

УДК 539.376

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ (ПОЛЗУЧЕСТЬ — ПОВРЕЖДЕННОСТЬ)

Л. В. Степанова, М. Е. Федина

Самарский государственный университет, 443011 Самара

Рассматривается растущая трещина антиплоского сдвига в среде с поврежденностью. Предполагается, что к вершине трещины примыкает область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния и определена конфигурация области полностью поврежденного материала. Дана оценка скорости роста трещины при различных значениях постоянных, входящих в определяющие соотношения и кинетическое уравнение.

В последнее время появилось большое количество работ, в которых определяется напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины как стационарной, так и растущей трещины в связанной постановке задачи теорий упругости, пластичности и ползучести, а также механики поврежденности [1–12]. Представляет интерес исследование влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и деформаций (или скоростей деформаций ползучести). С практической точки зрения важно определить скорость докритического подрастания трещины.

Двумерные задачи о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (упругость — поврежденность, ползучесть — поврежденность) имеют ряд особенностей. В частности, в [1–6] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в том, что особенность напряжений в окрестности вершины трещины отсутствует, либо в том, что сингулярность этого поля значительно ослаблена. В [1, 2] установлено, что эффективные напряжения σ_{ij}/ψ (σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ψ — параметр сплошности Качанова — Работнова) ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и компоненты тензора напряжений линейно уменьшаются до нуля при приближении к вершине трещины. Исследование результирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений для различных значений констант m и n , входящих в кинетическое уравнение, показало, что связанность постановки задачи приводит к ослаблению сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой в линейной механике разрушения) поля напряжений для малых значений m и n , тогда как при возрастании значений данных параметров особенность исчезает [3–6].

Другой характерной чертой данного типа задач является наличие области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [1, 2]. В работах [1, 2] численно определены коэффициенты асимптотических разложений компонент тензора напряжений (их угловых распределений) и сплошности. При этом установлено, что начиная с некоторого значения полярного угла φ_d (значение $\varphi = \pi$ соответствует верхнему берегу трещины, $\varphi = 0$ — ее продолжению) функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, принимает отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины.

Поэтому постановка задачи была модифицирована. Согласно этой постановке решение разыскивается при $0 \leq \varphi \leq \varphi_d$. Область $\varphi_d \leq \varphi \leq \pi$, локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, представляет собой полностью поврежденную зону, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю, на границе областей выполняются условия непрерывности функции сплошности и необходимых компонент тензора напряжений. В [3, 4] из-за невозможности удовлетворения граничным условиям на берегах трещины авторы дают модифицированную постановку задачи, вводя область полностью поврежденного материала, примыкающую к берегам трещины. В [3, 4] предполагается, что к вершине трещины примыкает зона накопления повреждений, на бесконечности находится зона, в которой материал является линейно-упругим, между этими зонами существует некоторая область с асимптотикой напряжений вида $\sigma_{ij} \sim r^{-1/p}$, где $p > 2$, в силу того что особенность напряжений должна быть слабее особенности упругого решения. Такая гипотеза позволяет сформулировать граничное условие в бесконечно удаленной точке, замыкающее постановку задачи, и определить скорость усталостного роста трещины.

В [7, 8] для решения задач о трещинах антиплоского сдвига используется метод годографа в предположении, что параметр поврежденности есть функция только напряжений. Предполагается, что существует три области: область, в которой процесс накопления поврежденности еще не начался; область активного накопления поврежденности; область, в которой процесс накопления повреждений уже закончился и параметр сплошности (или поврежденности) достиг критического значения. Последняя область в [7, 8] названа зоной насыщения. В общем случае распространяющейся трещины поврежденность зависит и от пространственных координат, поэтому кинетическое уравнение уже не допускает простого интегрирования, что приводит к невозможности использования метода годографа. В [9] разыскиваются поля напряжений и параметр поврежденности в окрестности вершины трещины нормального отрыва в случае установившегося роста трещины. Однако для того, чтобы построить решение, необходимо знать размеры области полностью поврежденного материала и ее конфигурацию. Основываясь на экспериментальных данных, авторы работы [9] считают поврежденную область полуэллипсом и доопределяют ее полупрямыми, параллельными берегам трещины. Таким образом, геометрия области не определяется, а задается заранее.

В работах [3, 4], в которых изучается усталостный рост трещины нормального отрыва в связанной постановке, для определения границы поврежденной зоны использовано то обстоятельство, что кинетическое уравнение имеет две “ветви”, определяющие два состояния материала: накопление повреждений в окрестности вершины трещины и отсутствие накопления повреждений.

В [10, 11] предполагалось существование области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. В силу наличия такой зоны вблизи вершины трещины нельзя разыскивать асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в малой окрестности вершины трещины. Поэтому все асимптотические решения определялись в системе координат, сдвинутой вправо от вершины на расстояние, равное характерному линейному размеру области полностью поврежденного материала. Оказалось, что в разложениях по собственным функциям параметра сплошности и компонент тензора напряжений степени не связаны друг с другом. Поэтому одна из степеней задавалась априори, что ограничивает общность задачи. В [10, 11] определена геометрия области полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант.

В данной работе исследованы поля напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности в связанной постановке задачи (ползучесть — поврежденность) с использова-

нием автомодельной переменной, предложенной в [12], путем разложения искомым величин по собственным функциям для больших расстояний от вершины трещины; моделируется процесс роста трещины и определяется геометрия области полностью поврежденного материала в окрестности трещины.

1. Постановка задачи о росте трещины в среде с поврежденностью. Рассматривается растущая полубесконечная трещина в бесконечном теле из материала с определяющими соотношениями связанной задачи теории ползучести и механики поврежденности, построенными с использованием степенной зависимости между скоростями деформаций ползучести и напряжениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; B , n — константы материала; $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений; ψ — параметр сплошности; s_{ij} — компоненты девiatorа тензора напряжений.

Кинетическое уравнение определяет степенной закон накопления повреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (1.2)$$

где t — время; A , m — константы материала.

При $r \rightarrow \infty$ асимптотическое условие имеет вид

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C} r^\beta \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.3)$$

где показатель степени β определяется в ходе решения задачи; $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, подлежащие определению; r , φ — полярные координаты. Случай $\beta = -1/2$, $\tilde{C} = K_\alpha$ ($K_\alpha = K_I, K_{II}, K_{III}$ — коэффициенты интенсивности напряжений; $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — угловые распределения компонент тензора напряжений линейно-упругой задачи) соответствует предположению о том, что конфигурация области полностью поврежденного материала определяется сингулярным упругим решением. Равенства $\beta = -1/(n+1)$, $\tilde{C} = (C^*/(BI_n))^{1/(n+1)}$ (C^* — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести; I_n — функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^* -интеграл) следуют из гипотезы о том, что геометрия поврежденной зоны определяется решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена [13]. В этом случае $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, известные из решения Хатчинсона — Райса — Розенгрена. Если $\beta = -1/(n-1)$, $\tilde{C} = (\dot{a}/(BG))^{1/(n-1)}$ (\dot{a} — скорость роста трещины; G — модуль сдвига), то необходимо использовать решение Хьюи — Риделя [14] с учетом скоростей упругих деформаций. Таким образом, априори значение показателя степени β считается неизвестным, поскольку сложно указать, какой асимптотикой определяется конфигурация области полностью поврежденного материала.

В силу (1.3) начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = \tilde{C} r^\beta \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.4)$$

2. Автомодельность как свойство решения задачи. Для определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями (1.4) и (1.3) существует автомодельная переменная

$$R = r \tilde{C}^{1/\beta} (At)^{1/(\beta m)} \quad (2.1)$$

($\beta = -1/(n+1)$ соответствует автомодельной переменной, предложенной в [12]). Существование автомодельной переменной R в виде (1.2) легко обосновывается с помощью анализа размерностей.

Действительно, радиус, время и компоненты тензора напряжений можно привести к безразмерному виду

$$\hat{r} = rL^{-1}, \quad \hat{t} = tT^{-1}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(\tilde{C}L^\beta)^{-1},$$

где L — некоторый характерный линейный размер; T — некоторое характерное время. Зависимость между характерными длиной L и временем T устанавливается из анализа кинетического уравнения (1.2): $T = \tilde{C}^{-m}L^{-\beta m}A^{-1}$. Безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции безразмерных переменных имеют вид $\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \tilde{C}^{-1}L^{-\beta}\sigma_{ij}(rL^{-1}, \varphi, tA\tilde{C}^mL^{\beta m})$. Отсюда следует существование автомодельной переменной (2.1). В этом случае компоненты тензора напряжений и параметр сплошности представляются в форме

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = (At)^{-1/m}\hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi), \quad \psi(r, \varphi, t) = \hat{\psi}(R, \varphi),$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi)$, $\hat{\psi}(R, \varphi)$ — безразмерные функции безразмерных переменных R, φ , определяемые в ходе решения конкретных краевых задач.

3. Антиплоский сдвиг пространства с полубесконечной трещиной (автомодельное решение связанной задачи). Рассмотрим задачу о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью. На основе результатов исследований [1, 2] предполагается, что вблизи вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль.

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R}(R\hat{\tau}_{rz}) + \frac{\partial \hat{\tau}_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.1)$$

условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций ползучести $\hat{\gamma}_{\varphi z}$, $\hat{\gamma}_{rz}$:

$$\frac{\partial}{\partial R}(R\hat{\gamma}_{\varphi z}) = \frac{\partial \hat{\gamma}_{rz}}{\partial \varphi}, \quad (3.2)$$

где $\hat{\gamma}_{sz} = (\hat{\tau}/\hat{\psi})^{n-1}\hat{\tau}_{sz}/\hat{\psi}$; $\hat{\tau} = \sqrt{(\hat{\tau}_{rz})^2 + (\hat{\tau}_{\varphi z})^2}$; $\hat{\gamma}_{sz}(R, \varphi) = 2\gamma_{sz}(r, \varphi, t)(At)^{n/m}/(3B)$ ($s = r, \varphi$), и кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R} = -\beta m \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^m. \quad (3.3)$$

Решение системы уравнений (3.1)–(3.3) должно удовлетворять следующим граничным условиям: условию отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\hat{\tau}_{\varphi z}(R, \varphi = \pi) = 0 \quad (3.4)$$

и условию симметрии на ее продолжении

$$\hat{\tau}_{rz}(R, \varphi = 0) = 0. \quad (3.5)$$

При $R \rightarrow \infty$ асимптотическое условие имеет вид

$$\hat{\tau}_{sz}(R \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow R^\beta \bar{\tau}_{sz}(\varphi, n) \quad (3.6)$$

(граничное условие в бесконечно удаленной точке).

Решение системы уравнений (3.1)–(3.3), подчиняющееся граничным условиям (3.4)–(3.6), ищется во всей плоскости, за исключением полностью поврежденной зоны, внутри которой поведение материала не описывается сформулированной системой уравнений. Предполагается, что внутри области полностью поврежденного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе области

полностью поврежденной зоны разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям непрерывности $\hat{\psi} = 0$, $\hat{\tau}_{sz} = 0$ (в дальнейшем знак “^” опускается).

Ниже изложен метод разложения по собственным функциям для произвольных n и $m = 0, 7n$. Решение системы уравнений (3.1)–(3.3) с граничными условиями (3.4)–(3.6) будем разыскивать в форме степенных разложений с главными членами

$$(\tau_{sz}/\psi)(R, \varphi) = R^\beta f_{sz}^{(0)}(\varphi) + \dots, \quad \psi(R, \varphi) = 1 - \dots \quad (\beta < 0) \quad (3.7)$$

при $R \rightarrow \infty$, двигаясь от бесконечно удаленной точки к окрестности вершины трещины.

Функции $f_{sz}^{(0)}(\varphi)$ находятся из решения системы уравнений (3.1)–(3.3) с граничными условиями (3.4)–(3.6). Подставляя главные члены асимптотических разложений (3.7) в уравнение равновесия и условие совместности, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f_{\varphi z}^{(0)})' = -(\beta + 1)f_{rz}^{(0)}, \quad (f_{rz}^{(0)})' = f_{\varphi z}^{(0)} \frac{(\beta n + 1)f^2 + (n - 1)(\beta + 1)(f_{rz}^{(0)})^2}{f^2 + (n - 1)(f_{rz}^{(0)})^2}, \quad (3.8)$$

где $f(\varphi) = \sqrt{(f_{rz}^{(0)})^2 + (f_{\varphi z}^{(0)})^2}$, с граничными условиями $f_{rz}^{(0)}(0) = 0$, $f_{\varphi z}^{(0)}(\pi) = 0$.

При построении численного решения системы (3.8) граничное условие при $\varphi = \pi$ заменяется начальным условием $f_{\varphi z}^{(0)}(0) = c$ при $\varphi = 0$. В силу однородности системы (3.8) можно принять условие нормировки $f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1$. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$f_{rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1. \quad (3.9)$$

Решая систему (3.8) с граничными условиями (3.9) как задачу на собственное значение методом Рунге — Кутты — Фельдберга, можно найти численное решение (например, значение $\beta = -1/(n + 1)$ соответствует известному решению Хатчинсона — Райса — Розенгрена [13]).

Кинетическое уравнение (3.3) приводит к двучленному асимптотическому разложению для параметра сплошности $\psi(R, \varphi) = 1 - R^{\beta m} f^m(\varphi)$.

Поскольку на границе области полностью поврежденного материала параметр сплошности обращается в нуль: $\psi = 1 - R^{\beta m} f^m = 0$, можно оценить геометрию данной области: $R(\varphi) = [f(\varphi)]^{-1/\beta}$.

Рассматривая следующие за главным членом асимптотического разложения, можно уточнить геометрию области полностью поврежденного материала.

Двучленное асимптотическое разложение компонент тензора эффективных напряжений разыскивается в виде

$$(\tau_{sz}/\psi)(R, \varphi) = R^\beta f_{sz}^{(0)}(\varphi) + R^{\beta_1} f_{sz}^{(1)}(\varphi) + \dots \quad (3.10)$$

В дальнейшем будут полезны асимптотические разложения для самих компонент тензора напряжений и скоростей деформаций сдвига

$$\begin{aligned} \tau_{sz}(R, \varphi) &= R^\beta f_{sz}^{(0)} - R^{\beta(1+m)} f_{sz}^{(0)} f^m + R^{\beta_1} f_{sz}^{(1)}, \\ \gamma_{sz}(R, \varphi) &= f^{n-1} \{ R^{\beta n} f_{sz}^{(0)} + R^{\beta(n-1)+\beta_1} [f_{sz}^{(1)} + (n-1)f_{sz}^{(0)} f_1 f^{-2}] \}. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений содержат слагаемые с показателями β , β_1 , $\beta(1+m)$ степени R . Возможны три случая: $\beta_1 < \beta(1+m)$, $\beta_1 > \beta(1+m)$, $\beta_1 = \beta(1+m)$. В первом случае не учитываются новые функции асимптотического разложения компонент тензора напряжений, во втором — слагаемое, содержащее функцию угловых распределений компонент тензора напряжений, входящих в главный член асимптотического разложения.

Будем учитывать все слагаемые и полагать, что слагаемые, содержащие R^{β_1} и $R^{\beta(1+m)}$, имеют одинаковый порядок и, следовательно, $\beta_1 = \beta(1+m)$.

Подставляя асимптотическое разложение (3.10) в уравнение равновесия (3.1) и условие совместности (3.2), получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно систему уравнений (3.8) и два новых дифференциальных уравнения для двух функций $f_{sz}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} (f_{\varphi z}^{(1)})' &= m f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-2} [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})'] + (f_{\varphi z}^{(0)})' f^m - (\beta_1 + 1) [f_{rz}^{(1)} - f^m f_{rz}^{(0)}], \\ (f_{rz}^{(1)})' &= \{(1 + \beta n + \beta m) [f^2 f_{\varphi z}^{(1)} + (n-1) f_1 f_{\varphi z}^{(0)}] - (n-1) f_1 (f_{rz}^{(0)})' - \\ &\quad - (n-1) [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})'] [f_{rz}^{(1)} + (n-1) f^{-2} f_1 f_{rz}^{(0)}] - \\ &\quad - (n-1) [f_{rz}^{(1)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(1)} (f_{\varphi z}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(1)})'] f_{rz}^{(0)} - \\ &\quad - 2(n-1) f^{-2} f_1 f_{rz}^{(0)} [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})']\} [f^2 + (n-1) (f_{rz}^{(0)})^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $f_1(\varphi) = f_{rz}^{(0)} f_{rz}^{(1)} + f_{\varphi z}^{(0)} f_{\varphi z}^{(1)}$. Граничные условия записываются в виде

$$f_{rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(\pi) = 0, \quad f_{rz}^{(1)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(\pi) = 0.$$

Решая системы уравнений (3.8), (3.11) методом Рунге — Кутты — Фельдберга и используя метод пристрелки (подбирая условие $f_{\varphi z}^{(1)}(0) = c$ таким образом, чтобы при $\varphi = \pi$ выполнялось граничное условие $f_{\varphi z}^{(1)} = 0$), можно получить решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$f_{rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1, \quad f_{rz}^{(1)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(0) = c.$$

Из кинетического уравнения (3.3) и асимптотического разложения (3.10)

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\beta m R^{\beta m} f^m (1 + m R^{\beta_1 - \beta} f^{-2} f_1)$$

можно определить трехчленное асимптотическое разложение для параметра сплошности $\psi(R, \varphi) = 1 - R^{\beta m} f^m - m R^{2\beta m} f^{m-2} f_1/2$.

Геометрия области полностью поврежденного материала определяется уравнением

$$R(\varphi) = [(f^m + \sqrt{f^{2m} + 2m f^{m-2} f_1})/2]^{-1/(\beta m)}.$$

Для уточнения конфигурации области поврежденного материала необходимо построить следующие слагаемые в асимптотическом разложении компонент тензора эффективных напряжений:

$$(\tau_{sz}/\psi)(R, \varphi) = R^{\beta} f_{sz}^{(0)}(\varphi) + R^{\beta_1} f_{sz}^{(1)}(\varphi) + R^{\beta_2} f_{sz}^{(2)}(\varphi) + \dots \quad (3.12)$$

Асимптотические разложения для компонент тензора напряжений и скоростей деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{sz} &= R^{\beta} f_{sz}^{(0)} + R^{\beta_1} (f_{sz}^{(1)} - f_{sz}^{(0)} f^m) - R^{\beta(1+2m)} (f_{sz}^{(1)} f^m + m f_{sz}^{(0)} f^{m-2} f_1/2) + R^{\beta_2} f_{sz}^{(2)}, \\ \gamma_{sz} &= f^{n-1} \{ R^{\beta n} f_{sz}^{(0)} + R^{\beta(n-1)+\beta_1} [f_{sz}^{(1)} + (n-1) f_{sz}^{(0)} f_1 f^{-2}] + \\ &\quad + R^{\beta(n-1)+\beta_2} [f_{sz}^{(2)} + f_{sz}^{(0)} f_2 f^{-2}] + (n-1) R^{2\beta_1 - \beta} f_{sz}^{(1)} f_1 f^{-2} \}. \end{aligned}$$

По аналогии с двухчленным асимптотическим разложением компонент тензора напряжений можно считать, что слагаемые, содержащие R^{β_2} и $R^{\beta(1+2m)}$, имеют одинаковый порядок малости и, следовательно, $\beta_2 = \beta(1+2m)$.

Подставив (3.12) в уравнение равновесия (3.1) и условие совместности (3.2), получим систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно системы уравнений (3.8), (3.11) и два новых дифференциальных уравнения для двух функций $f_{sz}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 (f_{\varphi z}^{(2)})' &= -(\beta_2 + 1)[f_{rz}^{(2)} - m f_{rz}^{(0)} f^{m-2} f_1/2 - f_{rz}^{(1)} f^m] + (f_{\varphi z}^{(1)})' f^m + m(f_{\varphi z}^{(0)})' f^{m-2} f_1/2 + \\
 &\quad + m(m-2) f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-4} f_1 [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})']/2 + \\
 &\quad + m f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-2} [(f_{rz}^{(0)})' f_{rz}^{(1)} + (f_{rz}^{(1)})' f_{rz}^{(0)} + (f_{\varphi z}^{(0)})' f_{\varphi z}^{(1)} + (f_{\varphi z}^{(1)})' f_{\varphi z}^{(0)}]/2 + \\
 &\quad + m f_{\varphi z}^{(1)} f^{m-2} [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})']/2, \\
 (f_{rz}^{(2)})' &= \{(1 + \beta n + 2\beta m)[f^2 f_{\varphi z}^{(2)} + (n-1) f_1 f_{\varphi z}^{(1)} + (n-1) f_2 f_{\varphi z}^{(0)}] - \\
 &\quad - [f_{rz}^{(1)} (f_{rz}^{(1)})' + f_{\varphi z}^{(1)} (f_{\varphi z}^{(1)})' + f_{rz}^{(2)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(2)} (f_{\varphi z}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(2)})'](n-1) f_{rz}^{(0)} - \\
 &\quad - (n-1)[f_{rz}^{(2)} + (n-1) f^{-2} f_1 f_{rz}^{(1)} + (n-1) f^{-2} f_2 f_{rz}^{(0)}][f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})'] - \\
 &\quad - (n-1)[f_1 (f_{rz}^{(1)})' + f_2 (f_{rz}^{(0)})'] - \\
 &\quad - (n-1) f_{rz}^{(1)} [f_{rz}^{(1)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(1)})' + f_{\varphi z}^{(1)} (f_{\varphi z}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(1)})'] + \\
 &\quad + 2(n-1) f^{-2} (f_1 f_{rz}^{(1)} + f_2 f_{rz}^{(0)}) [f_{rz}^{(0)} (f_{rz}^{(0)})' + f_{\varphi z}^{(0)} (f_{\varphi z}^{(0)})']\} [f^2 + (n-1) (f_{rz}^{(0)})^2]^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $f_2 = (f_{\varphi z}^{(1)})^2/2 + (f_{rz}^{(1)})^2/2 + f_{rz}^{(0)} f_{rz}^{(2)} + f_{\varphi z}^{(0)} f_{\varphi z}^{(2)}$. Граничные условия записываются в виде

$$f_{rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(\pi) = 0, \quad f_{rz}^{(1)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(\pi) = 0, \quad f_{rz}^{(2)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(2)}(\pi) = 0.$$

По аналогии с двучленным асимптотическим разложением можно получить решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$f_{rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1, \quad f_{rz}^{(1)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(0) = c, \quad f_{rz}^{(2)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(2)}(0) = c_1.$$

Для рассматриваемой задачи естественно положить $\beta = -1/(n+1)$. Однако установлено, что при $\varphi = \pi$ граничные условия для $n = m = 1$ не выполняются: независимо от того, какое выбирается начальное значение c_1 , функция $f_{\varphi z}^{(2)}$ принимает одно и то же значение, отличное от нуля при $\varphi = \pi$, что подтверждается как аналитическим, так и численным решениями для этого случая. Следовательно, $\beta \neq -1/(n+1)$.

Из кинетического уравнения (3.3) можно найти

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\beta m R^{\beta m} f^m (1 + m R^{\beta_1 - \beta} f^{-2} f_1 + m R^{\beta_2 - \beta} f^{-2} f_2),$$

тогда четырехчленное асимптотическое разложение для параметра сплошности принимает вид

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{\beta m} f^m - m R^{2\beta m} f^{m-2} f_1/2 - m R^{3\beta m} f^{m-2} f_2/3.$$

Геометрия полностью поврежденной зоны определяется уравнением

$$z^3 - z^2 f^m - m z f^{m-2} f_1/2 - m f^{m-2} f_2/3 = 0, \tag{3.14}$$

где $z = R^{-\beta m}$.

Следует отметить, что для $n = m = 1$ кубическое уравнение (3.14) имеет один отрицательный действительный корень и два комплексно-сопряженных, что противоречит физическому смыслу автомодельной переменной. Области, которые удается построить на

n	m	β	n	m	β
1	1	-1,5000	6	0,7n	-1,1495
2	0,7n	-1,2303	7	0,7n	-1,1455
3	0,7n	-1,1830	8	0,7n	-1,1425
4	0,7n	-1,1648	9	0,7n	-1,1405
5	0,7n	-1,1553	10	0,7n	-1,1390

основе двучленного и трехчленного разложений для параметра сплошности, существенно различаются (характерный линейный размер $R(0)$ отличается почти в два раза), что является еще одним доказательством утверждения $\beta \neq -1/(n+1)$.

Собственное число β определяется из условия “сходимости” областей полностью поврежденного материала, полученных на основе двучленного, трехчленного и четырехчленного разложений для параметра сплошности. Найденные на основе численного анализа системы (3.13) собственные значения β для различных значений материальных констант n и m , приводящие к “сходящимся” областям полностью поврежденного материала, приведены в таблице. Конфигурации областей полностью поврежденного материала для найденных значений β представлены на рис. 1–4 ($X_1 = x_1 \tilde{C}^{1/\beta} (At)^{1/(\beta m)}$; $X_2 = x_2 \tilde{C}^{1/\beta} (At)^{1/(\beta m)}$; x_1, x_2 — координаты декартовой системы с центром в вершине трещины).

4. Оценка скорости роста трещины. Возвращаясь к размерным переменным, можно оценить размеры области полностью поврежденного материала $r = R(0) \tilde{C}^{-1/\beta} (At)^{-1/(\beta m)}$. Тогда выражение для скорости роста трещины принимает следующий вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\beta m} R(0) \tilde{C}^{-1/\beta} A^{-1/(\beta m)} t^{-(1+1/(\beta m))},$$

т. е. в начальный момент времени скорость роста трещины стремится к бесконечности, что соответствует мгновенному старту трещины, а с течением времени уменьшается и в пределе ($t \rightarrow \infty$) стремится к нулю.

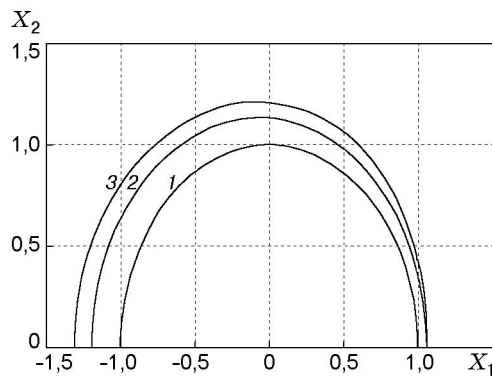


Рис. 1

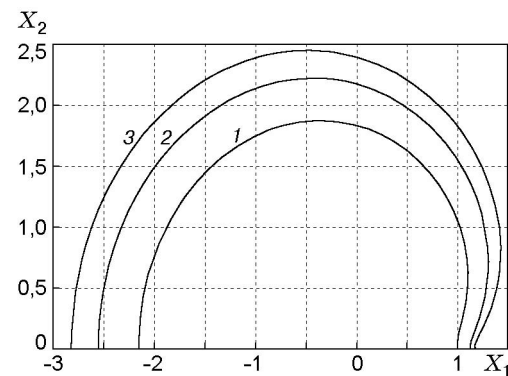


Рис. 2

Рис. 1. Геометрия области полностью поврежденного материала при $n = m = 1$: 1 — граница области, определяемой двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 — граница области, определяемой трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 3 — граница области, определяемой четырехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

Рис. 2. Геометрия области полностью поврежденного материала при $n = 3$, $m = 0,7n$ (обозначения те же, что на рис. 1)

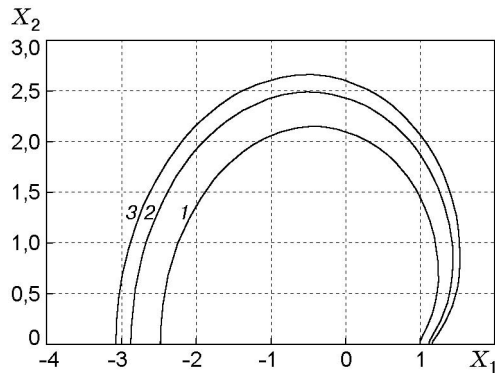


Рис. 3

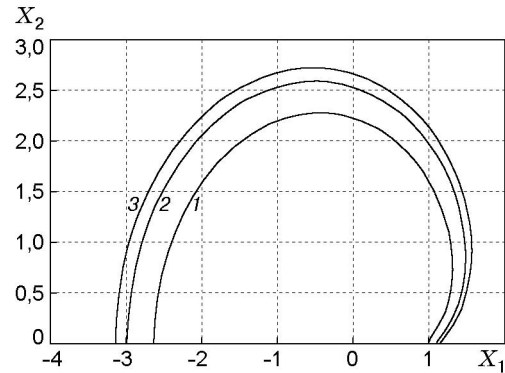


Рис. 4

Рис. 3. Геометрия области полностью поврежденного материала при $n = 5$, $m = 0,7n$ (обозначения те же, что на рис. 1)

Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала при $n = 7$, $m = 0,7n$ (обозначения те же, что на рис. 1)

Заключение. Установлена асимптотика дальнего поля напряжений в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности, определяющая конфигурацию области полностью поврежденного материала.

Построены асимптотические разложения по собственным функциям компонент тензора эффективных напряжений и параметра сплошности и определена конфигурация поврежденной зоны для различных показателей степеней кинетического уравнения накопления повреждений и степенного закона ползучести в связанной постановке (ползучесть — поврежденность).

Дана оценка скорости роста трещины. Показано, что в начальный момент времени скорость роста трещины стремится к бесконечности, что соответствует мгновенному старту трещины, а с течением времени уменьшается и в пределе стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // Физ.-хим. механика материалов. 1992. Т. 2, № 1. С. 5–11.
2. Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 160–166.
3. Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engng Fracture Mech. 1995. V. 50, N 1. P. 131–141.
4. Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Intern. J. Fracture. 2001. V. 108. P. 383–395.
5. Lee S. B., Lu M., Kim J. Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Pt 1. Small damage region around the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34, N 24. P. 3163–3178.
6. Lee S. B., Lu M., Kim J. Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Pt 2. Large damage region around the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34, N 10. P. 1183–1197.

7. **Jin Z. H., Batra R. C.** Crack shielding and material deterioration in damaged materials: an antiplane shear fracture problem // Arch. Appl. Mech. 1998. N 68. P. 247–258.
8. **Wang T., Kishimoto K.** Higher order fields for damaged nonlinear antiplane shear notch, crack and inclusion problems // Engng J. Mech. A. Solids. 1999. N 18. P. 963–986.
9. **Murakami S., Hirano T., Liu Y.** Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 43. P. 6203–6220.
10. **Степанова Л. В., Федина М. Е.** Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (связка “ползучесть — поврежденность”) // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2000. № 4. С. 128–145.
11. **Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.** Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2001. С. 435–539.
12. **Riedel H.** Fracture at high temperature. Berlin: Springer Verlag, 1987.
13. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1986. V. 16. P. 1–12.
14. **Hui C. Y., Riedel H.** The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions // Intern. J. Fracture. 1981. V. 17. P. 409–425.

*Поступила в редакцию 6/VIII 2001 г.,
в окончательном варианте — 26/II 2002 г.*
