Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 6

УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАДИАЦИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

УДК 533.6.011.72 : 551.52

А. М. Блохин, Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Различные модели радиационной гидродинамики (в том числе и модели, рассмотренные в [1–4]) широко применяются при описании реальных процессов в ряде областей физики (астрофизика, космология, физика плазмы). Обычно математическая модель радиационной гидродинамики представляет собой систему квазилинейных дифференциальных уравнений в форме законов сохранения (т. е. в дивергентном виде), описывающих взаимодействие между сплошной средой и радиацией [1].

В случае, когда сплошная среда неподвижна (именно он рассматривается в данной работе), уравнения радиационной гидродинамики, описывающие распространение радиации в ней, получаются, как известно, из уравнений переноса путем стандартных физических рассуждений [2]. Возникающая при этом проблема замыкания решается с помощью введения фактора Эддингтона (термодинамический подход к введению такого фактора описан в [2–4]).

В настоящей работе, согласно подходу [5], рассматривается проблема устойчивости сильных разрывов (по аналогии с обычной газовой динамикой назовем их ударными волнами) в модели радиационной гидродинамики.

1. Уравнения радиационной гидродинамики и их симметризация. Следуя [1, 2], систему уравнений радиационной гидродинамики запишем в виде законов сохранения «массы» и «импульса» энергии радиации:

$$\partial J/\partial t + \mathrm{div}\mathbf{H} = -\rho_0 æ(J - B); \tag{1.1}$$

$$\partial \mathbf{H}/\partial t + \mathrm{div}\mathcal{K} = -\rho_0 æ\mathbf{H}. \tag{1.2}$$

Здесь J — плотность энергии радиации; $\mathbf{H} = (H^1, H^2, H^3)^* = J\Lambda = J(\Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3)^*$ — поток энергии радиации (звездочка означает транспонирование); $\mathcal{K}$ — радиационный тензор напряжений с компонентами

$$K^{ij} = J\left\{\delta^{ij}\varphi_1/3 + \varphi_2\Lambda^i\Lambda^j\right\}, \quad i,j = 1,2,3; \tag{1.3}$$

$\varphi_1 = 1 - \varphi$; $\varphi_2 = \varphi/\lambda$; $\varphi = \varphi(\lambda) = (2 - \sqrt{4-3\lambda})$ — модифицированный фактор Эддингтона [2]; $\lambda = |\Lambda|^2$; $|\Lambda|^2 = (\Lambda, \Lambda)$; (,) — скалярное произведение векторов; ρ_0 — плотность сплошной среды, через которую распространяется радиация; æ — коэффициент абсорбции [1, 2] (в дальнейшем, не нарушая общности, будем полагать, что $\rho_0 æ \equiv 1$); $B = B(t, \mathbf{x})$ — функция источника; $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$; x^k $(k = 1,2,3)$ — декартовы координаты; скорость света полагается равной единице. В силу этого для параметра λ справедливы неравенства [1, 2]

$$0 \leqslant \lambda < 1. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1), (1.2) можно рассматривать как систему для нахождения компонент, например, вектора неизвестных величин

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} J \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}.$$

Обсудим вопрос о симметризации уравнений (1.1), (1.2), т. е. о возможности записи их в виде симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу) системы (проблема симметризации уравнений механики сплошной среды подробно разбирается в [5, 6]). Известно, что, когда для той или иной системы законов сохранения имеется так называемый дополнительный закон сохранения, проблема симметризации решается достаточно просто (схема симметризации для такого случая подробно изложена в [5, 6]). Будем придерживаться этой схемы и в нашем случае (хотя дополнительный закон сохранения для системы (1.1), (1.2) пока неизвестен). С этой целью предположим, что для уравнений (1.1), (1.2) справедлив энтропийный закон [1–4], т. е. пусть существуют такие гладкие функции $\Phi^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)}(\mathbf{U})$, $r_\alpha = r_\alpha(\mathbf{U})$, $\alpha = 0,3$, $g = g(\mathbf{U})$, что соотношение

$$r_0\left(\frac{\partial J}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{H}\right) + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathcal{K}\right) = -r_0(J-B) - (\mathbf{r},\mathbf{H}) = g = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} \quad (1.5)$$

справедливо для любого гладкого решения системы (1.1), (1.2). Здесь $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^*$; $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)})^*$; функции $\Phi^{(\alpha)}$, r_α ($\alpha = \overline{0,3}$), g гладким образом зависят от компонент вектора $\mathbf{U}$ (функции r_α ($\alpha = \overline{0,3}$) называются еще каноническими переменными или множителями Лагранжа [5, 6]).

Определим производящие функции [5, 6] L, $M^{(k)}$ по формулам

$$L = r_0 J + (\mathbf{r},\mathbf{H}) - \Phi^{(0)}, \quad M^{(k)} = r_0 H^k + \sum_{i=1}^{3} r_i K^{ik} - \Phi^{(k)}, \quad k = 1,2,3. \quad (1.6)$$

В соответствии с высказанными в [1] идеями будем полагать, что

$$L = -\widetilde{L}(G) r_0, \quad M^{(k)} = \widetilde{L}(G) r_k, \quad k = 1,2,3. \quad (1.7)$$

Здесь $\widetilde{L} = \widetilde{L}(G)$ — функция, подлежащая определению; $G = |\mathbf{r}|^2 - r_0^2$. Из (1.5), (1.6) следует

$$dL = J\,dr_0 + (\mathbf{H}, d\mathbf{r}), \quad dM^{(k)} = H^k dr_0 + \sum_{i=1}^{3} K^{ik} dr_i,$$

т. е. с учетом предположения (1.7) имеем

$$J = \partial L/\partial r_0 = 2r_0^2 \widetilde{L}' - \widetilde{L}, \quad \widetilde{L}' = d\widetilde{L}/dG; \quad (1.8)$$

$$H^k = \partial L/\partial r_k = \partial M^{(k)}/\partial r_0 = -2r_0 r_k \widetilde{L}', \quad k = 1,2,3; \quad (1.9)$$

$$K^{ik} = \partial M^{(k)}/\partial r_i = 2r_i r_k \widetilde{L}' + \widetilde{L}\delta^{ik}, \quad i,k = 1,2,3. \quad (1.10)$$

Далее предположим, что

$$r_0 = c_0/d, \quad \mathbf{r} = \mathbf{H}/d, \quad (1.11)$$

где параметры c_0, d удовлетворяют очевидному соотношению

$$J^2\lambda = d^2 G + c_0^2 \quad (\lambda = |\Lambda|^2 = |\mathbf{H}|^2/J^2). \quad (1.12)$$

Сравнивая формулы (1.3) и (1.10), последовательно получим

$$2\widetilde{L}' = \varphi_2/Jd^2. \quad (1.13)$$

$$\tilde{L} = \varphi_1 J/3. \tag{1.14}$$

Из (1.9), (1.11), (1.13) находим

$$c_0 = -J/\varphi_2. \tag{1.15}$$

При таком выборе $\tilde{L}'$, $\tilde{L}$, c_0 соотношение (1.8) выполнено тождественно. В то же время с учетом (1.12) из (1.13)–(1.15) имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\tilde{L}$: $G\tilde{L}' = -2\tilde{L}$, одно из решений которого возьмем в виде $\tilde{L} = 1/G^2$. Поскольку

$$G = |\mathbf{r}|^2 - r_0^2 - -\frac{4}{3}\frac{J^2\varphi_1}{d^2\varphi_2} < 0,$$

то для параметров G, d запишем формулы

$$G = -\sqrt{\frac{3}{J\varphi_1}}, \qquad d = \sqrt{\frac{4J}{\varphi_2}\left(\frac{J\varphi_1}{3}\right)^{3/2}}\,. \tag{1.16}$$

При таком выборе G, d, $\tilde{L}$, r_α $(\alpha = \overline{0,3})$ функции $\Phi^{(\alpha)}$ $(\alpha = \overline{0,3})$, g принимают вид

$$\Phi^{(0)} = \frac{4}{3}Jr_0\varphi_1, \quad \Psi^{(k)} = -\frac{2}{3}Jr_k\varphi_1, \quad k = 1,2,3, \quad g = \frac{J}{d\varphi_2}(\varphi_1 J - B). \tag{1.17}$$

Формулы (1.16), (1.17) завершают описание дополнительного закона сохранения.

Таким образом, определены канонические переменные r_α, $\alpha = \overline{0,3}$, производящие функции L, $M^{(k)}$, $k = 1,2,3$. Тогда, следуя [5, 6], перепишем исходную систему уравнений радиационной гидродинамики (1.1), (1.2) в виде симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу) системы:

$$A^{(0)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} A^{(k)}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^k} + D\mathbf{R} = \mathbf{F}. \tag{1.18}$$

Здесь $A^{(0)} = (L_{r_\alpha r_\beta}) = (4/G^4)\left(a^{(0)}_{\alpha\beta}\right)$; $A^{(k)} = \left(M^{(k)}_{r_\alpha r_\beta}\right) = (4/G^4)\left(a^{(k)}_{\alpha\beta}\right)$ $(\alpha,\beta = \overline{0,3}$, $k = 1,2,3)$; $a^{(0)}_{00} = -3r_0(G + 2r_0^2)$; $a^{(0)}_{ii} = r_0(G - 6r_i^2)$; $a^{(0)}_{0i} = a^{(0)}_{i0} = r_i(G + 6r_0^2)$; $a^{(0)}_{ij} = a^{(0)}_{ji} = -6r_0r_ir_j$; $a^{(k)}_{00} = r_k(G + 6r_0^2)$; $a^{(k)}_{0i} = a^{(k)}_{i0} = r_0(G\delta_{ik} - 6r_kr_i)$; $a^{(k)}_{ij} = a^{(k)}_{ji} = 6r_kr_ir_j - G(r_k\delta_{ij} + r_j\delta_{ik} + r_i\delta_{jk})$ $(i,j = \overline{1,3})$; $\mathbf{R} = (r_0,r_1,r_2,r_3)^*$; $\mathbf{F} = (B,0,0,0)^*$; $D = d\,\mathrm{diag}\,(-\varphi_2,1,1,1)$ — диагональная матрица; $A^{(\alpha)}$ — симметрические матрицы: $A^{(\alpha)} = (A^{(\alpha)})^*$ $(\alpha = \overline{0,3})$; матрица $A^{(0)} > 0$, если выполнено естественное предположение $J > 0$.

Симметрическую систему (1.18) можно также переписать, перейдя снова от вектора $\mathbf{R}$ к вектору $\mathbf{U}$. Действительно, поскольку $\mathbf{L_R} = \mathbf{U}$, $d\mathbf{L_R} = A^{(0)}d\mathbf{R} = d\mathbf{U}$, т. е. $d\mathbf{R} = (A^{(0)})^{-1}d\mathbf{U}$, из (1.18) следует

$$B^{(0)}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} B^{(k)}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^k} + B^{(0)}\mathbf{U} = B^{(0)}\mathbf{F}, \tag{1.19}$$

где $B^{(0)} = B^{(0)}(\mathbf{U}) = m(A^{(0)})^{-1}$; $m = -4r_0G_1/G^2$; $G_1 = 2r_0^2 - G$; $B^{(k)} = B^{(k)}(\mathbf{U}) = (1/m)B^{(0)}A^{(k)}B^{(0)}$ $(k = 1,2,3)$; $B^{(\alpha)}$ $(\alpha = \overline{0,3})$ — симметрические матрицы, причем $B^{(0)} > 0$.

2. Различные формы записи системы уравнений (1.1), (1.2). Условия на

сильном разрыве. Сделаем в системе (1.1), (1.2) замену

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' \mathrm{e}^{-t} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} J' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix}$$

— вектор новых зависимых переменных. Опуская штрихи, для новых переменных получим

$$\partial J/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{H} = \mathrm{e}^t B; \tag{1.1$'$}$$

$$\partial \mathbf{H}/\partial t + \operatorname{div} \mathcal{K} = 0. \tag{1.2$'$}$$

Пусть $B \equiv 0$. Тогда система (1.1$'$), (1.2$'$) имеет постоянное решение

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \hat{J} \\ \hat{\mathbf{H}} \end{pmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}^1, \hat{H}^2, \hat{H}^3)^*$; $\hat{J}$, $\hat{H}^k$ $(k = 1, 2, 3)$ — постоянные. В силу (2.1) исходная система (1.1), (1.2) при $B \equiv 0$ имеет решение

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \mathrm{e}^{-t}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем понадобится недивергентная форма записи исходной системы радиационной гидродинамики. Введем «давление»

$$p = (1/3) J \varphi_1. \tag{2.3}$$

Тогда

$$dp = (1/3)\varphi_1 dJ - (J/\sigma)(\mathbf{\Lambda}, d\mathbf{\Lambda}) \qquad (\sigma = \sqrt{4 - 3\lambda}). \tag{2.4}$$

С учетом (2.3), (2.4) система (1.1$'$), (1.2$'$) примет вид ($B \equiv 0$)

$$\frac{d'' p}{at} + p \operatorname{div} \mathbf{\Lambda} + \frac{1}{\sigma} p \operatorname{div} (\varphi \mathbf{\Lambda}) - \frac{1}{2\sigma} p \varphi_2 (\mathbf{\Lambda}, \nabla) \lambda = 0; \tag{2.5}$$

$$J \frac{d' \mathbf{\Lambda}}{dt} + \nabla p - \mathbf{\Lambda} \operatorname{div} (p \varphi_2 \mathbf{\Lambda}) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $d'/dt = \partial/\partial t + \varphi_2(\mathbf{\Lambda}, \nabla)$; $d''/dt = \partial/\partial t + (1/\sigma)(\mathbf{\Lambda}, \nabla)$.

Выпишем для системы (1.1$'$), (1.2$'$) соотношения на сильном разрыве. Пусть поверхность сильного разрыва имеет уравнение

$$\tilde{f}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}') - x^1 = 0, \quad \mathbf{x}' = (x^2, x^3). \tag{2.7}$$

Тогда соотношения на сильном разрыве (2.7) примут вид [7]

$$f_t[J] - [H^1] + \sum_{k=2}^{3} f_{x^k} [H^k] = 0; \tag{2.8}$$

$$f_t[H^1] - \Big[p + \frac{\varphi_2}{J} (H^1)^2\Big] + \sum_{k=2}^{3} f_{x^k} \Big[\frac{\varphi_2}{J} H^1 H^k\Big] = 0; \tag{2.9}$$

$$f_t[H^i] - \Big[\frac{\varphi_2}{J} H^1 H^i\Big] + f_{x^i}[p] + \sum_{k=2}^{3} f_{x^k} \Big[\frac{\varphi_2}{J} H^i H^k\Big] = 0, \quad i = 2, 3, \tag{2.10}$$

где $[F]$ — скачок величины F:

$$[F] = F^+ - F^-$$

(F^+, F^- — значения величины F справа ($-\tilde{f} \to +0$) и слева ($-\tilde{f} \to -0$) от поверхности разрыва (2.7)). Далее вместо F^+ и F^- используем F и F_∞.

С учетом (2.8)–(2.10) можно описать следующее кусочно-постоянное решение системы (1.1′), (1.2′) при $B \equiv 0$ (кусочно-гладкое решение для системы (1.1), (1.2), см. (2.1), (2.2)): при $x^1 < 0$

$$J = \hat{J}_\infty = \text{const} > 0, \quad H^1 = \hat{H}^1_\infty = \text{const}, \quad H^2 = H^3 = 0$$

(для определенности будем полагать, что $\hat{H}^1_\infty > 0$), при $x^1 > 0$

$$J = \hat{J} = \text{const} > 0, \quad H^1 = \hat{H}^1 = \text{const}, \quad H^2 = H^3 = 0,$$

а при $x^1 = 0$ выполнены равенства (2.8)–(2.10) (при условии, что фронт разрыва неподвижен и описывается уравнением $x^1 = 0$):

$$\hat{H}^1 = \hat{H}^1_\infty (= h) \neq 0; \tag{2.11}$$

$$[\hat{p}] + h^2[\hat{\varphi}_2/\hat{J}] = 0. \tag{2.12}$$

Здесь $[\hat{p}] = \hat{p} - \hat{p}_\infty$; $\hat{p} = (1/3)\hat{J}\hat{\varphi}_1$; $\hat{p}_\infty = (1/3)\hat{J}_\infty\hat{\varphi}_{1\infty}$; $\hat{\varphi}_1 = \hat{\sigma} - 1$; $\hat{\sigma} = \sqrt{4 - 3\hat{\lambda}}$; $\hat{\lambda} = (\hat{\Lambda}^1)^2 = h^2/\hat{J}^2$ и т. д.

По аналогии с обычной газовой динамикой [5, 7] назовем описанный выше стационарный разрыв ударной волной. При этом соотношение (2.12) — аналог адиабаты Гюгонио в обычной газовой динамике. Переписав соотношение (2.12) в виде

$$[\hat{J}(5 - 2\hat{\sigma})] = 0, \tag{2.12′}$$

рассмотрим это равенство как уравнение для нахождения параметра $k = \hat{J}_\infty/\hat{J}$. После несложных выкладок находим корни $k_1 = 1$, $k_2 = 9/(1 + 20\hat{\varphi}_\infty)$. Следовательно, при $1 > \hat{\varphi}_\infty > 2/5$ $(12/25 < \hat{\lambda}_\infty < 1)$ плотность энергии радиации при переходе через фронт ударной волны повышается (поскольку $k_2 < 1$). Это же справедливо и для «давления» p (см. (2.3)). Действительно, функция

$$g(V) = \varphi_2/J = 3V/(2 + \sqrt{4 - 3h^2V^2}) \qquad (V = 1/J)$$

имеет производную $g'(V) > 0$. Поэтому из (2.12) следует $\hat{p} > \hat{p}_\infty$ при $1 > \hat{\varphi}_\infty > 2/5$.

Заметим, что из (2.12′) вытекает соотношение $\hat{\varphi} = (k_2 - 1 + 2k_2\hat{\varphi}_\infty)/2 = (4 - \hat{\varphi}_\infty)/(1 + 20\hat{\varphi}_\infty)$, т. е. при $1 > \hat{\varphi}_\infty > 2/5$

$$1/7 < \hat{\varphi} < 2/5 \quad (9/49 < \hat{\lambda} < 12/25). \tag{2.13}$$

3. Линеаризация уравнений радиационной гидродинамики. Постановка задачи об устойчивости ударных волн. Рассмотрим следующее постоянное решение системы (1.1′), (1.2′) при $B \equiv 0$:

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \hat{J} \\ \hat{H}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\hat{J} = \text{const} > 0$, $\hat{H}^1 = \text{const}$ (будем полагать для определенности, что $\hat{H}^1 > 0$), $\hat{\Lambda}^1 = \hat{H}^1/\hat{J} < 1$). Линеаризуя систему ($1.1'$), ($1.2'$) относительно такого решения, получим линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами (см. систему (1.19)):

$$B^{(0)}(\hat{\mathbf{U}})\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} B^{(k)}(\hat{\mathbf{U}})\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^k} = 0. \tag{3.1}$$

Здесь вектор $\mathbf{U}$ составлен из малых возмущений компонент исходного вектора $\mathbf{U}$ (обозначен той же буквой).

Определим теперь собственные значения матрицы $B^{(1)}(\hat{\mathbf{U}})$, а точнее, $A^{(1)}(\hat{\mathbf{U}})$, поскольку $B^{(1)}(\hat{\mathbf{U}}) = (1/\hat{m})B^{(0)}(\hat{\mathbf{U}})A^{(1)}(\hat{\mathbf{U}})B^{(0)}(\hat{\mathbf{U}})$ и $B^{(0)}(\hat{\mathbf{U}}) > 0$, $\hat{m} = m(\hat{\mathbf{U}}) > 0$ (см. п. **1**). После несложных вычислений получим, что матрица $A^{(1)}(\hat{\mathbf{U}})$ имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{4}{3}\,\frac{\hat{J}\hat{\varphi}_1\hat{r}_1}{\hat{G}^2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{4}{\hat{G}^4}\left\{2\hat{r}_1(\hat{r}_1^2 + 2\hat{r}_0^2) \pm \sqrt{\hat{r}_1^6 + \hat{r}_0^6 + 23\hat{r}_0^2\hat{r}_1^4 + 11\hat{r}_0^4\hat{r}_1^2}\right\}, \tag{3.2}$$

где $\hat{r}_0 = -\hat{J}/(\hat{\varphi}_2\hat{a})$; $\hat{r}_1 = \hat{H}^1/\hat{a}$; $\hat{a} = \sqrt{(4\hat{J}/\hat{\varphi}_2)(\hat{J}\hat{\varphi}_1/3)^{3/2}}$; причем если $\hat{\varphi} > 1/\sqrt{3}$, то $\lambda_{1,2,3,4} > 0$, если $\hat{\varphi} < 1/\sqrt{3}$, то $\lambda_{1,2,3} > 0$, $\lambda_4 < 0$.

Заметим, что система (3.1) может быть переписана в виде (который легко получить путем линеаризации недивергентной системы (2.5), (2.6))

$$\begin{gathered} Lp - c_0\xi_1 p + c_1\{c_2\xi_1 H^1 + \xi_2 H^2 + \xi_3 H^3\} = 0, \\ LH^1 + b_0 Lp + b_1\xi_1 p = 0, \quad LH^2 + \xi_2 p = 0, \quad LH^3 + \xi_3 p = 0. \end{gathered} \tag{3.1$'$}$$

Здесь p — малое возмущение «давления» (см. (2.3));

$$L = \tau + \frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\xi_1; \quad \tau = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, 3); \quad c_0 = \frac{2(\hat{\sigma} - 1)(4 + \hat{\lambda} - 2\hat{\sigma})}{\sqrt{\hat{\lambda}}\,\hat{\sigma}(4 - \hat{\sigma})};$$

$$c_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\hat{\sigma} - 1}{\hat{\sigma}}; \quad c_2 = 2\frac{\hat{\sigma} - 1}{4 - \hat{\sigma}}; \quad b_0 = -\frac{3}{2}\,\frac{\hat{\sigma}(2 - \hat{\sigma})}{\sqrt{\hat{\lambda}}\,(\hat{\sigma} - 1)}; \quad b_1 = 2\,\frac{4 - \hat{\lambda} - 2\hat{\sigma}}{\hat{\lambda}}.$$

Видно, что система ($3.1'$) аналогична системе уравнений акустики в обычной газовой динамике [5, 7]. Как и в газовой динамике, в нашем случае функция p также удовлетворяет волновому уравнению $L^2 p - d_0 L\xi_1 p - c_1\left\{d_1\xi_1^2 p + \xi_2^2 p + \xi_3^2 p\right\} = 0$ ($d_0 = 4(\hat{\sigma} + \hat{\lambda} - 2)/(\sqrt{\hat{\lambda}}\hat{\sigma})$, $d_1 = b_1 c_2$). Последнее уравнение при дополнительном предположении $\hat{\varphi} < 2/5$ (т. е. $\hat{\sigma} > 8/5$) можно переписать в виде

$$\{(\tau')^2 - (\xi_1')^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\}p = 0, \tag{3.3}$$

где новые дифференциальные операторы τ', ξ_1' определяются как $\tau = \hat{p}_0\tau'$, $\xi_1 = \hat{p}_1\xi_1' + \hat{p}_2\tau'$, $\hat{p}_0 = \sqrt{(5\hat{\sigma} - 8)/(6(\hat{\sigma} - 1))}$, $\hat{p}_1 = 1/\sqrt{3}\hat{p}_0$, $\hat{p}_2 = \sqrt{\hat{\lambda}}/(2(\hat{\sigma} - 1)\hat{p}_0)$.

Линеаризуем систему ($1.1'$), ($1.2'$) относительно кусочно-постоянного решения, описанного в п. **2**. В итоге получим математическую постановку задачи об устойчивости ударных волн в исследуемой модели радиационной гидродинамики.

Основная задача I — найти кусочно-гладкие функции, являющиеся решениями системы (3.1) при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^3_+$ и системы

$$B^{(0)}(\hat{\mathbf{U}}_\infty)\,\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} B^{(k)}(\hat{\mathbf{U}}_\infty)\,\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^k} = 0 \tag{3.4}$$

при $t > 0,\ \mathbf{x} \in R^3_-$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\right] F_t = [H^1], \quad \left[\frac{8-5\hat{\sigma}}{4-\hat{\sigma}}\,p\right] = \left[\frac{3\sqrt{\hat{\lambda}}}{4-\hat{\sigma}}\,H^1\right], \quad \left[\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\right] F_{x^k} + \left[\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\,H^k\right] = 0, \quad k = 2,3 \tag{3.5}$$

при $t > 0,\ \mathbf{x}' \in R^2,\ x^1 = 0$ и начальным данным

$$\mathbf{U}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3_\pm, \quad F(0,\mathbf{x}') = F_0(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in R^2 \tag{3.6}$$

при $t = 0$. Здесь $F = \hat{H}^1 \delta f$; $\delta f(t,\mathbf{x}')$ — малое смещение фронта разрыва; $R^3_\pm = \{\mathbf{x} \mid x^1 \lessgtr 0,\ \mathbf{x}' \in R^2\}$;

$$\hat{\mathbf{U}}_\infty = \begin{pmatrix} \hat{J}_\infty \\ \hat{H}^1_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}^1 = \hat{H}^1_\infty \quad (\text{см. соотношение } (2.11));$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_\infty}}, \qquad \hat{\lambda}_\infty = \frac{(\hat{H}^1)^2}{\hat{J}^2_\infty}$$

и т. д.

С учетом формул (3.2) предположим, что выполнено неравенство

$$\hat{\varphi}_\infty > 1/\sqrt{3}. \tag{3.7}$$

Заметим, что тогда заведомо $\hat{\varphi}_\infty > 2/5$, а $\hat{\varphi} < (4\sqrt{3}-1)/(20+\sqrt{3}) < 2/5 < 1/\sqrt{3}$ (см. (2.13)). Таким образом, при выполнении условия (3.7) все собственные числа матрицы $A^{(1)}(\hat{\mathbf{U}}_\infty)$ положительны. Следовательно, система (3.4) не требует граничных условий при $x^1 = 0$. Тогда, не нарушая общности, будем считать, что $\mathbf{U}(t,\mathbf{x}) \equiv 0$ при $x^1 < 0$. Рассуждая аналогично, с учетом неравенства $\hat{\varphi} < 1/\sqrt{3}$ убеждаемся в том, что система (3.1) требует три граничных условия, плюс еще одно граничное условие для нахождения функции $F(t,\mathbf{x}')$. Значит, граничных условий (3.5) столько, сколько нужно для эволюционности разрыва [8], если выполнено условие (3.7), называемое условием эволюционности.

С учетом сделанных замечаний переформулируем основную задачу I (при выполнении условия (3.7)).

Основная задача II — найти решение системы уравнений (3.1) при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^3_+$, удовлетворяющее граничным условиям

$$F_t = \mu p, \quad H^1 + dp = 0, \quad H^{2,3} - (\tilde{\lambda}/\mu) F_{x^{2,3}} = 0 \tag{3.5$'$}$$

при $t > 0,\ \mathbf{x}' \in R^2,\ x^1 = 0$ и начальным данным

$$\mathbf{U}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3_+, \quad F(0,\mathbf{x}') = F_0(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in R^2 \tag{3.6$'$}$$

при $t = 0$. Здесь $\mu = \sqrt{\hat{\lambda}_\infty}(8-5\hat{\sigma})/(3(\sqrt{\hat{\lambda}_\infty} - \sqrt{\hat{\lambda}}))$; $d = (5\hat{\sigma}-8)/3\sqrt{\hat{\lambda}}$; $\tilde{\lambda} = (8-5\hat{\sigma})/6\hat{\varphi}$.

4. Устойчивость ударной волны. Опишем процесс получения априорной оценки решения без потери гладкости для основной задачи II в плоском случае. С учетом замены

(2.1) из этой оценки будет следовать априорная оценка с убыванием для решения смешанной задачи, полученной путем линеаризации исходной системы (1.1), (1.2) в плоском случае (при $B \equiv 0$) относительно описанного кусочно-гладкого решения (см. (2.2)). И наконец, из упомянутой оценки с убыванием будет следовать сходимость решения смешанной задачи для линеаризованной системы (1.1), (1.2) к тривиальному решению в норме $W_2^2(R_+^2)$ при $t \to \infty$.

Для получения априорной оценки решения основной задачи II сконструируем расширенную систему [5] для нахождения вторых производных от компонент решения. Процесс конструирования состоит из двух этапов. На первом этапе с помощью системы (3.1) (в случае плоской симметрии) составим следующую симметрическую t-гиперболическую (по Фридрихсу) систему:

$$B_p^{(0)} \frac{\partial \mathbf{U}_p}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} B_p^{(k)} \frac{\partial \mathbf{U}_p}{\partial x^k} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{U}_p = (\tau^2 \mathbf{U}^*, \tau\xi_1 \mathbf{U}^*, \tau\xi_2 \mathbf{U}^*, \xi_1^2 \mathbf{U}^*, \xi_1\xi_2 \mathbf{U}^*, \xi_2^2 \mathbf{U}^*)^*$; $B_p^{(\alpha)} = \operatorname{block\,diag}(B^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, B^{(\alpha)})$ $(\alpha = \overline{0,2})$ — блочно-диагональные матрицы.

Записывая для симметрической системы (4.1) интеграл энергии в дифференциальной форме [5] и интегрируя его по области R_+^2, получим

$$\frac{d}{dt} I_0(t) - \int\limits_{R^1} (B_p^{(1)} \mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)\Big|_{x^1=0} dx^2 = 0, \tag{4.2}$$

где

$$I_0(t) = \iint\limits_{R_+^2} (B_p^{(0)} \mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) d\mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2); \quad R_+^2 = \{\mathbf{x} \,|\, x^1 > 0,\ x^2 \in R^1\}.$$

При выводе (4.2) полагали, что $|\mathbf{U}_p| \to 0$ при $x^1 \to \infty$ или $|x^2| \to \infty$.

Оценивая второе слагаемое в равенстве (4.2) с помощью граничных условий (3.5$'$) и системы (3.1$'$) (в случае плоской симметрии) при $x^1 = 0$, имеем

$$\frac{d}{dt} I_0(t) - M_1 \int\limits_{R^1} P\Big|_{x^1=0} dx^2 \leqslant 0, \tag{4.3}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная; $P = p_{tt}^2 + p_{tx^1}^2 + p_{tx^2}^2 + p_{x^1x^1}^2 + p_{x^1x^2}^2 + p_{x^2x^2}^2$.

Перейдем ко второму этапу конструирования расширенной системы. Перепишем уравнение (3.3) для случая плоской симметрии:

$$(L_1^2 - L_2^2 - L_3^2)p = 0. \tag{4.4}$$

Здесь $L_1 = \tau'$; $L_2 = \xi_1'$; $L_3 = \xi_2$. Если функция $p(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (4.4), то вектор $\mathbf{W} = (\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{Y}_3^*)^*$ $(\mathbf{Y}_1 = L_1\mathbf{Y},\ \mathbf{Y}_2 = L_2\mathbf{Y},\ \mathbf{Y}_3 = L_3\mathbf{Y},\ \mathbf{Y} = \widetilde{\nabla} p,\ \widetilde{\nabla} = (L_1, L_2, L_3)^*)$ удовлетворяет системе вида [5, 8]

$$\{\hat{A}L_1 - \hat{B}L_2 - \hat{C}L_3\}\mathbf{W} = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{L} & \mathcal{K} & i\mathcal{N} \\ \mathcal{M} & -i\mathcal{N} & \mathcal{K} \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{K} & i\mathcal{N} \\ \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -i\mathcal{N} & \mathcal{M} & -\mathcal{L} \end{pmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -i\mathcal{N} & \mathcal{K} \\ i\mathcal{N} & -\mathcal{M} & \mathcal{L} \\ \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{M} \end{pmatrix};$$

$\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — пока произвольные эрмитовы матрицы порядка 3. Возвращаясь в системе (4.5) к дифференциальным операторам τ, ξ_1, ξ_2, получим

$$\{D\tau - \hat{B}\xi_1 - \hat{p}_1\hat{C}\xi_2\}\mathbf{W} = 0 \quad \left(D = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}(\hat{A} + M\hat{B}), \quad M = \frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_1} = \frac{\sqrt{3\hat{\lambda}}}{2(\hat{\sigma}-1)}(<1)\right). \tag{4.6}$$

Заметим, что справедливы соотношения [5, 8]

$$\hat{A} = T_0^*\{I_2 \times \widetilde{H}\}T_0, \quad \hat{B} = T_0^*\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \widetilde{H}\right\}T_0, \quad \hat{C} = T_0^*\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \widetilde{H}\right\}T_0. \tag{4.7}$$

Здесь

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times I_3; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} - \mathcal{M} & -\mathcal{L} - i\mathcal{N} \\ -\mathcal{L} + i\mathcal{N} & \mathcal{K} + \mathcal{M} \end{pmatrix};$$

$I_2 \times \widetilde{H}$ — кронекерово произведение матриц I_2 и $\widetilde{H}$ и т. д.; I_2 — единичная матрица порядка 2 и т. д. В силу (4.7) имеем

$$D = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0} T_0^* \left\{\begin{pmatrix} 1 & -M \\ -M & 1 \end{pmatrix} \times \widetilde{H}\right\} T_0. \tag{4.8}$$

Чтобы найти для системы (4.6) граничные условия, следуя [5], умножим скалярно систему (3.1′) (в случае плоской симметрии) на вектор $(\tau, -c_1c_2\tau, 0, 0)^*$. Рассматривая полученное выражение при $x^1 = 0$, с помощью граничных условий (3.5′) приходим к соотношению

$$m(L_2^2 + L_3^2)p + nL_2^2 p - \gamma L_1 L_2 p = 0, \quad x^1 = 0, \tag{4.9}$$

где $m = (5\hat{\sigma} - 8)(13 - 7\hat{\sigma})/(27\sqrt{\hat{\lambda}}\hat{\sigma})$; $n = (5\hat{\sigma} - 8)(\hat{\sigma} - 1)/(9\sqrt{\hat{\lambda}}\hat{\sigma})$; $\gamma = (5\hat{\sigma} - 8)/(3\sqrt{3}\hat{\sigma})$.

С учетом (4.4), (4.9) при $x^1 = 0$ в качестве граничных условий для системы (4.6) возьмем выражения [5] $L_1(L_1p) - L_2(L_2p) - L_3(L_3p) + \alpha\{L_1(L_2p) - L_2(L_1p)\} = 0$, $L_3(L_2p) - L_2(L_3p) = 0$, $L_1(L_2p) - ((m+n)/\gamma)\, L_2(L_2p) - (m/\gamma)\, L_3(L_3p) = 0$, которые перепишем в виде

$$A_1\mathbf{Y}_1 + B_1\mathbf{Y}_2 + C_1\mathbf{Y}_3 = 0. \tag{4.10}$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{m+n}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{m}{\gamma} \end{pmatrix};$$

$$\frac{m+n}{\gamma} = \frac{2}{9}(5 - 2\hat{\sigma})\sqrt{\frac{3}{\hat{\lambda}}};$$

$\alpha > 1$ — постоянная. Пусть $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = T_0\mathbf{W}$, где $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{Z}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_3 \\ \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{Z}_k$ $(k = \overline{1,4})$ — векторы размерности 3. Поскольку $\mathbf{Y}_1 = (\sqrt{2}/2)\,(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4)$, $\mathbf{Y}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{Z}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{Z}_3$,

$\mathbf{Y}_3 = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_1)$, то условия (4.10) можно представить так:

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{I}} = G\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}. \tag{4.11}$$

Здесь

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad G_1 = 2(A_1 - C_1)^{-1}B_1; \quad G_2 = (A_1 - C_1)^{-1}(A_1 + C_1).$$

Пусть все собственные числа матрицы G лежат строго в левой полуплоскости, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_j(G) < 0$, $j = \overline{1,6}$. Последнее справедливо, если имеют место неравенства $m > 0$, $n > 0$, которые в силу (2.13) выполняются, так как $8/5 < \hat{\sigma} < 13/7$. Составим теперь матричное уравнение Ляпунова

$$G^*\widetilde{H} + \widetilde{H}G = -G_0 \tag{4.12}$$

для нахождения матрицы $\widetilde{H}$, которая фигурирует в формулах (4.7). Как известно [9], уравнение (4.12) имеет единственное решение

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1 & \widetilde{H}_2 \\ \widetilde{H}_2^* & \widetilde{H}_3 \end{pmatrix} > 0, \quad \widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_1^*, \quad \widetilde{H}_3 = \widetilde{H}_3^*$$

при любой вещественной симметрической положительно определенной матрице G_0. При этом матрица $\widetilde{H}$ тоже вещественная симметрическая, а матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ находятся следующим образом:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_3), \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_3 - \widetilde{H}_1), \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\widetilde{H}_2 + \widetilde{H}_2^*), \quad i\mathcal{N} = \frac{1}{2}(\widetilde{H}_2^* - \widetilde{H}_2).$$

Поскольку $\widetilde{H} > 0$, то в силу (4.8) $D > 0$.

Выпишем для системы (4.6) интеграл энергии в дифференциальной форме и проинтегрируем полученное тождество по области R^2_+, полагая при этом, что $|\mathbf{W}| \to 0$ при $x^1 \to \infty$ или $|x^2| \to \infty$. В итоге получим

$$\frac{d}{dt}I_1(t) + \int\limits_{R^1} (\hat{B}\mathbf{W}, \mathbf{W})\Big|_{x^1=0} dx^2 = 0 \quad \Big(I_1(t) = \iint\limits_{R^2_+} (D\mathbf{W}, \mathbf{W})d\mathbf{x}\Big). \tag{4.13}$$

Согласно (4.7) и (4.11), квадратичная форма

$$(\hat{B}\mathbf{W}, \mathbf{W})\Big|_{x^1=0} = (G_0\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{II}}) > 0. \tag{4.14}$$

Поскольку

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{II}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -\mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_{\mathrm{I}} + \mathbf{Y}_3 \end{pmatrix},$$

то

$$(G_0\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{II}})\Big|_{x^1=0} > M_2\big\{(L_1^2p)^2 + (L_1L_2p)^2 + (L_1L_3p)^2 +$$
$$+ (L_2^2p)^2 + (L_2L_3p)^2 + (L_3^2p)^2\big\}\Big|_{x^1=0} > \widetilde{M}_2 P\Big|_{x^1=0}, \tag{4.15}$$

где M_2, $\widetilde{M}_2 > 0$ — постоянные, определяемые нормой матрицы G_0. С учетом (4.14), (4.15) из (4.13) имеем

$$\frac{d}{dt}\,I_1(t) + \widetilde{M}_2 \int\limits_{R^1} P\Big|_{x^1=0} dx^2 < 0. \tag{4.16}$$

Складывая неравенства (4.3) и (4.16) и учитывая, что за счет выбора матрицы G_0 (т. е. константы $\widetilde{M}_2$ (4.15)) можно добиться положительной определенности формы

$$(\widetilde{M}_2 - M_1)\widetilde{P}\Big|_{x_1=0}, \tag{4.17}$$

получим

$$\frac{d}{dt}\,I_2(t) < 0, \quad t > 0 \quad (I_2(t) = I_0(t) + I_1(t)),$$

откуда следует априорная оценка для вторых производных решения основной задачи II:

$$I_2(t) < I_2(0), \quad t > 0. \tag{4.18}$$

Для того чтобы оценить само решение $\mathbf{U}$ и его первые производные, составим расширенную систему из (4.1), (4.6) и следующей системы (являющейся набором очевидных соотношений): $\partial \mathbf{V}_p/\partial t - \tau \mathbf{V}_p = 0$ ($\mathbf{V}_p = (\mathbf{U}^*, \tau\mathbf{U}^*, \xi_1\mathbf{U}^*, \xi_2\mathbf{U}^*)^*$). Записывая для такой системы интеграл энергии и учитывая (4.18), получим

$$\frac{d}{dt}I(t) < 2\iint\limits_{R^2_+} (\tau\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x} \quad \Big(I(t) = I_2(t) + \iint\limits_{R^2_+} (\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p)\, d\mathbf{x}\Big). \tag{4.19}$$

Оценивая правую часть в (4.19) с помощью неравенства Гельдера, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\,I(t) < 2(I(0)I(t))^{1/2}, \quad t > 0,$$

из которого следует искомая априорная оценка для решения основной задачи II:

$$I(t) < I(0)(t+1)^2, \quad t > 0. \tag{4.20}$$

Тогда, окончательно из (4.20) выводим, что для решения основной задачи II имеет место оценка

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{W_2^2(R^2_+)} \leqslant M_3, \quad 0 < t \leqslant T < \infty \tag{4.21}$$

($M_3 < \infty$ — положительная постоянная, определяемая величиной T). Отметим, что, как и в [5, 8, 10], для функции $F(t, x^2)$ может быть получена оценка

$$\|F\|_{W_2^3((0,T)\times R^1)} \leqslant M_4 \tag{4.22}$$

($M_4 < \infty$ — положительная постоянная, определяемая величиной T). При выводе оценки (4.22) используется факт положительной определенности квадратичной формы (4.17).

Оценки (4.21), (4.22) указывают на то, что основная задача II в случае плоской симметрии корректна. Заметим также, что, пользуясь другой (более громоздкой) техникой построения расширенной системы [5, 11], можно получить априорные оценки решения основной задачи II и в общем (трехмерном) случае.

С учетом замены (2.1) оценка (4.20) примет вид

$$I(t) < I(0)(t+1)^2 \mathrm{e}^{-2t}, \quad t > 0, \tag{4.23}$$

где через вектор $\mathbf{U}$, косвенно фигурирующий в формуле для агрегата $I(t)$, теперь обозначен вектор малых возмущений решения смешанной задачи для линеаризованной исходной системы (1.1), (1.2). Тогда из оценки с убыванием (4.23) следует сходимость решения $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ к тривиальному решению в норме $W_2^2(R_+^2)$ при $t \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{U}(t)\|_{W_2^2(R_+^2)} = 0$.

Таким образом, ударные волны в рассмотренной модели радиационной гидродинамики устойчивы.

Авторы признательны профессору A. M. Anile и доктору V. Romano из университета г. Катаниа (Италия) за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Anile A. M., Pennisi S., Sammartino M.** Covariant radiation hydrodynamics // Annales de l'Institut Henri Poincare. 1992. V. 56, N 1. P. 49–74.
2. **Anile A. M., Pennisi S., Sammartino M.** A thermodynamic approach to Eddington factors // J. Math. Phys. 1991. V. 32, N 2. P. 544–550.
3. **Pennisi S., Sammartino M.** A mathematical model for radiation hydrodynamics // Le Matematiche. 1990. V. 45, fasc. II. P. 379–406.
4. **Kremer G. M., Müller I.** Radiation thermodynamics // J. Math. Phys. 1992. V. 33, N 6. P. 2265–2268.
5. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
6. **Blokhin A. M.** Symmetrization of continuum mechanics equations // Sib. J. Diff. Eq. 1993. V. 2, N 1. P. 3–47.
7. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
8. **Blokhin A. M.** Strong Discontinuities in Magnetohydrodynamics. N. Y.: Nova Science Publishers, 1993.
9. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
10. **Блохин А. М., Трахинин Ю. Л.** Исследование устойчивости быстрой магнитогидродинамической ударной волны в плазме с анизотропным давлением // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 16–35.
11. **Blokhin A. M., Mishchenko E. V.** Investigation on shock waves stability in relativistic gas dynamics // Le Matematiche. 1993. V. 48, fasc. I. P. 53–75.

Поступила в редакцию 28/VI 1995 г.