

ЛИТЕРАТУРА

1. Алферов В. И., Бушмин А. С. Электрический разряд в сверхзвуковом потоке воздуха. — ЖЭТФ, 1963, т. 44, № 6, с. 1776.
2. Баранов В. Ю., Веденов А. А., Низьев В. Г. Электрический разряд в потоке газа. — ТВТ, 1972, № 6, с. 1156.
3. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М., Атомиздат, 1961, с. 62.
4. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. М., «Наука», 1971, с. 74.
5. Смирнов Б. М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М., Атомиздат, 1968, с. 324.

УДК 538.6

ТОРМОЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ПРИ СУЩЕСТВЕННЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Д. А. Бут, Б. А. Случак

(Москва)

Для получения сильных магнитных полей и кратковременных импульсов электроэнергии большой мощности могут использоваться сильные ионизирующие ударные волны. Неподвижный газ перед фронтом волны является холодным и непроводящим, а за фронтом он движется с большой скоростью и благодаря высокой температуре обладает значительной электропроводностью. Взаимодействие высокоскоростного проводящего потока, созданного ионизирующей ударной волной, с магнитным и электрическим полем может использоваться для различных применений, одним из которых является магнитная кумуляция, т. е. преобразование энергии волны в энергию сжатого магнитного поля с ее последующим использованием для различных целей [1]. Большой интерес также представляет использование ионизирующих ударных волн, движущихся в поперечном магнитном поле, для изучения эффекта T -слоя [2].

Теоретическое исследование взаимодействия ионизирующей ударной волны с поперечным магнитным полем при существенных магнитных числах Рейнольдса в наиболее полной форме может проводиться с помощью прямых конечно-разностных методов, предполагающих использование неявных консервативных расчетных схем [3, 4].

Аналитические решения аналогичных задач носят частный характер и позволяют выявить лишь качественные стороны процессов.

Одна из модификаций численных методов решения задачи о взаимодействии ионизирующей ударной волны с магнитным полем основана на выделении среди исходных уравнений гиперболической подсистемы и ее решении методом характеристик совместно с прямым численным решением остальных уравнений. Хотя такой подход накладывает дополнительные ограничения на расчетную модель задачи (отсутствие вязкости др.), он позволяет использовать явную разностную схему для решения нелинейной гиперболической подсистемы, что заметно сокращает время решения задачи на ЭВМ по сравнению с расчетным временем прямых разностных алгоритмов.

1. Расчетная модель и преобразование исходной системы уравнений.

Рассмотрим модель (фиг. 1), подобную токовой решетке, которая использовалась в экспериментах работы [5]. Имеется плоская область, ограниченная высокопроводящей Π -образной рамкой, в которую со скоростью $w(w, 0, 0)$ входит сильная ионизирующая ударная волна. Внутри рамки при $x \geq 0$ имеется внешнее магнитное поле $B_e(0, B_e, 0)$. Проводящий газ за волной движется со скоростью $u(u, 0, 0)$. Благодаря эффекту Фарадея в нем текут токи плотностью $j(0, 0, j)$, замыкающиеся по рамке,

которые усиливают магнитное поле $B(0, B, 0)$ внутри рамки и приводят к торможению газа и ударной волны. Энергия ударной волны переходит в энергию магнитного поля и джоулевы потери в газе.

Описанная модель соответствует также коаксиальному каналу с относительно малым зазором по радиусу (на фиг. 1 по z).

В дальнейшем анализе будем пренебрегать эффектом Холла, так как давление за фронтом волны велико, а также электрическими краевыми эффектами, поскольку электрическая цепь является короткозамкнутой. Эти допущения позволяют использовать при решении задачи одномерное приближение.

Взаимодействие газа за фронтом волны с магнитным полем описывается нестационарными уравнениями движения, неразрывности, энергии, уравнениями Максвелла и законом Ома, которые в безразмерной форме для идеального совершенного газа имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Eu}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -Sj \frac{B}{\rho};$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0;$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{S}{Eu} (\gamma - 1) \frac{j^2}{\sigma};$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \text{Re}_m j;$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t};$$

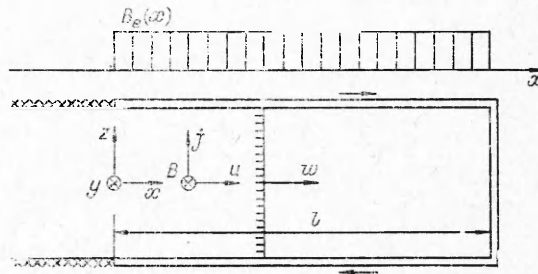
$$(1.6) \quad j = \sigma(uB + E),$$

где p , ρ , σ , γ — давление, плотность, проводимость, показатель адиабаты газа соответственно; E — электрическая напряженность; $Eu = p_0/\rho_0 u_0^2$ — число Эйлера; $S = \sigma_0 B_0^2 l / \rho_0 u_0$ — параметр взаимодействия; $\text{Re}_m = \mu_0 \sigma_0 u_0 l$ — магнитное число Рейнольдса; индексом 0 отмечены базисные значения параметров; время отнесено к l/u_0 , а размеры — к l . Уравнения записаны в лабораторной системе координат. Переход к неинерциальной системе, связанной с фронтом волны, в данном случае усложняет задачу. Проводимость газа является произвольной функцией p и ρ

$$(1.7) \quad \sigma = \sigma(p, \rho).$$

Принципиально метод допускает задание σ в виде $\sigma(p, \rho, j, B)$, когда учитываются неравновесные эффекты и эффект Холла. Использование модели совершенного газа также не является обязательным условием анализа. Для исследования несовершенных газов и газовых композиций необходимо использовать общее уравнение энергии и конкретное уравнение состояния газа.

Уравнения (1.1)–(1.7) должны быть дополнены соотношениями между параметрами на фронте ударной волны. Предполагается, что ионизация газа происходит непосредственно за фронтом и волна является га-



Ф и г. 1

зодинамической. Кроме того, волна должна быть достаточно сильной, чтобы ионизовать газ. Поэтому можно воспользоваться известными соотношениями на фронте в виде

$$(1.8) \quad \rho_w/\rho_{00} \cong (\gamma + 1)/(\gamma - 1);$$

$$(1.9) \quad \frac{p_w}{p_{00}} \cong \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_w^2;$$

$$(1.10) \quad w/u_w \cong (\gamma + 1)/2.$$

Здесь индекс w соответствует параметрам непосредственно за фронтом, индекс 00 относится к параметрам невозмущенного газа, $M_w = w/a_{00}$, где a_{00} — скорость звука в газе перед фронтом волны.

Соотношения (1.8)—(1.10) необходимы для нахождения траектории фронта волны и определения граничных условий на линии фронта.

Основные уравнения (1.1)—(1.6) образуют квазилинейную параболически вырожденную систему [6]. Ее решение должно строиться в области с переменной границей, положение которой определяется интегрированием w по t .

В работе [7] предлагается решать систему, подобную (1.1)—(1.6), путем ее искусственной замены гиперболической формой с последующим применением метода характеристик. Такая замена осуществляется с помощью введения параметрических функций, представляющих некоторые осреднения пространственных производных магнитной индукции. Подобные преобразования могут оказаться эффективными для ряда задач, однако в данном случае они потребуют при реальных расчетах массивных итераций.

Другая возможность использования метода характеристик при решении исходной системы основана на том, что первые четыре уравнения образуют гиперболическую подсистему, решение которой может поочередно объединяться с решениями уравнений (1.5), (1.6).

Заметим, что в задачах с потенциальным электрическим полем, когда вместо уравнений (1.5), (1.6) используется уравнение внешней электрической цепи, также может применяться промежуточное решение гиперболической подсистемы и его последующее сшивание с уравнением внешней цепи [8].

На возможность применения метода характеристик для построения расчетных алгоритмов системы (1.1)—(1.6) путем введения некоторой условной параметрической функции, аналогичной индуктивности, указывалось в [9].

Исследуем вначале гиперболическую подсистему (1.1)—(1.4), описывающую изменение u , p , ρ и B .

Эквивалентная ей характеристическая нормальная форма имеет вид

$$(1.11) \quad dB/dx = \text{Re}_m j \quad \text{вдоль} \quad (dx/dt)_I = \infty;$$

$$(1.12) \quad E u dp/dt - A^2 d\rho/dt = [(\gamma - 1)/\sigma] S j^2 \quad \text{вдоль} \quad (dx/dt)_{II} = u;$$

$$(1.13) \quad E u dp/dt + A \rho du/dt = S j [(\gamma - 1)(j/\sigma) - AB] \quad \text{вдоль} \quad (dx/dt)_{III} = u + A;$$

$$(1.14) \quad E u dp/dt - A \rho du/dt = S j [(\gamma - 1)(j/\sigma) + AB] \quad \text{вдоль} \quad (dx/dt)_{IV} = u - A,$$

где $A = \sqrt{E u \gamma \rho / \rho}$ — безразмерная скорость звука.

Вторая подсистема (1.5), (1.6) с учетом условия $E(0, t) = 0$ сводится к одному уравнению

$$(1.15) \quad j = \sigma \left(u B + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x B dx \right).$$

При постановке граничных условий предполагается, что на входе параметры газа остаются невозмущенными, а магнитная индукция равна индукции внешнего поля B_e . Первое предположение связано со сверхзвуковой скоростью газа за фронтом, второе — определяется выбранной геометрией модели, в которой все токи замыкаются справа от входа и не влияют на $B(0, t)$. Входные значения параметров считаются базисными величинами в уравнениях (1.1)–(1.6). Таким образом, имеем

$$(1.16) \quad u(0, t) = p(0, t) = \rho(0, t) = B(0, t) = 1, \\ E(0, t) = 0.$$

Условие для E согласуется с тем, что при $x < 0$ имеем $E \equiv 0$. Условия для u , p , и ρ не являются строгими, так как на входе существует конечная плотность тока $j_0 = \sigma_0 u_0 B_0$, которая воздействует на поток. Однако в практических случаях величины σ_0 и B_0 малы по сравнению с их конечными значениями и параметр S , рассчитываемый по входным величинам, также мал.

Вторая группа граничных условий определяется на фронте соотношениями (1.8)–(1.10). Для безразмерных величин имеем

$$\rho_w = 1; \quad p_w = u_w^2; \quad w = \frac{\gamma + 1}{2} u_w.$$

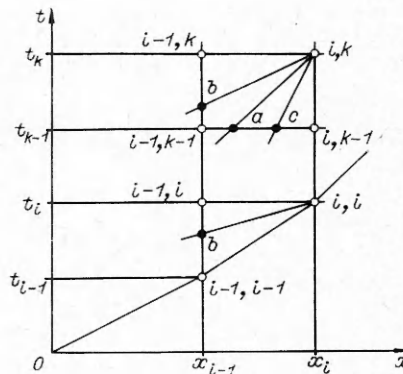
Число Эйлера Eu в данном случае постоянно и равно $(\gamma - 1)/2$.

2. Решение системы уравнений. Численные результаты. Совместное решение уравнений (1.11)–(1.15) с граничными условиями (1.16), (1.17) проводилось следующим образом. Фазовая xt -плоскость разбивалась прямоугольной сеткой на ячейки. Размер ячейки Δt оставался постоянным. Размер Δx_i определялся на каждом временном шаге как $w_i \Delta t$. Таким образом, на фронте волны всегда находились точки (i, i) (фиг. 2). Счет велся «снизу — слева» на xt -плоскости. Подсистема (1.11)–(1.14) решалась численно вдоль характеристических интервалов методом Эйлера, что позволяло находить значения u , p , ρ , B в точке (i, k) по соответствующим значениям величин в трех соседних узловых точках $(i-1, k)$, $(i-1, k-1)$, $(i, k-1)$. Параметры в точках a , b , c , откуда исходят характеристики II, III, IV, пересекающиеся в точке (i, k) , находились линейной интерполяцией соответствующих величин в узловых точках. Проводимость σ в точке (i, k) определялась по уравнению (1.7), а плотность тока — по уравнению (1.15). При этом предварительное значение j оценивалось как

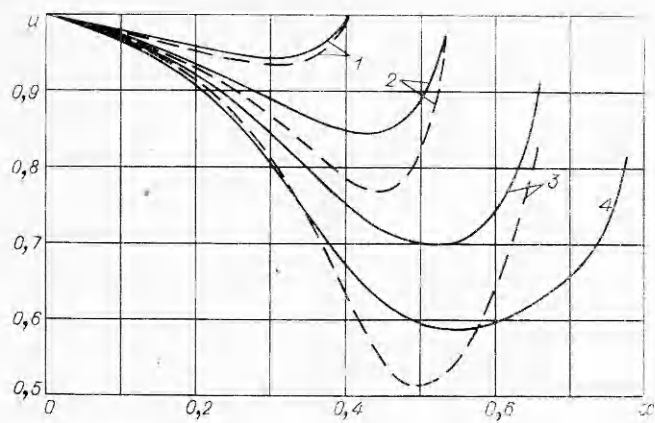
$$j_{ik} = \sigma_{ik} \left(u_{ik} B_{ik} + \frac{\Phi_{ik} - \Phi_{i,k-1}}{\Delta t} \right),$$

где магнитный поток Φ_{ik} находился численным интегрированием B по x . Затем после перехода на $(k+1)$ -й временной слой проводилось уточнение j по формуле

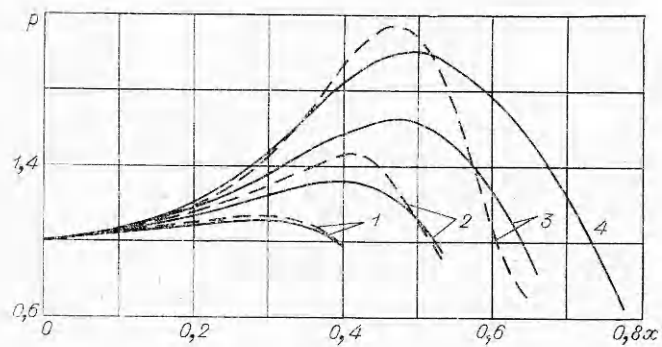
$$j_{ik} = \sigma_{ik} \left(u_{ik} B_{ik} + \frac{\Phi_{i,k+1} - \Phi_{i,k-1}}{2\Delta t} \right).$$



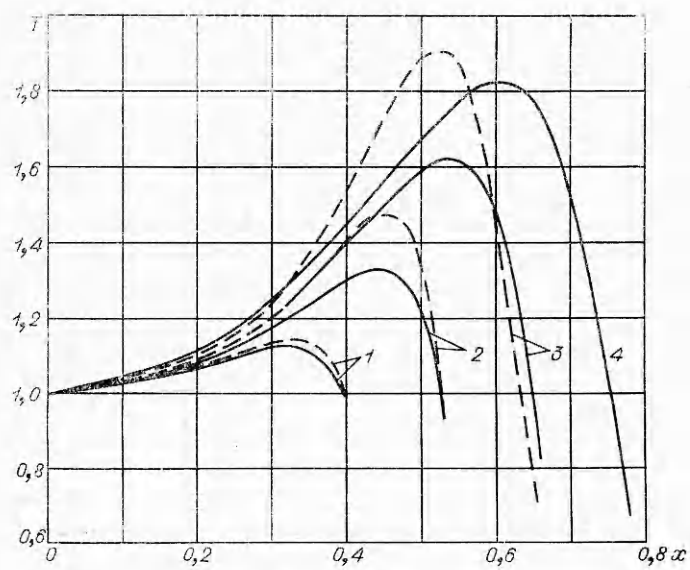
Ф и г. 2



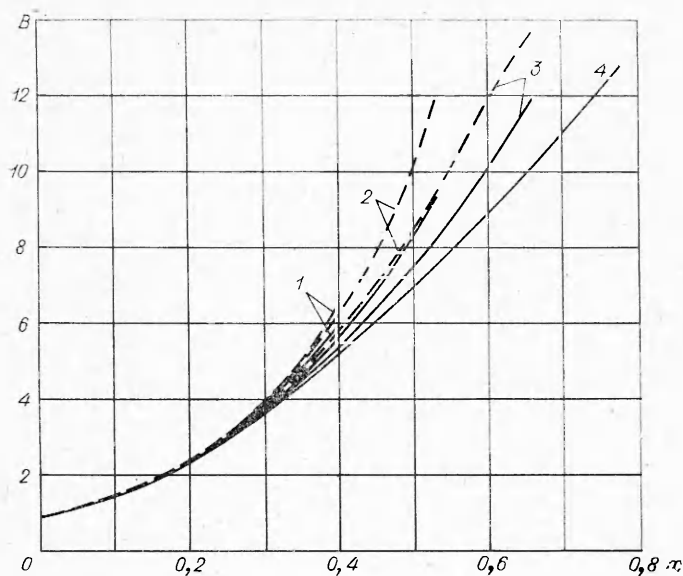
Ф и г. 3



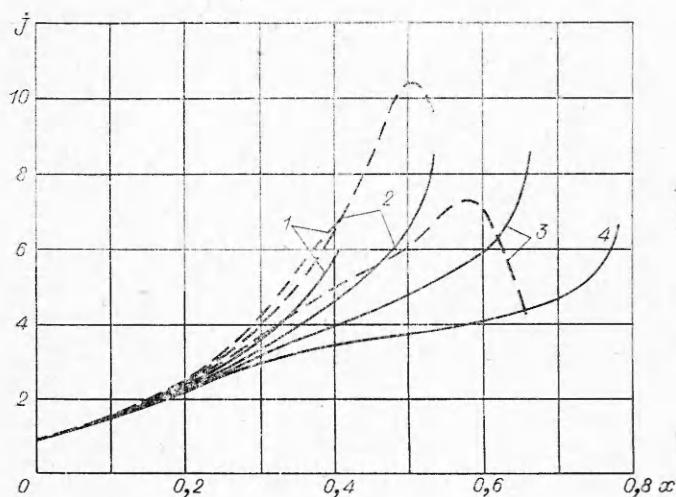
Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6



Ф и г. 7

Алгоритм нахождения параметров на фронте волны несколько иной. Это связано с тем, что характеристики II и IV «не догоняют» фронта и поэтому уравнения (1.12), (1.14) там не могут быть использованы. Вместо них на фронте действуют первые два соотношения (1.17). Третье соотношение (1.17) определяет скорость фронта w и траекторию волны на xt -диаграмме в пределах каждого последующего временного шага.

Расчеты проводились для $\gamma = S/3$, $S = 0,05$, $Re_m = 5$. На фиг. 3—7 показано изменение параметров в газе за фронтом волны для $\sigma = 1$ и $\sigma = T^{3/2}p^{-1/2}$ (сплошные и штриховые кривые соответственно) при различных t (кривые 1 — $t = 0,3$; 2 — $t = 0,4$; 3 — $t = 0,5$; 4 — $t = 0,6$). Температура T определялась как p/ρ . Видно, как волна тормозится магнитным полем и за фронтом образуется отраженная волна сжатия, интен-

сивность которой возрастает во времени. Можно предполагать, что при увеличении Re_m (с сохранением конечных S) эта волна превращается в отраженную ударную волну, поведение которой описано, например, в [10].

Характерным является образование зоны с нарастающим во времени максимумом температуры, перемещающимся вслед за фронтом волны. Зависимость σ от T и p усиливает интенсивность взаимодействия волны с магнитным полем и приводит к формированию за фронтом зоны с максимумом j . Дополнительные расчеты показали, что при $\sigma = T^3 p^{-1/2}$ отмеченные эффекты проявляются еще более резко.

Как и следовало ожидать, усиление магнитного поля перед фронтом волны существенно слабее, чем для тех же Re_m в стационарном течении, когда при правом замыкании электродов поле нарастает по длине как $e^{Re_m x}$. Это объясняется действием вихревого электрического поля, замедляющего рост j во времени.

Точность проведенных расчетов проверялась выборочной подстановкой полученных численных результатов в исходную систему (1.1)–(1.6). При шаге $\Delta t = 0,025$ максимальная погрешность составляла в среднем $\sim 10\%$ от наименьших по абсолютной величине членов. Счет продолжался до тех пор, пока магнитная индукция на фронте не достигала предельных значений. Расчет одного режима занимал 15 мин машинного времени на ЭВМ М-220.

При больших значениях Re_m и S алгоритм может быть легко усовершенствован введением итерационных циклов.

Авторы выражают благодарность С. М.-А. Копееву за ценные замечания по работе.

Поступила 9 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнопфель Г. Сверхсильные магнитные поля. М., «Мир», 1972.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. И. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводящего слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. — Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4.
3. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. Н., Курдюмов С. П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. — Журн. выч. матем. и мат. физики, 1968, т. 8, № 5.
4. Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Попов Ю. П. Взаимодействие ударной волны с магнитным полем в среде с конечной проводимостью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1.
5. Деревянко В. А., Заклязьминский Л. А., Лебедев К. Ф. Экспериментальное исследование отражения ударной волны от токовой решетки. — ПМТФ, 1968, № 4.
6. Баум Ф. А., Каплан О. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. М., Физматгиз, 1958.
7. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости. — ЖЭТФ, 1957, вып. 6, № 12.
8. Бергтнов А. И., Бут Д. А., Ковалев Л. К., Копеев С. М.-А. Нестационарное течение реального проводящего газа в МГД-канале со сплошными электродами. — «Магнитная гидродинамика», 1972, № 2.
9. Bertinov A. I., Bout D. A. Some transient MHD flows with finite magnetic Reynolds numbers. — In: Proc. 13th Symp. Eng. Aspects of MHD. USA, Stanford Univ., 1973.
10. Bout D. A., Gross R. A. Interaction of an ionized shock wave with a transverse magnetic field. — Phys. Fluids, 1970, vol. 13, N 6.