ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 4

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ СЖАТИИ

О. И. Иванищева, В. Г. Трофимов

Воронежский государственный университет,
394000 Воронеж

В трехмерной постановке исследуется осесимметричное выпучивание поверхности трансверсально-изотропного полупространства при его сжатии. Докритические деформации являются малыми и однородными.

Полупространство, трансверсально-изотропное с осью Ox_3, сжимается в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей Ox_1 и Ox_2 нагрузкой интенсивности p. К поверхности полупространства $x_3 = 0$ прикладывается сжимающая нагрузка интенсивности q.

Используем линеаризованные уравнения устойчивости [1]

$$[\sigma^*_{jm} - p_{jn} u^*_{m,n}]_{,j} = 0,$$

где σ^*_{jm}, u^*_m — возмущения напряжений и перемещений. В случае трансверсально-изотропного тела и заданной нагрузки $p_{11} = p$, $p_{22} = p$, $p_{33} = q$ уравнения устойчивости принимают вид

$$(a_{11}-p)u^*_{1,11}+(G_{12}-p)u^*_{1,22}+(G-q)u^*_{1,33}+(G_{12}+a_{12})u^*_{2,12}+(G+a_{13})u^*_{3,13} = 0,$$

$$(G_{12}+a_{12})u^*_{1,12}+(G_{12}-p)u^*_{2,11}+(a_{11}-p)u^*_{2,22}+(G-q)u^*_{2,33}+(G+a_{13})u^*_{3,23} = 0,$$

$$(G+a_{13})u^*_{1,13}+(G+a_{13})u^*_{2,23}+(G-p)(u^*_{3,11}+u^*_{3,22})+(a_{33}-q)u^*_{3,33} = 0. \quad (1)$$

С помощью двумерного преобразования Фурье по координатам x_1 и x_2

$$u_j(\zeta, \eta, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^*_j(x_1, x_2, x_3) \exp(i(\zeta x_1 + \eta x_2))\, dx_1\, dx_2$$

уравнения устойчивости (1) преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений возмущений перемещений $u_1(\zeta, \eta, x_3)$, $u_2(\zeta, \eta, x_3)$ и $u_3(\zeta, \eta, x_3)$:

$$((a_{11}-p)\zeta^2+(G_{12}-p)\eta^2)u_1-(G-q)u_{1,33}+\zeta\eta(G_{12}+a_{12})u_2+i\zeta(G+a_{13})u_{3,3}=0,$$

$$(G_{12}+a_{12})\zeta\eta u_1+((G_{12}-p)\zeta^2+(a_{11}-p)\eta^2)u_2-(G-q)u_{2,33}+i\eta(G+a_{13})u_{3,3} = 0,$$

$$i(G + a_{13})(\zeta u_{1,3} + \eta u_{2,3}) + (G - p)\rho^2 u_3 - (a_{33} - q)u_{3,33} = 0 \quad (2)$$

($\rho^2 = \zeta^2 + \eta^2$). Система уравнений (2) сводится к двум уравнениям (при условии, что $u_2 = (\eta/\zeta)u_1$):

$$\begin{gathered} \rho^2(a_{11} - p)u_1 - (G - q)u_{1,33} + i\zeta(G + a_{13})u_{3,3} = 0, \\ i(G + a_{13})\rho^2(\zeta)^{-1}u_{1,3} + (G - p)\rho^2 u_3 - (a_{33} - q)u_{3,33} = 0. \end{gathered} \quad (3)$$

В свою очередь, система уравнений (3) приводится к одному уравнению четвертого порядка:

$$u_{3,3333} - \rho^2 b_1 u_{3,33} + \rho^4 b_2 u_3 = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$b_1 = ((G-q)(G-p) - (a_{13}+G)^2 + (a_{11}-p)(a_{33}-q))/((G-q)(a_{33}-q));$$

$$b_2 = ((a_{11}-p)(G-p))/((G-q)(a_{33}-q)).$$

Локальное выпучивание поверхности характеризуется затуханием возмущений перемещений с удалением от эпицентра возмущений. Решение дифференциального уравнения (4), затухающее в глубину от поверхности при $x_3 \to -\infty$, имеет вид

$$u_3(\zeta,\eta,x_3) = C_1(\zeta,\eta)\exp(\rho k_1 x_3) + C_2(\zeta,\eta)\exp(\rho k_2 x_3),$$

где $C_1(\zeta,\eta)$ и $C_2(\zeta,\eta)$ — произвольные функции;

$$k_{1,2} = (0{,}5\, b_1 \pm (0{,}25\, b_1^2 - b_2)^{0{,}5})^{0{,}5}.$$

Возмущения перемещений также должны затухать при $|x_1| \to \infty$ и $|x_2| \to \infty$, что соответствует затуханию их изображений при $|\zeta| \to \infty$ и $|\eta| \to \infty$. Чтобы удовлетворить этому условию, положим $C_1(\zeta,\eta) = A_1\exp(-\rho c)$, $C_2(\zeta,\eta) = A_2\exp(-\rho c)$ (A_1, A_2 — произвольные постоянные, c — положительная постоянная). Окончательно изображение возмущения перемещения $u_3(\zeta,\eta,x_3)$ запишем как

$$u_3(\zeta,\eta,x_3) = A_1\exp(\rho(k_1x_3 - c)) + A_2\exp(\rho(k_2x_3 - c)). \qquad (5)$$

Изображения возмущений перемещений $u_1(\zeta,\eta,x_3)$ и $u_2(\zeta,\eta,x_3)$ определяются из системы (3):

$$\begin{aligned} u_1(\zeta,\eta,x_3) &= (i\zeta/\rho)(A_1m_1\exp(\rho(k_1x_3-c)) + A_2m_2\exp(\rho(k_2x_3-c))),\\ u_2(\zeta,\eta,x_3) &= (i\eta/\rho)(A_1m_1\exp(\rho(k_1x_3-c)) + A_2m_2\exp(\rho(k_2x_3-c))). \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь

$$m_1 = k_1(d_1 - d_2^2k_1); \quad m_2 = k_2(d_1 - d_2^2k_2);$$

$$d_1 = ((G-p)(G-q) - (a_{13}+G)^2)/((a_{13}+G)(a_{11}-p));$$

$$d_2 = ((a_{33}-q)(G-q))/((a_{13}+G)(a_{11}-p)).$$

Для вычисления оригиналов возмущений перемещений используем обращение преобразования Фурье:

$$u_j^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_j(\zeta,\eta,x_3)\exp(i(\zeta x_1 + \eta x_2))\,d\zeta\,d\eta.$$

После вычислений получаем

$$u_1^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{A_1m_1x_1}{(r^2+(k_1x_3-c)^2)^{3/2}} + \frac{A_2m_2x_1}{(r^2+(k_2x_3-c)^2)^{3/2}},$$

$$u_2^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{A_1m_1x_2}{(r^2+(k_1x_3-c)^2)^{3/2}} + \frac{A_2m_2x_2}{(r^2+(k_2x_3-c)^2)^{3/2}},$$

$$u_3^*(x_1,x_2,x_3) = \frac{-A_1(k_1x_3-c)}{(r^2+(k_1x_3-c)^2)^{3/2}} + \frac{-A_2(k_2x_3-c)}{(r^2+(k_2x_3-c)^2)^{3/2}},$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 используем граничные условия [1]

$$P_m^* = n_j(\sigma_{jm}^* - p_{jn}u_{m,n}^*(1 - \delta_{mn})),$$

которые на поверхности $x_3 = 0$ при заданной нагрузке $p_{33} = q$ принимают вид

$$P_1^* = G(u_{1,3}^* + u_{3,1}^*) - qu_{1\,3}^*, \quad P_2^* = G(u_{2,3}^* + u_{3,2}^*) - qu_{2,3}^*,$$
$$P_3^* = a_{13}(u_{1,1}^* + u_{2,2}^*) + a_{33}u_{3\,3}^*. \tag{7}$$

Если нагрузка $p_{33} = q$ на поверхности $x_3 = 0$ является «следящей», то возникают возмущения $P_1^* = -qu_{3\,1}^*$, $P_2^* = -qu_{3,2}^*$, $P_3^* = 0$. В случае «мертвой» нагрузки возмущения $P_1^* = P_2^* = P_3^* = 0$. Подвергнем двумерному преобразованию Фурье граничные условия (7). В случае «мертвой» нагрузки имеем

$$(G - q)u_{1,3} - iG\zeta u_3 = 0, \quad (G - q)u_{2,3} - iG\eta_3 u = 0,$$
$$a_{33}u_{3,3} - i\,a_{13}(\zeta u_1 + \eta u_2) = 0. \tag{8}$$

Подставляя изображения возмущений перемещений (5), (6) в граничные условия (8), получаем алгебраическую систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_1 и A_2:

$$A_1((G - q)k_1m_1 - G) + A_2((G - q)k_2m_2 - G) = 0,$$
$$A_1((G - q)k_1m_1 - G) + A_2((G - q)k_2m_2 - G) = 0,$$
$$A_1(a_{13}m_1 + a_{33}k_1) + A_2(a_{13}m_2 + a_{33}k_2) = 0.$$

Так как два первых уравнения совпали, то из условия существования ненулевого решения системы двух линейных уравнений следует характеристическое уравнение, из которого определяются «критические» нагрузки p_0 и q_0:

$$(k_1 - k_2)((G - q)a_{13}m_1m_2 + a_{33}G) + (m_1 - m_2)((G - q)a_{33}k_1k_2 + a_{13}G) = 0.$$

В случае «следящей» нагрузки после аналогичных вычислений имеем характеристическое уравнение

$$(k_1 - k_2)((G - q)a_{13}m_1m_2 + a_{33}(G + q))+$$
$$+(m_1 - m_2)((G - q)a_{33}k_1k_2 + a_{13}(G + q)) = 0.$$

Анализ проведенных вычислений на ЭВМ показал, что:

1) локальное поверхностное выпучивание возможно только в средах с малой сдвиговой жесткостью $G = G_{13} = G_{23}$, так как в других средах критическая нагрузка p_0 имеет очень большое значение и становится нереальной;

2) критическая нагрузка p_0 незначительно увеличивается с ростом отношения модулей упругости $E_0 = E/E^*$, где E — модуль Юнга в плоскости изотропии x_1Ox_2, E^* — модуль Юнга в направлении оси Ox_3;

3) нагрузка q на поверхности $x_3 = 0$ незначительно увеличивает критическую нагрузку p_0 по сравнению со свободной поверхностью;

4) в случае «мертвых» и «следящих» нагрузок q на поверхности $x_3 = 0$ критические нагрузки p_0 одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н.** Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971.

Поступила в редакцию 20/VII 1994 г.