ПМТФ, № 4, 1963

ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ГАЗА И ЕЕ РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В. П. Шидловский

(*Москва*)

Рассматриваются неустановившиеся движения одноатомного газа, соответствующие разлету точечной массы газа в пустоту. Для случая отсутствия массовых сил такие движения были рассмотрены Л. И. Седовым [1] с помощью теории сплошной среды. Позднее Нарасимха [2] рассмотрел аналогичные движения с помощью кинетической теории одноатомного газа на основе решения уравнения Больцмана при равновесном начальном распределении. В настоящей работе показано, что решения того же типа, что и в работе [2], могут быть построены и при неравновесном начальном распределении. Рассматривается также более общий случай разлета точечной массы при наличии потенциального силового поля, не изменяющегося со временем. Показано, что если, кроме того, силовое поле постоянно по величине и направлению, то уравнение Больцмана и в этом случае допускает точное решение с аналогичными свойствами. При рассмотрении обоих случаев используется молекулярная модель твердых, упругих, гладких сфер. Решение легко распространяется на случай смеси одноатомных газов.

1. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат сосредоточено заданное число молекул N некоего одноатомного газа, тогда как в остальном пространстве молекул нет. Будем считать также, что при последующем свободном разлете этой точечной массы молекулы не сталкиваются между собой (так называемый «свободно-молекулярный» разлет). Тогда для описания движения можно применить упрощенную форму уравнения Больцмана

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{c}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{i}_3\right) \tag{1.1}$$

где $F(\mathbf{r}, t; \mathbf{c})$ — молекулярная функция распределения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{c}$ — абсолютная скорость молекул. На данном этапе исследования поле внешних массовых сил предполагается отсутствующим. В начальный момент времени функция распределения имеет заданную форму

$$F(\mathbf{r}, 0; \mathbf{c}) = F_0(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \tag{1.2}$$

При решении задачи о разлете точечной массы с равновесным начальным распределением Нарасимха [2] воспользовался приемом перехода к новым независимым переменным, отсчитываемым вдоль характеристик уравнения (1.1), а именно к переменным

$$t, \ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{c}t \tag{1.3}$$

После преобразования (1.3) уравнение (1.1) принимает вид

$$\partial F / \partial t = 0$$

откуда при использовании условия (1.2) следует решение

$$F = F(\mathbf{r} - \mathbf{c}t; \mathbf{c}) = F_0(\mathbf{r} - \mathbf{c}t; \mathbf{c}) \tag{1.4}$$

В рассматриваемом случае разлета точечной массы функцию F_0, следуя работе [2], целесообразно представить в виде

$$F_0 = \delta(\mathbf{r}) f_0(\mathbf{c}) \tag{1.5}$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция, $f_0(\mathbf{c})$ — произвольная заданная функция молекулярных скоростей. При этом решение (1.4) принимает форму

$$F = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{c}t)\, f_0(\mathbf{c}) \tag{1.6}$$

Зная функцию распределения $F(\mathbf{r}, t; \mathbf{c})$, можно определить макроскопические характеристики движения. При этом важно иметь в виду, что $\mathbf{c} = (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) / t$, откуда

$$d\mathbf{c} = dc_1\, dc_2\, dc_3 = -\frac{1}{t^3}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = -\frac{1}{t^3}\, d\boldsymbol{\xi}$$

$$\int d\mathbf{c} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dc_1\, dc_2\, dc_3 = -\frac{1}{t^3}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \frac{1}{t^3}\int d\boldsymbol{\xi} \tag{1.7}$$

Концентрация частиц $n(\mathbf{r}, t)$ при движении газа будет выражаться по формуле

$$n(\mathbf{r}, t) = \int F\, d\mathbf{c} = \frac{1}{t^3}\int F_0\left(\boldsymbol{\xi}; \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{t}\right) d\boldsymbol{\xi} \tag{1.8}$$

Макроскопическая скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ будет

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)}\int \mathbf{c}F\, d\mathbf{c} = \frac{1}{nt^4}\int (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})\, F_0\left(\boldsymbol{\xi}; \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{t}\right) d\boldsymbol{\xi} =$$
$$= \frac{\mathbf{r}}{t} - \frac{1}{nt^4}\int \boldsymbol{\xi} F_0\left(\boldsymbol{\xi}; \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{t}\right) d\boldsymbol{\xi} \tag{1.9}$$

В рассматриваемом конкретном случае функция F_0 выражается по формуле (1.5), откуда, пользуясь свойствами дельта-функции [3], легко установить, что последний интеграл в правой части (1.9) обращается в нуль и, таким образом,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} / t \tag{1.10}$$

Учитывая, что при $t = 0$ все молекулы находились в точке $\mathbf{r} = 0$ и что внешнее силовое поле отсутствует, нетрудно видеть, что в момент времени t в точку $\mathbf{r}$ могут попасть только молекулы, имеющие скорость $\mathbf{c} = \mathbf{r} / t$. Следовательно, в силу особенностей данной задачи имеет место равенство $\mathbf{v} = \mathbf{c}$, тогда как тепловая или собственная скорость движения молекул $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{v}$ равна нулю во всех точках во все время движения. Если молекулы газа представляют собой гладкие упругие сферы, то из сказанного выше следует также, что столкновения между молекулами невозможны. Далее отсутствие столкновений между молекулами означает, что функция распределения типа (1.6) является точным решением общего уравнения Больцмана при отсутствии массовых сил

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{c}\,\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = \Delta_c F \tag{1.11}$$

Через $\Delta_c F$ здесь обозначается так называемый интеграл столкновений.

Итак, получаем точное решение уравнения (1.11) для случая, когда в начальный момент времени функция распределения выражается формулой (1.5). В работе [2] решение этого типа построено для равновесного начального распределения, т. е. для функции F_0 вида

$$F_0(\mathbf{r}; \mathbf{c}) = \delta(\mathbf{r})\, N\, (\beta / \pi)^{3/2} e^{-\beta c^2} \tag{1.12}$$

Как видно из выражения (1.6), если начальное распределение при разлете точечной массы газа было равновесным, то оно останется равновесным и в любой последующий момент.

2. Рассмотрим обобщение предыдущей задачи на случай наличия силового поля с потенциалом $\varphi(r)$, не зависящим от времени. Тогда, пренебрегая столкновениями молекул, получим исходное уравнение для функции распределения в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{c}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}+\frac{d\varphi}{d\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}}=0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}=\frac{\partial}{\partial c_1}\mathbf{i}_1+\frac{\partial}{\partial c_2}\mathbf{i}_2+\frac{\partial}{\partial c_3}\mathbf{i}_3\right) \tag{2.1}$$

Характеристики уравнения (2.1) определяются соотношениями

$$dt=\frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{c}}=\frac{d\mathbf{c}}{d\varphi\,/\,d\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

Учитывая соотношения (2.2), преобразуем уравнение (2.1) к новым независимым переменным

$$t,\ \boldsymbol{\xi}=\mathbf{r}-\mathbf{c}t,\qquad z=2\varphi-c^2 \tag{2.3}$$

В результате преобразования уравнение (2.1) принимает форму

$$\frac{\partial F}{\partial t}-t\frac{d\varphi}{d\mathbf{r}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\xi}}=0 \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) не содержит производных по z, так что величина $z=2\varphi-c^2$ здесь и в дальнейшем может рассматриваться как параметр.

Если $d\varphi\,/\,d\mathbf{r}=\mathbf{q}=\mathrm{const}$, т. е. если силовое поле постоянно, то переходя в уравнении (2.4) к переменным

$$t,\ \boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\xi}+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2=\mathbf{r}-\mathbf{c}t+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2 \tag{2.5}$$

получим

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0\quad \text{или}\quad F=F(\boldsymbol{\zeta};\,z)$$

Таким образом, если потенциал поля можно представить в виде

$$\varphi=\varphi_0+\mathbf{q}\mathbf{r}\qquad (\varphi_0=\mathrm{const},\ \mathbf{q}=\mathrm{const}) \tag{2.6}$$

любое решение уравнения (2.1) должно иметь вид

$$F=F(\mathbf{r}-\mathbf{c}t+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2;\ 2\varphi-c^2) \tag{2.7}$$

В частности, обращаясь к интересующей нас задаче о разлете точечной массы газа, возьмем начальную функцию распределения в виде

$$F(\mathbf{r},0,\mathbf{c})=\delta(\mathbf{r})\,f_0(2\varphi-c^2) \tag{2.8}$$

В соответствии с (2.7) решение задачи представляется как

$$F(\mathbf{r},t,\mathbf{c})=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{c}t+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2)\,f_0(2\varphi-c^2) \tag{2.9}$$

Как и в предыдущем случае, выразим

$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{r}-\boldsymbol{\zeta}}{t}+\frac{1}{2}\mathbf{q}t$$

Отсюда аналогичным образом следует, что

$$\int d\mathbf{c}=\frac{1}{t^3}\int d\boldsymbol{\zeta} \tag{2.10}$$

Вычисляя концентрацию молекул $n(\mathbf{r},t)$, придем к результату

$$n(\mathbf{r},t)=\int F\,d\mathbf{c}=\frac{1}{t^3}\int F(\boldsymbol{\zeta})\,d\boldsymbol{\zeta}=\frac{1}{t^3}\int \delta(\boldsymbol{\zeta})\,f_0(2\varphi-c^2)\,d\boldsymbol{\zeta}=$$
$$=\frac{1}{t^3}f_0\left[2\varphi_0-\left(\frac{\mathbf{r}}{t}+\frac{1}{2}\mathbf{q}t\right)^2\right] \tag{2.11}$$

Макроскопическая скорость газа будет выражаться как

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{n(\mathbf{r},t)}\int \mathbf{c}F\,d\mathbf{c}=\frac{1}{nt^3}\int\left(\frac{\mathbf{r}-\boldsymbol{\zeta}}{t}+\frac{1}{2}\mathbf{q}t\right)F(\boldsymbol{\zeta})\,d\boldsymbol{\zeta}=$$
$$=\frac{\mathbf{r}}{t}+\frac{1}{2}\mathbf{q}t-\frac{1}{nt^4}\int\delta(\boldsymbol{\zeta})\,\boldsymbol{\zeta}f_0(2\varphi-c^2)\,d\boldsymbol{\zeta}=\frac{\mathbf{r}}{t}+\frac{1}{2}\mathbf{q}t \tag{2.12}$$

Вновь проводя аналогию со случаем отсутствия внешнего силового поля, рассчитаем, какова должна быть абсолютная скорость одной, произвольно выбранной молекулы, находящейся в момент времени t в точке $\mathbf{r}$. По условию на единицу массы молекулы действует постоянная сила $\mathbf{q}$, так что при отсутствии столкновений уравнение движения этой молекулы записывается в форме

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{q}$$

Отсюда

$$\mathbf{c} = \mathbf{q}t + \mathbf{c}_0, \qquad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2 + \mathbf{c}_0 t = \mathbf{c}t - \tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2$$

Следовательно, отсюда имеем

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}}{t} + \frac{1}{2}\mathbf{q}t \tag{2.13}$$

что в точности совпадает с выражением (2.12) для макроскопической скорости $\mathbf{v}$. Таким образом, при наличии силового поля с потенциалом, определяемым формулой (2.6), получается тот же результат, что и при отсутствии силового поля, а именно

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{v} = 0 \tag{2.14}$$

Если воспользоваться молекулярной моделью гладких упругих сфер, то отсюда следует, что в данных условиях столкновения между молекулами при разлете точечной массы также невозможны и что решение (2.9) является точным решением уравнения Больцмана вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{c}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{q}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}} = \Delta_c F \tag{2.15}$$

при начальном условии типа (2.8).

Некоторая общность решений задачи о разлете для случаев отсутствия внешних сил и постоянного силового поля легко объясняется, если учесть, что при $d\varphi / d\mathbf{r} = \mathbf{q} = \mathrm{const}$ уравнение (2.1) может быть формально преобразовано при помощи подстановок

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{q}t^2, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{u} + \mathbf{q}t$$

В результате получается уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

которое по виду аналогично уравнению (1.1).

В случае равновесного начального распределения условие (2.8) записывается в более конкретной форме

$$F(\mathbf{r}, 0, \mathbf{c}) = \delta(\mathbf{r}) N (\beta / \pi)^{3/2} e^{\beta(2\varphi - c^2 - 2\varphi_0)} \qquad (\beta = \mathrm{const}) \tag{2.16}$$

Естественно, что при наличии силового поля специального вида (2.6) справедливы те же выводы, которые были сделаны и при анализе результатов решения предыдущей задачи. Другими словами, если начальное распределение было равновесным и определялось формулой типа (2.16), то оно останется равновесным и в любой момент времени $t > 0$; наоборот, если начальное распределение было неравновесным, то оно останется таковым и в дальнейшем ввиду отсутствия механизма, могущего изменить тип этого распределения.

Поступила 11 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
2. Narasimha R. Collisionless expansion of gases into vacuum. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, part 2.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1959.