ЛИТЕРАТУРА

1. **Авалиани Д. И., Кутателадзе С. С.** Взаимодействие света с турбулентным потоком жидкости.— ПМТФ, 1973, № 4.
2. **Кутателадзе С. С., Авалиани Д. И.** Ослабление луча света на турбулентных пульсациях.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 5.
3. **Кутателадзе С. С., Авалиани Д. И.** Прохождение света через турбулентную жидкость.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 2.
4. **Авалиани Д. И., Зоидзе Т. Ш.** Рассеяние света на турбулентных пульсациях жидкости.— «Сообщения АН ГССР», 1973, т. 69, № 1.
5. **Татарский В. И.** Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. М., Изд-во АН СССР, 1959.
6. **Хинце.** Турбулентность, ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
8. **Хюлст.** Рассеяние света малыми частицами. М., ИЛ, 1961.
9. **Фейдж.** Изучение потока в пограничном слое с помощью гидродинамического микроскопа.— В кн.: Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи. М.— Л., Госэнергоиздат, 1960.
10. **Орлов В. В.** Экспериментальное изучение пристенной турбулентности в канале.— ПМТФ, 1964, № 4.
11. **Струминский В. В., Филиппов В. М.** Экспериментальные исследования явлений рассеяния света в ламинарных и турбулентных потоках жидкости.— «Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1962, № 6.

УДК 532.529 + 532.52

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНСЗВУКОВОГО ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

А. В. Калинин

(*Москва*)

В рамках двухжидкостной гидродинамической модели рассмотрен вопрос о характере особой точки и устойчивости одномерного трансзвукового течения парокапельной смеси в канале переменного сечения.

Показано, что в случае не слишком большого содержания конденсированной фазы особая точка при любых отставаниях капель сохраняет характер седла, присущий гомогенному газовому течению, смещаясь лишь в расширяющуюся часть канала. В этом случае переход дозвукового двухфазного течения в сверхзвуковое устойчив, причем преобладание агломерации капель над дроблением и положительная кривизна профиля канала являются стабилизирующими факторами.

Для течений с более высоким содержанием конденсированной фазы седловой характер особенности возможен лишь при не слишком большом отставании капель. В противном случае точка, где достигается скорость звука, утрачивает характер седла.

В работах [1, 2] предложены физическая модель и замкнутая система уравнений гидромеханики грубодисперсной парокапельной смеси, учитывающая эффекты относительного движения и тепломассообмена фаз и включающая 7 дифференциальных квазилинейных уравнений первого порядка (уравнения сохранения) и 10 конечных уравнений (4 уравнения состояния, 4 уравнения переноса и 2 замыкающих).

Показано, что все характеристические скорости одномерного неустановившегося течения такого рода двухфазной среды являются вещественными, система уравнений одномерного неустановившегося течения удовлетворяет условиям эволюционности и допускает корректную постановку задачи с начальными данными. С этой точки зрения предложенную модель двухфазной среды можно считать физически разумной.

Две из шести различных характеристических скоростей могут занять знак, проходя через нуль. С существованием обращающихся в нуль характеристических скоростей одномерного неустановившегося течения связано наличие особых точек у системы уравнений соответствующего установившегося течения [3]. Течение в окрестности особой точки назовем трансзвуковым по аналогии с обычной газовой динамикой, хотя физическая природа особенности может быть совсем иной («псевдозвук»). Вопрос о характере особой точки и устойчивости трансзвукового двухфазного потока представляет не только принципиальный интерес, но имеет также важный прикладной аспект в связи, например, с расчетом квазиодномерных течений. Действительно, при численном интегрировании уравнений течения в окрестности особой точки точная интегральная кривая заменяется приближенным решением и возникающая погрешность может рассматриваться в качестве соответствующего возмущения. Необходимо иметь уверенность, что малость этого возмущения гарантирует малость отклонения возмущенного решения (т. е. результата численного интегрирования) от точного при продолжении его за окрестность особенности (вне этой окрестности такая гарантия следует из корректности задачи с начальными данными для рассматриваемой системы уравнений).

Следуя в общих чертах методу исследования устойчивости произвольных установившихся течений в окрестности характеристических поверхностей, развитому в [3], изложим коротко его схему применительно к течению неравновесной двухфазной смеси указанного вида в канале переменного сечения. Предложенная в [2] система уравнений, разрешенная относительно производных, записывается в виде

$$w_1' = \frac{Q_{10}(\varkappa-1)\dfrac{p}{\rho_2^0} - Q_{11}\left(w_2^2 - \dfrac{\rho_1^0}{\rho_1}\dfrac{p}{\rho_2^0}\right)}{\rho_1\left(w_1^2 - \varkappa\dfrac{p}{\rho_1^0}\right)\left(w_2^2 - \dfrac{\rho_1^0}{\rho_1}\dfrac{p}{\rho_2^0}\right)}; \tag{1}$$

$$w_2' = \frac{Q_{11}}{(\varkappa-1)\rho_2\dfrac{p}{\rho_2^0}} + \frac{\rho_1\left(w_1^2 - \varkappa\dfrac{p}{\rho_1^0}\right)}{(\varkappa-1)\rho_2\dfrac{p}{\rho_2^0}}; \tag{2}$$

$$\rho_1' = \frac{Q_1}{w_1} - \frac{\rho_1}{w_1}w_1'; \tag{3}$$

$$\rho_2' = \frac{Q_4}{w_2} - \frac{\rho_2}{w_2}w_2'; \tag{4}$$

$$u_1' = \frac{Q_3}{\rho_1 w_1} - \frac{p}{\rho_1^0 w_1}w_1' - \frac{\rho_2}{\rho_2^0}\frac{p}{\rho_1 w_1}w_2'; \tag{5}$$

$$u_2' = \frac{Q_6}{\rho_2 w_2}; \tag{6}$$

$$n' = \frac{Q_7}{w_2} - \frac{n}{w_2}w_2', \tag{7}$$

где

(8) $$Q_{10} = w_2 Q_5 - (\rho_1^0/\rho_1)(\rho_2/\rho_2^0)\, w_2 Q_2 - (\rho_1^0/\rho_1)(p/\rho_2^0)\, Q_4;$$

(9) $$Q_{11} = (\varkappa - 1) u_1 Q_1 - W_1 Q_2 + (\varkappa - 1) Q_3;$$

$Q_i (i = 1, \ldots, 7)$ — источниковые члены, зависящие от вида уравнений переноса и скорости дробления (агломерации) капель.

Из (1)—(7) следует, что в системе уравнений квазиодномерного установившегося течения, разрешенной относительно производных

$$\chi_i' = F_i(\chi_m, y, y')\begin{matrix} i = 1, \ldots, 7 \\ m = 1, \ldots, 17, \end{matrix}$$

особенность содержится существенно лишь в уравнении

$$w_1' = \Omega/\varphi\psi,$$

где

(10) $$\Omega = [(\varkappa - 1)/\rho_1](p/\rho_2^0)\, Q_{10} - (\psi/\rho_1)\, Q_{11};$$

(11) $$\varphi = w_1^2 = \varkappa p/\rho_1^0;$$

(12) $$\psi = w_2^2 - (\rho_1^0/\rho_1)\, p/\rho_2^0,$$

прочие же производные выражаются через w_1' регулярным образом.

Оставляя в стороне вопрос о природе характеристической скорости $\xi_1 = w_2 - [(\rho_1^0/\rho_1)\, p/\rho_2^0]^{1/2}$, обратимся к рассмотрению течения в окрестности особенности $\psi = 0$ (т. е. $\xi_1 = 0$).

От пространства физических переменных $\{\chi_m, x\}$, $m = 1, \ldots, 17$ можно путем невырожденной замены $x = x(\chi_m, \Omega, \psi)$, $\rho_2 = \rho_2(\chi_m, \Omega, \psi)$ перейти к пространству $\{\chi_m, \Omega, \psi\}$, $m \neq k$, $\chi_k = \rho_2$. Непрерывный переход через особую точку $\psi = 0$ возможен лишь в том случае, если одновременно обращается в нуль Ω. Условия $\psi = 0$, $\Omega = 0$, рассматриваемые совместно, определяют в 18-мерном пространстве переменных $\{\chi_m, \Omega, \psi\}$ 16-мерную поверхность особых точек уравнений квазиодномерного установившегося течения. Интегральная кривая этой системы, проходящая через изолированную особую точку, в малой окрестности этой точки должна, следовательно, принадлежать дополнению поверхности особых точек до полного пространства, т. е. быть двумерной. Так как точка $\Omega = 0$, $\psi = 0$ принадлежит интегральной кривой, то в малой окрестности особой точки интегральная кривая, описывающая непрерывное течение, оказывается лежащей в плоскости $\{\Omega, \psi\}$. Последнее дает возможность выяснить характер особенности обычным путем.

Рассматривая x как параметр, находим

(13) $$d\Omega/dx = M_1(\chi_m, \chi_m', y, y', y''),\ m = 1, \ldots, 17;$$

(14) $$d\psi/dx = M_2(\chi_m, \chi_m'),\ m = 1, \ldots, 17.$$

Используя (1)—(17), исключаем производные. Поскольку все χ_i' выражаются через $w_1' = \Omega/\varphi\psi$, то

(15) $$d\Omega/dx = N_1(\Omega/\varphi\psi, \chi_m, y, y', y''),$$

(16) $$d\psi/dx = N_2(\Omega/\varphi\psi, \chi_m).$$

Отсюда

$$d\Omega/d\psi = L_1(\Omega, \psi)/L_2(\Omega, \psi) \tag{17}$$

и характер особенности определяется (как обычно) коэффициентами линейного разложения L_1, L_2, по Ω, ψ в окрестности особой точки, т. е. собственными числами матрицы $\|a_{ij}\|$, i, j = 1,2, где

$$a_{11} = (\partial L_1/\partial\Omega)_0;\ a_{21} = (\partial L_2/\partial\Omega)_0;\ a_{12} = (\partial L_1/\partial\psi)_0;\ a_{22} = (\partial L_2/\partial\psi)_0.$$

Все вышесказанное можно переформулировать для особой точки $\varphi = 0$ ($\xi_2 = 0$).

Рассматривая течение в окрестности $\psi = 0$, примем во внимание следующие обстоятельства: ρ_1^0/ρ_2^0 является малым параметром и точка $\psi = w_2^2 - (\rho_1^0/\rho_1)\,p/\rho_2^0 = 0$ лежит в окрестности бесконечно удаленной точки ($x = -\infty$, $w_2 = 0$), где течение слабо зависит от профиля канала (приближенно-конический сток); отклонение двухфазной смеси от равновесия при этом достаточно невелико и можно использовать линейные уравнения переноса; физическая плотность газовой фазы ρ_1^0 меняется слабо, и газовую фазу, подобно жидкой, можно считать несжимаемой; дроблением и агломерацией капель можно пренебрегать.

С учетом сделанных замечаний

$$Q_1 = j - g,\ Q_2 = f,\ Q_3 = q,$$

$$Q_4 = g - j,\ Q_5 = -f,\ Q_6 = -q,\ Q_7 = 0,$$

$$q = 2\pi k_1 n\delta(T_2 - T_1),\ f = 6\pi\eta_1 n\delta(w_2 - w_1),$$

$$j = 2\pi\rho_1^0 D_1 n\delta U_+\left[\frac{p_{eq}(T_2) - p}{p}\right],$$

$$g = 2\pi\rho_1^0 D_1 n\delta\,\frac{p_{eq}(T_1)}{p}\,U_+\left[\frac{p - p_{eq}(T_1)}{p}\right].$$

Считая теплофизические свойства газа и жидкости постоянными, имеем в окрестности $\psi = 0$

$$\begin{gathered}\frac{d\Omega}{dx} = \frac{d\rho_2}{dx}\,[\Omega_j j_{\rho_2} + \Omega_f f_{\rho_2}] + \frac{dw_1}{dx}\,[\Omega_{w_1} + \Omega_f f_{w_1}] + \\ + \frac{dw_2}{dx}\,[\Omega_{w_2} + \Omega_f f_{w_2}] + \frac{dp}{dx}\,[\Omega_p + \Omega_j j_p] + \frac{d\rho_1}{dx}\,\Omega_{\rho_1} + \frac{du_2}{dx}\,\Omega_j j_{u_2} + \\ + \frac{4(\varkappa - 1)}{x^2}\,\frac{\rho_2}{\rho_2^0}\,\frac{p}{\rho_1}\,w_2,\end{gathered} \tag{18}$$

где (нижними индексами снабжены соответствующие частные производные)

$$\Omega_j = \frac{\varkappa - 1}{\rho_1}\,\frac{p}{\rho_2^0}\,w_2(w_2 - w_1);\ \Omega_f = -\frac{\varkappa - 1}{\rho_1}\,\frac{p}{\rho_2^0}\,w_2;$$

$$\Omega_{w_2} = \frac{\varkappa - 1}{\rho_1}\,\frac{p}{\rho_2^0}\left(2jw_2 - jw_1 - \frac{\rho_1^0}{\rho_1}\,f\right) - 2\,\frac{w_2}{\rho_1}\,Q_{11};$$

$$\Omega_{w_1} = -\frac{\varkappa-1}{\rho_1}\frac{p}{\rho_2^0} j w_2; \ \Omega_p = \frac{\rho_1^0}{\rho_1^2}\frac{1}{\rho_2^0} Q_{11} + \frac{\varkappa-1}{\rho_1}\frac{1}{\rho_2^0} w_2 Q_5;$$

$$\Omega_{\rho_1} = -\frac{\rho_1^0}{\rho_1^3}\frac{p}{\rho_2^0} Q_{11} - \frac{\varkappa-1}{\rho_1^2}\frac{p}{\rho_2^0} Q_{10};$$

$$j_{\rho_2} = \frac{1}{3}\frac{j}{\rho_2}; \ j_p = \frac{j}{p}\frac{p_{eq2}}{p_{eq2}-p}; \ j_{u_2} = \frac{r}{\varkappa-1}\frac{j}{u_1 u_2}\frac{p_{eq2}}{p_{eq2}-p}\frac{T_1}{T_2};$$

$$f_{\rho_2} = \frac{1}{3}\frac{f}{\rho_2}; \ f_{w_2} = \frac{f}{w_2-w_1}; \ f_{w_1} = -\frac{f}{w_2-w_1}.$$

Исключаем из (18) производные и, пренебрегая членами $0(\rho_2/\rho_2^0)$, получаем

(19)
$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\Omega}{\psi}\left[-\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0}{\rho_2}\frac{w_2}{p} Q_{11} + \frac{1}{\rho_2}(5w_2-2w_1) \times \right.$$
$$\left.\times\left(j - \frac{f}{w_2-w_1}\right)\right] + \left[-\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p}\frac{Q_{11}^2}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}(5w_2-2w_1) \times \right.$$
$$\left.\times\left(j - \frac{f}{w_2-w_1}\right)\frac{Q_{11}^2}{\rho_1}\right].$$

Подсчитаем теперь

$$\frac{d\psi}{dx} = 2w_2\frac{dw_2}{dx} - \frac{\rho_1^0}{\rho_1}\frac{1}{\rho_2^0}\frac{dp}{dx} + \frac{\rho_1^0}{\rho_1^2}\frac{p}{\rho_2^0}\frac{d\rho_1}{dx}.$$

Исключая производные, получаем с учетом лишь доминирующих по ρ_2/ρ_2^0 членов

(20)
$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\Omega}{\psi}\left[\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p}\rho_1\right] + \left[\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p} Q_{11}\right].$$

Из (19), (20) следует, что в окрестности $\psi = 0$, $\Omega = 0$

$$\frac{d\Omega}{d\psi} = \frac{a_{11}\Omega + a_{12}\psi}{a_{21}\Omega + a_{22}\psi},$$

где

$$a_{11} = -\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p} Q_{11} + \frac{1}{\rho_2}(5w_2-2w_1)\left(j - \frac{f}{w_2-w_1}\right);$$

$$a_{12} = -\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p}\frac{Q_{11}^2}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}(5w_2-2w_1) \times$$
$$\times\left(j - \frac{f}{w_2-w_1}\right)\frac{Q_{11}}{\rho_1};$$

$$a_{21} = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p}\rho_1; \quad a_{22} = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{\rho_2^0 w_2}{\rho_2 p} Q_{11}.$$

Поскольку

$$\det \|a_{ij}\| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вещественные корни, один из которых $\lambda_1 = 0$. Устойчивость течения в окрестности $\Omega = 0$, $\psi = 0$ определяется знаком

$$\lambda_2 = (1/2)\ \mathrm{Sp}\ \|a_{ij}\| = (1/2)(a_{11} + a_{22}) =$$
$$= (1/2\rho_2)(5w_2 - 2w_1)[j - f/(w_2 - w_1)].$$

Поскольку $f/(w_2 - w_1) > 0$, при отсутствии фазовых превращений $\lambda_2 < 0$ для $w_2 > (2/5)w_1$ и переход двухфазного течения через фронт устойчив, хотя асимптотической устойчивости нет.

Испарение оказывается дестабилизирующим фактором, однако простая оценка, следующая из $\mathrm{Sc} \approx 1$, $f/(w_2 - w_1) = 6\pi n\delta\eta_1$, $j = 2\pi n\delta\eta_1 \times \times (p_{eq2} - p)/p$ показывает, что

$$j - f/(w_2 - w_1) > 0$$

лишь при $(p_{eq2} - p)/p > 3$, т. е. при очень значительном отклонении от равновесия. Таким образом, рассматриваемые двухфазные течения устойчивы в окрестности фронта псевдозвуковой волны (особая точка $\xi_1 = 0$ системы уравнений квазиодномерного установившегося течения) при коэффициенте скольжения $\nu = (w_1 - w_2)/w_1 < 3/5$. Это условие, очевидно, реализуется в окрестности начальной точки.

Обратимся теперь к двухфазному течению в окрестности особой точки $\varphi = 0$ ($\xi_2 = 0$). Теплофизические свойства по-прежнему считаем постоянными, однако неизменность (пространственная однородность) физической плотности газовой фазы ρ_1^0 и численной концентрации капель n на этот раз не предполагается. Используются полные (нелинейные) уравнения переноса

$$q = 2\pi k_1 n\delta(1 + (3/10)\ \mathrm{Pr}^{1/3}\ \mathrm{Re}^{1/2})(T_2 - T_1); \tag{21}$$

$$f = 6\pi\eta_1 n\delta(1 + (3/16)\ \mathrm{Re})(w_2 - w_1); \tag{22}$$

$$j = 2\pi\rho_0^1 D_1 n\delta\left(1 + \frac{3}{10}\mathrm{Sc}^{1/3}\,\mathrm{Re}^{1/2}\right)U_+\left[\frac{p_{eq}(T_2) - p}{p}\right]; \tag{23}$$

$$g = 2\pi\rho_1^0 D_1 n\delta\left(1 + \frac{3}{10}\mathrm{Sc}^{1/3}\mathrm{Re}^{1/2}\right)\frac{p_{eq}(T_1)}{p}\,U_+\left[\frac{p - p_{eq}(T_1)}{p}\right]. \tag{24}$$

Кроме того, принимается, что в трансзвуковом двухфазном потоке

$$w_2^2 \gg \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\frac{p}{\rho_1} \quad \text{и} \quad \psi \approx w_2^2.$$

В общем случае, т. е. с учетом всех необратимых процессов, происходящих в двухфазной смеси, выражение для коэффициентов разложения $d\Omega/dx$ в окрестности звуковой поверхности оказывается очень громоздким. Уже довольно простая оценка, однако, показывает, что наиболее важную роль в течениях грубодисперсной двухфазной среды должна играть кинематическая неравновесность (отставание частиц, если говорить о разгонном течении). Полагая, например, что (по-видимому, вполне разумные ограничения)

$$\mathrm{Re} \geqslant 1,\ (p_{eq2} - p)/p \leqslant 1/2,\ (p - p_{eq1})/p \leqslant 1/2,$$

находим из принятых уравнений переноса (21)—(24), что

$$j \leqslant 0{,}18f/(w_2 - w_1),\ g \leqslant 0{,}09f/(w_2 - w_1),$$

т. е. подтверждение сравнительно второстепенной роли, которую в рассматриваемых течениях играет массоперенос.

С другой стороны, принимая $(T_2 - T_1)/T_1 \leqslant 1/2$, получаем с учетом $\mathrm{Pr} = \eta_1 c_{1p}/k_1 \approx 1$ следующую оценку:

$$q = \pi n\delta k_1 \frac{10 + 3\mathrm{Re}^{1/2}}{5}(T_2 - T_1) \leqslant \pi n\delta\eta_1 \frac{10 + 3\mathrm{Re}^{1/2}}{10} \times$$
$$\times \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{R}{M}T_1 = \pi n\delta\eta_1 \frac{10 + 3\mathrm{Re}}{10}\frac{1}{\varkappa - 1}w_1^2.$$

Отсюда, привлекая (24), находим

$$q \leqslant 0{,}54f(w_2 - w_1).$$

Таким образом, в очерченных границах можно с определенным основанием учитывать на первых порах только кинематическое отставание капель, как это наиболее часто и практикуется в литературе. Вопрос об устойчивости течения в окрестности особой точки $\varphi = 0$, $\Omega = 0$ решается, как это было выше показано для особой точки $\psi = 0$, $\Omega = 0$, видом коэффициентов $a_{ij}(i, j = 1,2)$ дробно-линейной формы $d\Omega/d\varphi = (a_{11}\Omega + a_{12}\varphi)/(a_{21}\Omega + a_{22}\varphi)$. В рассматриваемом случае с учетом только кинематической неравновесности

(25) $$a_{11} = f\left[-\frac{1}{\rho_1}(\varkappa - 1)(1 - \omega)\left(\omega\frac{w_1 - w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1}\frac{3\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}}\right) -\right.$$
$$\left.- \frac{1}{\rho_1}\frac{w_1}{w_1 - w_2}\left(1 + \frac{w_1 - w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1}\frac{3\mathrm{Re}}{16 + 6\mathrm{Re}}\right)\right];$$
$$a_{12} = f^2\left\{\frac{w_1 - w_2}{\rho_1\rho_2}(\varkappa - 1)(1 - \omega)\left[1 + \frac{w_2}{w_1 - w_2}\frac{16 + 6\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}}\right] +\right.$$
$$+ \frac{w_1}{\rho_1\rho_2}\left[1 + \frac{w_2}{w_1 - w_2}\frac{16 + 6\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}} - (\varkappa - 1)(1 - \omega)\omega\right] +$$
$$\left.+ \frac{w_2}{\rho_1\rho_2}(\varkappa - 1)(1 - \omega^2)\right\} - f\frac{y'}{y}\left\{2\frac{w_2^2}{\rho_1}(\varkappa - 1)(1 - \omega) \times\right.$$
$$\times (w_2 - w_1)\left[\frac{16 + 6\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} + 2\omega + \frac{1}{2(\varkappa - 1)}\right] +$$
$$\left.+ 2\frac{w_2^2}{\rho_1}w_1\frac{16 + 6\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}}\right\} + \frac{1}{w_2}\frac{32 + 3\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}}f\Phi + \frac{y''}{y}2w_2^2 u_1 w_1.$$

Подсчитывая $d\varphi/dx$ в окрестности $\varphi = 0$, $\Omega = 0$, находим

$$d\varphi/dx = (\Omega/\varphi)\left[\frac{(\varkappa + 1)w_1}{w_2^2}\right] + (w_1/\rho_1)Q_1 - (\varkappa/\rho_1)Q_2.$$

Таким образом,

$$a_{21} = [(\varkappa + 1)\, w_1]/w_2^2,$$

$$a_{22} = \frac{1}{\rho_1}\left\{ j w_1 + g\,[w_2 - (\varkappa + 1)\, w_1] - \varkappa f - 2\rho_1 w_1^2 \frac{y'}{y} \right\}$$

или с учетом только релаксации скоростей

$$a_{22} = -(\varkappa/\rho_1)\, f - 2\, w_2^2\, y'/y\,.$$

Достаточным условием устойчивости решения в окрестности особой точки $\varphi = 0$, $\Omega = 0$, где

$$d\Omega/d\varphi = (a_{11}\Omega + a_{12}\varphi)/(a_{21}\Omega + a_{22}\varphi),$$

является

$$a_{11} + a_{22} < 0.$$

Особая точка может при этом оказаться устойчивым узлом, устойчивым фокусом и, наконец, седлом, для которого, как показано в [3], устойчивым решением является интегральная кривая, проходящая через особенность с положительным собственным направлением. Но в разгонном течении с отставанием частиц $f < 0$ и, следовательно, $a_{11} > 0$ (25). Поэтому достаточное условие устойчивости может выполняться только при $a_{22} < 0$ (при $y' > 0$), т. е. устойчивый переход двухфазного неравновесного потока с отставанием конденсированных частиц через скорость звука возможен только в расширяющемся канале.

Используя выражения для коэффициентов разложения, получаем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}\, a_{21} = f^2 \left\{ \frac{1}{\rho_1^2}\, \varkappa\, (\varkappa - 1)(1 - \omega) \left[\omega \frac{w_1 - w_2}{w_1} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{w_2}{w_1} \frac{3\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} \right] + \frac{1}{\rho_1^2}\, \varkappa \frac{w_1}{w_1 - w_2} \left[1 + \frac{w_1 - w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} \frac{3\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} \right] -$$

$$- \frac{1}{\rho_1\rho_2} \frac{w_1}{w_2} \frac{w_1 - w_2}{w_2} (\varkappa^2 - 1)(1 - \omega) \left[1 + \frac{w_2}{w_1 - w_2} \frac{16 + 6\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}} \right] -$$

$$- \frac{1}{\rho_1\rho_2} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 (\varkappa + 1) \left[1 + \frac{w_2}{w_1 - w_2} \frac{16 + 6\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}} - (\varkappa - 1)(1 - \omega)\, \omega \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{\rho_1\rho_2} \frac{w_1}{w_2} (\varkappa^2 - 1)(1 - \omega^2) \right\} + f \frac{y'}{y} \left\{ \frac{w_1^2}{\rho_1}\, 2\, (\varkappa - 1)(1 - \omega) \left[\omega \frac{w_1 - w_2}{w_1} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{w_2}{w_1} \frac{3\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} \right] + 2 \frac{w_1^2}{\rho_1} \frac{w_1}{w_1 - w_2} \left[1 + \frac{w_1 - w_2}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} \frac{3\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} \right] +$$

$$+ 2 \frac{w_1 (w_1 - w_2)}{\rho_1} (\varkappa^2 - 1) \left[\frac{16 + 6\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} + 2\omega + \frac{1}{2(\varkappa - 1)} \right] +$$

$$\left. + 2 \frac{w_1^2}{\rho_1} (\varkappa + 1) \frac{16 + 6\mathrm{Re}}{16 + 3\mathrm{Re}} \right\} - (\varkappa + 1) \frac{w_1}{\rho_1} [(\varkappa - 1)(1 - \omega)(w_1 - w_2) + w_1] \times$$

$$\times \frac{32 + 3\mathrm{Re}}{48 + 9\mathrm{Re}}\, f\Phi - \frac{y''}{y}\, 2\, (\varkappa + 1)\, u_1 w_1^2\,,$$

где $\Phi = K_B \exp(-1/\mathrm{W}) - K_c n$ (относительное производство капель).

Анализ коэффициента при f^2 показывает, что в случае $\rho_1/\rho_2 > 3\varkappa/(\varkappa + 1)$ ($\beta < 0{,}419$, если $\varkappa = 5/4$) этот коэффициент отрицателен для любых отставаний конденсированной фазы (любых относительных скольжений $\nu = (w_1 - w_2)/w_1$). В этом случае особенность, реализующаяся в расширяющемся канале, заведомо оказывается седлом, если не принимать во внимание производство капель и влияние кривизны профиля канала. Преобладающая над дроблением агломерация капель ($\Phi < 0$) и положительная кривизна профиля канала ($y'' > 0$) только усиливает это заключение. При более высоких содержаниях конденсированной фазы, преобладающем дроблении капель и отрицательной кривизне профиля седловой характер особенности (т. е. тот же самый, что и в случае чистого газа) возможен лишь при не слишком больших скольжениях. В противном случае $\det \|a_{ij}\| > 0$ и характер особенности оказывается иным: точка перехода через скорость звука утрачивает характер седла.

Поступила 23 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5.
2. **Калинин А. В.** К построению уравнений гидромеханики двухфазной среды с фазовыми переходами.— «Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1969, № 6.
3. **Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.** Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука.— ПММ, 1967, т. 31, № 4.

УДК 539.31

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИКС ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

А. Э. Пуро

(*Таллин*)

При использовании сингулярного приближения [1] для оценки эффективных значений тензора упругости остается невыясненным вопрос о величине тензора упругости тела сравнения. Ниже используется параметрикс [2] для определения первого приближения случайной составляющей тензора деформации и эффективных значений тензора упругости, проводится сравнение с точным решением для частного вида неоднородности и ранее использованным приближением [3].

Эффективное значение тензора упругости λ^0 определяем из

$$\lambda^0\langle\varepsilon\rangle = \langle\lambda\rangle\langle\varepsilon\rangle + \langle\lambda'\varepsilon'\rangle,$$

где $\lambda' = \lambda - \langle\lambda\rangle$; $\varepsilon' = \varepsilon - \langle\varepsilon\rangle$, тензор напряжения удовлетворяет уравнению равновесия

$$\nabla(\lambda\varepsilon) = 0.$$

Решение уравнения будем искать в виде объемного потенциала

$$\varepsilon'' = \int \operatorname{def}_x \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathbf{f}(\mathbf{y})\, dv_y, \tag{1}$$