поля напряжений $\tau_{\theta z}(r,\theta)$ является достаточно сложной самостоятельной задачей. В пределе при $\beta \to 0$ угловой вырез переходит в двусторонний разрез и $\omega = 1/2$.

Из всего набора решений уравнения (1.2) механический смысл имеет только решение, соответствующее первому положительному корню: $\omega = \pi/(2\alpha)$. Рассмотрим три случая: при $\alpha < \pi$ имеем $\omega > 1/2$, при $\alpha > \pi$ имеем $\omega < 1/2$, для трещины (двустороннего разреза) $\alpha = \pi$ получаем $\omega = 1/2$. Для трещины обобщенный КИН $K_{\rm III}$ превращается в классический КИН $K_{\rm III}^0$ для острой трещины. Только в последнем случае применимы методы классической механики разрушения тел с трещинами [8, 9]. В первом случае сингулярность поля напряжений меньше сингулярности поля напряжений в вершине трещины, во втором она больше, поэтому нельзя использовать классический подход при расчетах на прочность тел с угловыми вырезами (см. (1.1)). Итак, имеем $1/3 < \omega < 1$ при $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. При $\alpha = \pi/2$, так как $\omega = 1$, получаем полуплоскость; сингулярная составляющая в этом случае отсутствует.

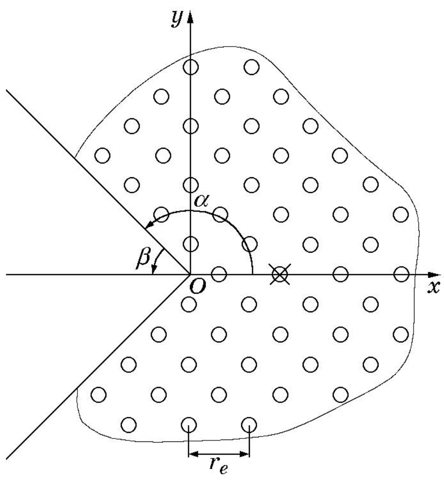

Рис. 2

2. Критерий хрупкого разрушения тел с угловыми вырезами. Изучаются монокристаллы с угловыми вырезами, причем полуугол раскрытия выреза определяется характеристиками кристаллической решетки. Ограничимся рассмотрением плоского случая. Допустим, что перед вершиной выреза имеются вакансии. Пример такого плотноупакованного слоя атомов с вакансией приведен на рис. 2 (атомы показаны кружками, вакансия отмечена крестиком, r_e — расстояние между атомами, $\beta = \pi/3$).

Предлагается дискретно-интегральный критерий хрупкой прочности (двумерный случай) для слабейшего монослоя атомов для угловых вырезов в антиплоской задаче

$$\frac{1}{kr_e}\int\limits_0^{nr_e} \tau_{\theta z}(r,0)\,dr \leqslant \tau_m. \tag{2.1}$$

Здесь $\tau_{\theta z}(r,0)$ — сдвигающие напряжения на оси выреза (эти напряжения действуют в толще монокристалла); n, k — целые числа ($n \geqslant k$); k — число межатомных связей; nr_e — интервал осреднения (для случая, представленного на рис. 2, имеем $n = 2$, $k = 1$); τ_m — теоретическая (идеальная) прочность монокристалла на сдвиг по плоскости $\theta = 0$.

Выполнив соответствующие преобразования (см. (1.1), (2.1)), для остроугольного выреза при наличии вакансий на его оси имеем оценку обобщенного КИНа $K_{\rm III}$ для антиплоской задачи

$$\frac{K_{\rm III}}{\omega(2\pi)^{1/2}(nr_e)^{1-\omega}}\,\frac{1}{\tau_\infty} \leqslant \frac{\tau_m}{\tau_\infty}\,\frac{k}{n} - 1. \tag{2.2}$$

При $\beta \to 0$ имеем $\omega = 1/2$, и оценка (2.2) переходит в оценку для классического КИНа $K^0_{\rm III}$ острой трещины

$$2K^0_{\rm III}/(\tau_\infty\sqrt{2\pi n r_e}) \leqslant (\tau_m/\tau_\infty)(k/n) - 1. \tag{2.3}$$

При $K^0_{\rm III} = K^{0*}_{\rm III}$ последнее неравенство превращается в равенство ($K^{0*}_{\rm III}$ — критический КИН для трещины в классической механике разрушения). Так как КИНы острых внутренней и краевой трещин соответственно равны $K^0_{\rm III} = \tau_\infty\sqrt{\pi l_{nk}}$, $K^0_{\rm III} = 1{,}1215\tau_\infty\sqrt{\pi l_{nk}}$ ($2l_{nk}, l_{nk}$ — длины внутренней и краевой трещин) (см. [11]), то для критических длин $2l^*_{nk}, l^*_{nk}$ этих трещин справедливы равенства

$$\frac{2l^*_{nk}}{r_e} = \Big(\frac{\tau_m}{\tau_\infty} - \frac{n}{k}\Big)^2\frac{k^2}{n}, \qquad 2{,}52\,\frac{l^*_{nk}}{r_e} = \Big(\frac{\tau_m}{\tau_\infty} - \frac{n}{k}\Big)^2\,\frac{k^2}{n}. \tag{2.4}$$

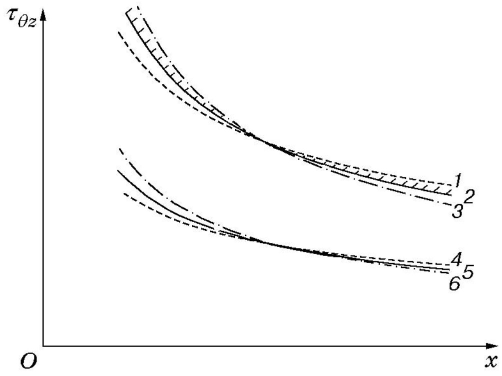

Рис. 3

Очевиден предельный переход при $K^0_{\rm III} \to 0$, $l_{nk} \to 0$ в соотношениях (2.3), (2.4). При отсутствии микродефектов (вакансий) и макродефектов (трещин) в образце имеем соответственно $n = k = 1$ и $l_{nk} = 0$, при этом достигается теоретическая прочность τ_m идеального кристаллического материала.

Следует отметить, что существуют точные предельные соотношения [11] для определения КИНов острых трещин через коэффициенты концентрации напряжений в вершине узкого выреза. Коэффициенты концентрации напряжений [1] всегда связывались с геометрическими характеристиками исследуемой задачи, а критический КИН для трещины $K^{0*}_{\rm III}$ в классической механике разрушения считается константой материала.

Обратим внимание на странную размерность обобщенного КИНа $K_{\rm III}$, которая зависит от угла раскрытия выреза (см. (2.2)). Если следовать принципам классической механики разрушения, то критический обобщенный КИН $K^*_{\rm III}$ материала зависит от угла раскрытия выреза. На рис. 3 приведены зависимости сдвигающих напряжений на оси выреза или трещины $\tau_{\theta z}$ от координаты x при увеличении $K_{\rm III}$: кривые *2, 5* соответствуют распределению напряжений для трещины $\alpha = \pi$, причем $K^{(2)}_{\rm III} > K^{(5)}_{\rm III}$ (штриховка у кривой *2* означает, что классический КИН достигает критического значения для рассматриваемого материала, т. е. $K^{(2)}_{\rm III} = K^{0*}_{\rm III}$); кривые *1, 4* соответствуют распределению напряжений для выреза с $\pi/2 < \alpha < \pi$, причем $K^{(1)}_{\rm III} > K^{(4)}_{\rm III}$; кривые *3, 6* соответствуют распределению напряжений для выреза с $\alpha > \pi$, причем $K^{(3)}_{\rm III} > K^{(6)}_{\rm III}$. Согласно дискретно-интегральному критерию (2.1) критическое состояние кристаллической структуры перед вершиной трещины или выреза имеет место, когда осредненные напряжения на интервале $(0, nr_e)$ достигают теоретической прочности с учетом поврежденности материала. Критерий (2.1) является силовым критерием на интервале $(0, nr_e)$. Минимальная длина интервала осреднения составляет r_e. Оценка (2.2), учитывающая структуру материала, является локальной и в основном определяется коэффициентом сингулярности $1 - \omega$ (рис. 3). В классической линейной механике разрушения известна эквивалентность [12] критерия страгивания трещин по критическому КИНу (силового критерия) и энергетического критерия разрушения.

В классической механике разрушения для каждого угла α и для каждого материала нужно определять критическое значение обобщенного КИНа $K^*_{\rm III} = K^*_{\rm III}(\alpha)$. Целесообразнее считать, что критический КИН для трещины не является постоянной материала. Постоянной материала является теоретическая прочность τ_m рассматриваемой регулярной структуры, что отражает формула (2.2), а обобщенный КИН $K_{\rm III}$, построенный по заданным краевым условиям (см. (2.2)), — удобная аппроксимация решения (1.1).

3. Коэффициент концентрации в структурированном материале для трещин и выточек. Опишем концентрацию напряжений валов [1], материал которых имеет зернистую структуру. Пусть регулярная структура материала описывается одним линейным параметром, который обозначим через r_1. Допустим, вал имеет острую или тупую трещину, расположенную перпендикулярно его поверхности. Под тупой трещиной понимается узкий вырез с радиусом закругления в вершине ρ. Допустим, что нарушениями регулярной структуры материала вала в окрестности вершины трещины можно пренебречь.

При продольном сдвиге распределение напряжений относительно оси выреза имеет вид (см. (1.38) и рис. 1.10 в [11])

$$\tau_{xz} \simeq \tau_\infty + \frac{K^0_{\mathrm{III}}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \tau_{yz} \simeq \tau_\infty + \frac{K^0_{\mathrm{III}}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}. \tag{3.1}$$

Здесь τ_{xz}, τ_{yz} — сдвигающие напряжения; $\tau_\infty = \mathrm{const}$ — характерные (номинальные) напряжения; K^0_{III} — классический КИН. Для соотношения (3.1) правая вершина острой ($\rho \equiv 0$) или тупой ($\rho \neq 0$) трещины совпадает с началом отсчета в полярной системе координат $Or\theta$.

Из-за симметрии нагружения максимальный коэффициент концентрации напряжений имеет место на оси выреза-трещины. Следуя [1], с учетом структуры материала имеем среднее значение напряжений τ_a в зерне, расположенном в вершине выреза-трещины ($\theta = 0$, $\rho/2 < r < \rho/2 + r_1$):

$$\tau_a = \frac{1}{r_1} \int\limits_{\rho/2}^{\rho/2+r_1} \tau_{yz}(r,0)\,dr. \tag{3.2}$$

Замечание. Выписанное соотношение (3.2) не учитывает ни поврежденность материала перед вершиной трещины, ни структуру межзеренных границ на оси выреза-трещины (см. (6) и рис. 86 в [1]).

После преобразований получим коэффициент концентрации напряжений $æ = \tau_a/\tau_\infty$ в вершине выреза-трещины, который явно зависит от радиуса закругления ρ выреза и классического КИНа K^0_{III}, т. е. $æ = æ(\rho, K^0_{\mathrm{III}})$. Если воспользоваться представлением классического КИНа через длину l острой краевой трещины $K^0_{\mathrm{III}} = 1{,}1215\tau_\infty\sqrt{\pi l}$, то окончательно получим

$$æ = 1 + 1{,}1215\sqrt{\frac{2l}{r_1}}\Big(\sqrt{\frac{\rho}{2r_1} + 1} - \sqrt{\frac{\rho}{2r_1}}\Big), \quad \rho \geqslant 0. \tag{3.3}$$

В соотношении (3.3), в отличие от соотношения Нейбера [1], имеется явная зависимость коэффициента концентрации напряжений от радиуса закругления выреза-трещины ρ.

Вал с вырезом-трещиной не разрушится, если действующие на элементе конечных размеров (зерне) r_1 напряжения τ_a не превосходят теоретическую прочность τ^* тела со структурой, т. е. $\tau_a = æ\tau_\infty \leqslant \tau^*$. Последнее неравенство с точностью до обозначений совпадает с соотношением (2.1). Целесообразно рассматривать разрушение твердого тела с иерархией структур, когда $r_e \ll r_1$ [4, 5]. Если для идеального кристаллического тела известно, что такое теоретическая (идеальная) прочность τ_m монокристалла [7], то что такое теоретическая прочность τ^* тела с идеальной структурой с характерным линейным размером зерна r_1, еще предстоит понять.

В предложенном подходе удается продемонстрировать единообразный подход к оценке прочности тел с иерархией структур как при наличии острых трещин или вырезов (тупых трещин), так и при отсутствии макродефектов.

l	ρ	æ	1/æ
$r_e/2$	$r_e/2$	1,69	0,590
r_e	r_e	1,82	0,550
$3r_e/2$	$r_e/2$	2,19	0,457
$2r_e$	r_e	2,16	0,463
$5r_e/2$	$r_e/2$	2,55	0,390
$10r_e$	r_e	5,59	0,278

4. О влиянии поверхностного слоя монокристалла на оценку теоретической прочности. В [7] содержится сравнение расчетных и экспериментальных значений теоретической (идеальной) прочности твердых тел, причем все расчеты выполнены для внутренних объемов идеальных монокристаллов. В таблице приведены значения коэффициента концентрации напряжений æ для такого монокристалла, у которого все неидеальности сконцентрированы на поверхности. Неидеальности связаны с отсутствием некоторых атомов в первом, втором и третьем приповерхностных слоях плотной упаковки атомов (плоский случай). Если неидеальности смоделировать вырезом-трещиной, то для расчета коэффициента концентрации напряжений æ можно воспользоваться соотношением (3.3), когда известны расстояния между атомами r_e, длина выреза-трещины l и радиус закругления выреза-трещины ρ. В таблице также приведены значения параметра 1/æ, характеризующего достижимость теоретической (идеальной) прочности τ_m монокристалла [7]. Анализ полученных оценочных результатов показывает, что только для монокристалла с почти идеальным поверхностным слоем можно получить $(0{,}5 \div 0{,}6)\tau_m$. При наличии трещиноподобных поверхностных дефектов прочность образца монокристалла резко уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
3. **Корнев В. М.** Интегральные критерии хрупкой прочности трещиноватых тел с дефектами при наличии вакансий в носике трещины. Прочность компактированных тел типа керамик // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 168–177.
4. **Корнев В. М.** Иерархия критериев прочности структурированных хрупких сред. Сателлитное зарождение микротрещин // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 177–187.
5. **Корнев В. М.** Многомасштабные критерии сдвиговой прочности блочных хрупких сред. Сателлитное зарождение микропор // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископаемых. 2000. Т. 40, № 5. С. 7–16.
6. **Томсон Р.** Физика разрушения // Атомистика разрушения: Сб. ст. 1983–1985 гг. / Сост. А. Ю. Ишлинский. М.: Мир, 1987. С. 104–144.
7. **Макмилан Н.** Идеальная прочность твердых тел // Там же. С. 35–103.
8. **Морозов Н. Ф.** Проблемы хрупкого разрушения и их исследование методами теории упругости // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 54–63.
9. **Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н.** Применение критерия хрупкого разрушения В. В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 122–126.

10. **Хелан К.** Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988.
11. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 2).
12. **Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.** Основы механики разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 1).

Поступила в редакцию 4/V 2001 г.