4. **Баранников В. А., Богатырев Г. П., Зимин В. Д., Кетов А. И., Шайдуров В. Г.** Закономерности чередования пиков в спектрах стохастических колебаний гидродинамических систем.— Свердловск, 1982.— (Препринт/Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР).

Поступила 25/XII 1986 г.

УДК 532.526.4

РАСПЛЫВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ СМЕСИ *

В. Е. Неуважаев

(Челябинск)

Изучена задача о расплывании турбулентного слоя смеси, образованного на границе двух несжимаемых сред с постоянными, но разными плотностями. Показано, что при больших временах решение стремится к автомодельному, причем степень автомодельности не может быть определена из анализа размерностей, а находится в процессе решения краевой задачи. Степень есть функция эмпирических постоянных модели. Для ряда параметров построены автомодельные решения и даны графики зависимости степени автомодельности от постоянных модели. В приближении постоянства турбулентной скорости по пространственной переменной получена формула для степени автомодельности, а решение для плотности смеси выражено через интеграл вероятности. Частный случай задачи для однородной среды рассмотрен в [1, 2]. Приводимые там результаты вычислений согласуются с полученными в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Пространство заполнено двумя несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1^0 и ρ_2^0. Граница раздела проходит по плоскости. Пусть в начальный момент в окрестности границы создается плоский турбулентный слой ширины L_0, состоящий из смеси обоих веществ. Такое состояние может возникнуть, например, благодаря ускоренному движению границы в интервале времени t_0 при соответствующем знаке ускорения, так что за время t_0 генерируется зона турбулентной смеси шириной L_0 и с некоторой начальной турбулентной скоростью $v(x, t_0)$. В отсутствие источников турбулентности начальный слой смеси расширяется, вовлекая соседние жидкости. Турбулентная энергия, определяемая через характерную турбулентную скорость, при этом затухает, диссипируя в тепло.

Для описания возникающего турбулентного перемешивания будем применять полуэмпирическую модель [3], основанную на уравнении баланса для кинетической энергии турбулентности $v^2/2$, содержащем три постоянные. Уравнения получаются из законов сохранения для несжимаемой жидкости путем замены $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $u = \bar{u} + u'$, $p = \bar{p} + p'$ и соответствующего осреднения с отбрасыванием третьих корреляций и произведений вторых. Из уравнения неразрывности находим $\partial\bar{\rho}/\partial t + \partial\bar{\rho}\tilde{u}/\partial x = 0$, $\tilde{u} = \overline{\rho' u'}/\bar{\rho}$. Здесь использовано условие несжимаемости $\bar{u} = 0$.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности следует из законов неразрывности и сохранения импульса [3, 4]: $(1/2)(\partial\bar{\rho}v^2/\partial t + \tilde{u}\partial\bar{\rho}v^2/\partial x) = -\nu\bar{\rho}v^3/l + (5/6)\bar{\rho}v^2\partial\tilde{u}/\partial x$. Применяя к уравнениям гипотезу Прандтля $\overline{\rho' u'} = -lv\partial\bar{\rho}/\partial x$, имеем

$$\partial\rho/\partial t = \partial(lv\partial\rho/\partial x)/\partial x; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho v^2}{2\partial t} - \frac{lv}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho v^2}{\partial x} = -\frac{\nu\rho v^3}{l} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho lv\frac{\partial v^2}{\partial x}\right) + \frac{5\rho v^2}{6}\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial t} - lv\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\right)^2\right], \tag{1.2}$$

где ρ — плотность смеси; $\bar{\rho}$ заменено на ρ. Характерный масштаб турбулентности l связывается линейной зависимостью с эффективной ши-

---

* Доложено на XI Всесоюзном семинаре по аналитическим методам в газодинамике (Фрунзе, июнь 1985 г.).

риной области перемешивания L

$$l = \alpha L \tag{1.3}$$

(α, ν, β — постоянные модели, вид L определен ниже).

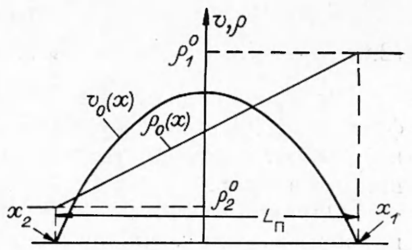

Рис. 1

В (1.2) в отличие от [3] отсутствует генерационный член. Первый член в правой части порождает диссипацию турбулентной энергии и фактически определяет закон затухания турбулентности. Второй (диффузионный) член с коэффициентом β вводится [4] для описания пространственного растекания турбулентности.

Для системы (1.1)—(1.3) ставится следующая задача: определить решение при $t > 0$, если в начальный момент ($t = 0$)

$$v(0, x) = v_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad |x| \leqslant L_0/2 \tag{1.4}$$

($v_0(x)$, $\rho_0(x)$ — функции, характеризующие турбулентную смесь). Начало координатной оси возьмем в середине слоя (рис. 1). Краевые условия на левом и правом фронтах перемешивания $x = x_2(t)$ и $x = x_1(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x = x_2(t)&: \quad v[x_2(t), t] = 0, \quad \rho_2[x_2(t), t] = \rho_2^0, \\ x = x_1(t)&: \quad v[x_1(t), t] = 0, \quad \rho_1[x_1(t), t] = \rho_1^0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Поставленная задача неавтомодельна, но при больших временах, когда $t \gg t_0$ и $L \gg L_0$, начальные данные должны забыться и решение, вообще говоря, будет стремиться к предельному.

2. Автомодельное решение. Система (1.1)—(1.3) допускает преобразование подобия:

$$x = \tilde{x}_0 \lambda \tau^{B/(B+1)}, \quad v = \tilde{x}_0 \zeta \tau^{(B-1)/(B+1)}, \quad \rho = \rho_1^0 \Delta. \tag{2.1}$$

Здесь $\tilde{x}_0$ — размерная постоянная, определяемая начальными данными (1.4); B — пока произвольная безразмерная постоянная, показатель автомодельности; λ, $\zeta(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — безразмерные представители длины, скорости и плотности; τ — новая переменная, связанная со временем уравнением

$$d\tau/dt = l. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует

$$L = \tilde{x}_0(\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1})\tau^{B/(B+1)}, \tag{2.3}$$

где $\lambda_{0,9}$ и $\lambda_{0,1}$ отвечают координатам, при которых безразмерная плотность $\delta = (n\Delta - 1)/(n - 1)$ $(n = \rho_1^0/\rho_2^0)$ принимает значения 0,9 и 0,1. Здесь выбрана эффективная ширина согласно [3], иначе наблюдается расходимость в предельном случае $n = \infty$.

Используем новые переменные для приведения (1.1)—(1.3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого (2.1)—(2.3) подставим в (1.1)—(1.3):

$$y((-B/(B+1))\lambda - \zeta') = (y^3 + 2y')\zeta; \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} 2\beta/\zeta(\zeta^2\zeta')' + [(B/(B+1))\lambda + (1 + 2\beta)\zeta y^2]\zeta' - {} \\ - \nu\zeta^2/\alpha^2(\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1})^2 - [(B-1)/(B+1)]\zeta - (\zeta/3)y^2[(B/(B+1))\lambda + {} \\ + \zeta y^2] = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Штрих означает дифференцирование по λ. При выводе (2.4) и (2.5) использована замена $y^2 = \Delta'/\Delta$, позволившая понизить порядок первого уравнения.

Краевые условия (1.5) в безразмерных переменных (2.1) примут вид

$$\lambda = \lambda_2, \ \zeta_2 = 0, \ \Delta = 1/n; \ \lambda = \lambda_1, \ \zeta_1 = 0, \ \Delta = 1. \tag{2.6}$$

Решение задачи для системы (2.4), (2.5) с краевыми условиями на фронтах (2.6) весьма проблематично, тем более что в точках (2.6) уравнения имеют особенность: коэффициент ζ^2 при старшей производной обращается в нуль.

Однако можно указать универсальный способ решения возникшей краевой задачи — численное интегрирование исходных уравнений в частных производных (1.1)—(1.3) с начальными данными (1.4). Численно интегрировались исходные газодинамические уравнения (1)—(5) из [3], при этом несжимаемость имитировалась заданием достаточно большой начальной скорости звука. Таким образом устанавливается факт выхода на автомодельное решение, которое одновременно и определяется. Прежде чем переходить к обсуждению результатов численного интегрирования, сделаем два замечания.

Замечание 1. Для однородной среды $n = 1$ уравнение (2.4) имеет тривиальное решение $y = 0$, а (2.5) приводится к виду

$$\frac{2\beta}{\zeta}(\zeta^2\zeta')' + \frac{B}{B+1}\lambda\zeta' - \frac{\nu\zeta^2}{\alpha^2(\lambda_{0,9} - \lambda_{0,1})} - \frac{B-1}{B+1}\zeta = 0. \tag{2.7}$$

Этот случай рассмотрен в [1, 2], где отмечено, что показатель автомодельности B должен определяться в процессе решения краевой задачи. Действительно, фронты перемешивания расположены симметрично $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_0$. Задачу в новых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\zeta}$ $(\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_0, \ \tilde{\zeta} = \zeta/\lambda_0^2)$ можно свести к краевой на интервале $[0,1]$ с условием симметрии в точке $\tilde{\lambda} = 0$

$$\tilde{\zeta}' = 0 \tag{2.8}$$

и полностью определяемым решением в точке $\tilde{\lambda} = 1$

$$\tilde{\zeta} = -\frac{B}{(B+1)4\beta}(1-\tilde{\lambda}) - \frac{1}{(B+1)4\beta}(1-\tilde{\lambda})^2 + \ldots \tag{2.9}$$

Уравнение (2.7) в переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\zeta}$ запишем как

$$(2\beta/\tilde{\zeta})(\tilde{\zeta}^2\tilde{\zeta}')' + (B/(B+1))\tilde{\lambda}\tilde{\zeta}' - \nu\tilde{\zeta}^2/(4\alpha^2\lambda_{0,1}^2) - ((B-1)/(B+1))\tilde{\zeta} = 0.$$

Решение находится численным интегрированием последнего уравнения. Выходя из точки $\tilde{\lambda} = 1$ по разложению (2.9) и интегрируя до точки $\tilde{\lambda} = 1$, значение параметра автомодельности подбираем таким, чтобы удовлетворить условию в центре симметрии (2.8).

Замечание 2. Степень автомодельности B — функция постоянных модели β, α и ν, причем последние две постоянные входят в виде отношения ν/α^2. Это обстоятельство не замечено в [1, 2], где коэффициенты уравнения (3.6) зависят от параметров α и ν. Замена искомого решения в [1, 2] на новое $\tilde{\Phi}$ $(\tilde{\Phi} = \alpha^2\Phi)$ приводит к уравнению с одним коэффициентом, пропорциональным отношению ν/α^2 (в [1, 2] $\nu = c$, $\beta = 0{,}25$).

3. Результаты расчетов и их обсуждение. Результаты численного интегрирования исходных уравнений в частных производных представлены на рис. 2—6. Решение осуществлено по программе ТУРИНБ методом [3]. В качестве начальных данных принимались значения $v_0(x)$ и $\rho_0(x)$: $v_0(x) = v_0$ — постоянная, $\rho(0, x) = \rho_2^0 + (\rho_1^0 - \rho_2^0)(x/L_0 + 0{,}5)$, $|x| \leqslant L_0/2$.

Рассмотрена зависимость решения от начальных параметров β, ν/α^2, n. Установлено слабое влияние значений β и n на степень автомодельности B. Это следует из рис. 2, где при $n = 1$ приведена зависимость степени B от отношения ν/α^2, точки — результаты численного интегрирования при $\beta = 0{,}25$, кривая — приближенная зависимость, доставляемая формулой (4.6). Численно определялось решение и при $\beta = 0{,}75$. Отличие в значении B меньше 1% и на рисунках неразличимо.

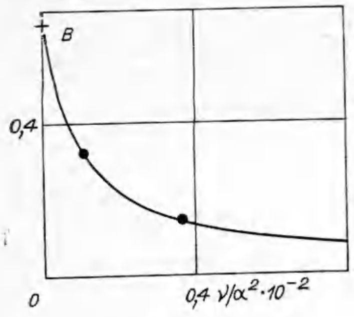

Рис. 2

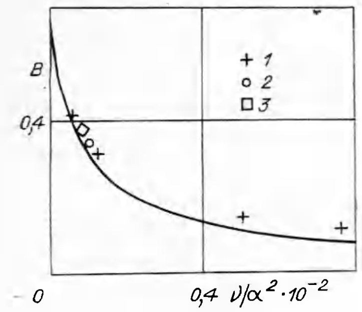

Рис. 3

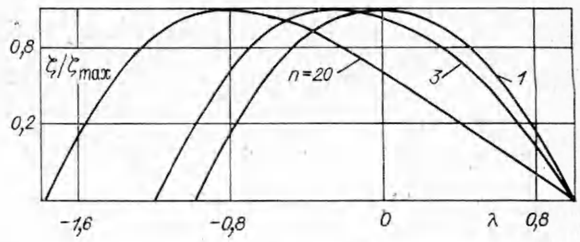

Рис. 4

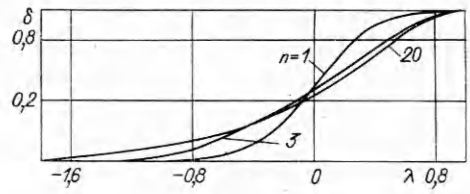

Рис. 5

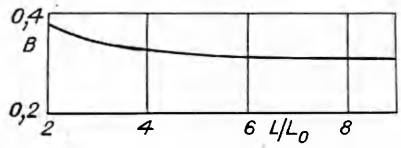

Рис. 6

На рис. 3 представлены результаты расчетов при фиксированном значении коэффициента β ($\beta = 0,25$) и $n = 3$; 10; 20 (точки *1—3*) в зависимости от ν/α^2.

Профили безразмерной скорости ζ и плотности δ изображены соответственно на рис. 4 и 5. Структура решения в окрестности фронта следует из разложения $\zeta = [B\lambda_i/(4(B+1)\beta)](\lambda_i - \lambda) + \ldots$, $y = D_i(\lambda_i - \lambda)^{(4\beta-1)/2} + \ldots$ $(i = 1, 2)$ (D_i — постоянные). Разложение получено при ограниченных значениях λ_1 и λ_2. Фронт перемешивания отсутствует только в приближенном решении п. 4, когда турбулентная скорость ζ полагается не зависящей от пространственной координаты. Разложение для функции y носит неаналитический характер. Значение $\beta = 0,25$ в этом смысле критическое, для него существует разложение в виде ряда по целым степеням, а функция y в точках λ_1 и λ_2 принимает ограниченное значение.

Профиль скорости ζ получается симметричным при $n = 1$, симметрия нарушается, если $n > 1$: максимальное значение скорости сдвигается в сторону легкого вещества с возрастанием n. Фронт перемешивания также будет более продвинутым в сторону легкого вещества. На рис. 6 демонстрируется выход на автомодельный режим задачи с начальными данными (1.4) при $\nu/\alpha^2 = 12,5$. Первоначально неавтомодельные профили скорости и плотности также стремятся в пределе к автомодельным, изображенным на рис. 4 и 5.

4. Приближенное решение. Анализируя профили получаемых решений (см. рис. 4), видим, что турбулентная скорость в области перемешивания имеет колоколообразный вид. Поэтому можно, как и в [5], построить приближенное решение, заменив турбулентную скорость в области смеси постоянной величиной. С этой целью усредним уравнение (1.2) по области смеси:

$$\frac{d\bar v^2}{2d\bar\tau} = -\frac{k\bar v^2}{\bar\tau}, \quad k = 0,25 + \frac{\nu}{16\eta_0^2\alpha^2} + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2; \tag{4.1}$$

$$d\bar\tau = l\bar v dt; \tag{4.2}$$

$$\delta = 0,5(1 + \Phi(x/(2\bar\tau^{0,5}))); \tag{4.3}$$

(4.4) $$L = 4\eta_0\bar{\tau}^{0,5}, \quad \eta_0 = 0{,}906.$$

Здесь также выписано решение для L и δ; Φ — интеграл вероятности: $\Phi(\eta) = \frac{2}{\pi^{0,5}}\int\limits_0^\eta \exp(-\eta^2)\,d\eta$. При выводе (4.1) использовано решение для плотности (4.3). Усреднение (1.2) проведено путем интегрирования по области перемешивания $|x| \leqslant L/2$. Предварительно в (1.2) введена вместо времени t переменная $\bar{\tau}$, а после интегрирования по области перемешивания соответствующие интегралы заменены приближенными выражениями

$$\int\limits_{|x|\leqslant\frac{L}{2}} \frac{\partial \rho v^2}{\partial\bar{\tau}}\,dx \simeq \frac{\partial(\bar{v}^2M)}{\partial\bar{\tau}},$$

$$\int\limits_{|x|\leqslant\frac{L}{2}} \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x}\,dx \simeq \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=0}\int\limits_{|x|\leqslant\frac{L}{2}}\frac{\partial v^2}{\partial x}\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{|x|\leqslant\frac{L}{2}} v^2\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\right)^2\rho\,dx \simeq \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\right)^2_{x=0}\bar{v}^2M,$$

$$M = \int\limits_{|x|\leqslant\frac{L}{2}}\rho\,dx = \frac{\rho_1^0+\rho_2^0}{2}L, \quad \left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{n-1}{(n+1)(\pi\bar{\tau})^{0,5}}.$$

Уравнения (4.1)—(4.4) интегрируются, и решение выписывается в виде

(4.5) $$L = At^{1/(1+2k)}, \quad \bar{v} = \left[A/\left(8\alpha\eta_0^2(1+2k)\right)\right]t^{-2k/(1+2k)}.$$

Здесь A — постоянная, определяемая начальными данными (1.4). Сравнивая формулы (4.5) и (2.3), находим явное выражение

(4.6) $$B = 1/\left[1{,}5 + \nu/\left(8\eta_0^2\alpha^2\right) + (1/3\pi)\left((n-1)/(n+1)\right)^2\right],$$

применимое и при $n = 1$. Зависимость для этого случая изображена кривой на рис. 2. Заметим, что формулу (4.6) можно также получить, конструируя приближенное решение для системы (2.4), (2.5). Это сделано в приложении. Формула (4.6) вполне удовлетворительно работает и в общем случае. На рис. 3 линией показана степень B по формуле (4.6) при $n = 3$. Сравнение результатов численного интегрирования с приближенной формулой (4.6), представленное па рис. 2 и 3, свидетельствует о хорошей точности приближенной формулы. Численные результаты [1, 2] согласуются с кривой рис. 2.

При сравнении B следует иметь в виду, что значение постоянной α зависит от ширины, используемой в формуле (1.3). Поэтому если в модели фигурирует полная ширина $L_п$, то постоянные $\alpha_п$ и α будут связаны соотношением $\alpha_п L_п = \alpha L$.

Для произвольного значения n при $\nu = 0$ задача упрощается незаметно, степень B также остается неопределенной и находится в процессе решения краевой задачи. Исключительным является только значение параметра n, равное 1, когда $B = 2/3$. Общий результат при $n \neq 1$ вытекает из приближенного выражения (4.5) для B. Он также следует из вида уравнения (1.2): закон сохранения начальной турбулентной энергии в случае произвольного n не имеет места.

Приложение. Построим приближенное решение системы (2.4), (2.5). Для этого в (2.4) пренебрежем членом ζ', а функцию ζ заменим постоянной ζ_0, которую определим путем приближенного интегрирования уравнения

(2.5). В результате

(П.1) $$-B/((B+1)\zeta_0)y\lambda = y^3 + 2y';$$

(П.2) $$(1+B)\zeta_0 = (1-1{,}5B)/(\nu/(4\alpha^2\lambda_{0,1}^2) + y_0^4/\zeta).$$

Последнее соотношение нолучено следующим образом. Уравнение (2.5) умножено на ζ и от обеих частей его взят интеграл по области $[-\lambda_{0,1}, \lambda_{0,1}]$, при этом использованы приближенные равенства

$$\int\limits_{-\lambda_{0,1}}^{\lambda_{0,1}} \left[\frac{B}{B+1}\lambda + (1+2\beta)\zeta y^2\right]\zeta\zeta'\,d\lambda \simeq -\frac{B}{B+1}\lambda_{0,1}\zeta_0^2,$$

$$\int\limits_{-\lambda_{0,1}}^{\lambda_{0,1}} \zeta^2 y^2\left(\frac{B}{B+1}\lambda + \zeta y^2\right)d\lambda \simeq 2y^4(0)\,\zeta_0^3\lambda_{0,1}.$$

Дифференциальное уравнение (П.1) для функции y есть уравнение Бернулли. Оно интегрируется, и решение представляется в виде $\Delta = 1/ /y^2(0) + [((1+B)/(2B))\zeta_0\pi]^{0,5}\Phi[\lambda B^{0,5}/((2(B+1)\zeta_0)^{0,5})]$.

Удовлетворяя граничным условиям (2.6), имеем

(П.3) $$y_0^2 = 2n/(n+1), \quad [2(1+B)\zeta_0\pi]^{0,5} = (n-1)/n.$$

Из условия $\delta(\lambda_{0,1}) = 0{,}1$ находим

(П.4) $$\lambda_{0,1} = \eta_0(n-1)/(\pi^{0,5}n).$$

Из (П.2)—(П.4) можно определить показатель автомодельности B. Выражение для него тождественно совпадает с формулой (4.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баренблатт Г. И.** Расплывание турбулентного слоя // Н. Е. Кочин и развитие механики.— М.: Наука, 1984.
2. **Barenblatt G. I.** Selfsimilar turbulence propagation from an instantaneous plane source // Nonlinear Dynamics and Turbulence.— Boston et al., 1983.— P. 48.
3. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** Модель и метод численного расчета турбулентного перемешивания границы раздела, движущейся ускоренно // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.— М., 1984.— Вып. 2/16.
4. **Монин А. С., Яглом А. И.** Статистическая гидродинамика.— М.: Наука, 1965.— Ч. 1.
5. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания // ДАН СССР.— 1975.— Т. 222, № 5.
6. **Неуважаев В. Е.** Свойства модели турбулентного перемешивания границы раздела ускоряемых разноплотных жидкостей // ПМТФ.— 1983.— № 5.

Поступила 3/X 1986 г.

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

В. В. Новомлинский, М. П. Стронгин

(Барнаул)

Турбулентные закрученные потоки широко используются для интенсификации процессов тепломассообмена в различных промышленных аппаратах. Примерами таких аппаратов могут служить плазмохимические реакторы, плазмотроны, камеры сгорания, пылеуловители и т. д. Для увеличения экономичности и эффективности их работы необходимо детальное исследование гидродинамики в закрученных течениях.

Известно, что закрученные потоки характеризуются сильной искривленностью линий тока, возникновением рециркуляционных зон, расположение и размеры которых в значительной мере зависят от интенсивности крутки и конфигурации границ