

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ
ПАРАМЕТРОВ ОДНОМЕРНОЙ ДЕФЛАГРАЦИИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ПЛАМЕНИ**

УДК 536.463

В. Н. Охитин

**Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
107005 Москва**

Получены аналитические соотношения, позволяющие с высокой точностью построить распределения всех параметров в области течения при одномерной дефлаграции газовых смесей с произвольной скоростью распространения фронта пламени вплоть до режима нормальной детонации.

Задача о распространении одномерной дефлаграции в газообразной смеси достаточно подробно изучена (см., например, [1–4]). В частности, в работах [3, 4] на основе анализа численного решения получены аналитические зависимости, позволяющие с высокой точностью рассчитывать все параметры течения при видимой скорости распространения фронта пламени $(0,2 \dots 0,3)D < U < 2c_1$, где D и c_1 — скорости детонации и звука в исходной смеси. Указанные диапазоны U перекрываются, поэтому соотношения из [3, 4], в принципе, дают возможность построить решение задачи при любой скорости распространения фронта пламени. В то же время в области общих значений U эти решения не стыкуются друг с другом, т. е. имеют разный функциональный вид и отличающиеся в пределах оговоренной точности численные значения параметров, так как получены при различных допущениях.

Указанная особенность представляет определенные неудобства при использовании полученных соотношений в качестве начальных условий для решения более сложных задач дефлаграции с произвольной скоростью распространения пламени, а также при оценке параметров для скорости фронта, лежащей в диапазоне справедливости обоих решений.

В связи с отмеченным представляет интерес получение единого решения, описывающего параметры одномерной дефлаграции со скоростью распространения фронта пламени во всем диапазоне от нуля до режима нормальной детонации.

В работе [3] для высокоскоростных режимов дефлаграции в приближении «сильной» ударной волны (УВ) и предположении о линейном распределении скорости газа перед фронтом пламени получена зависимость для скорости фронта УВ D_1 , которую можно записать в виде

$$D_1 = \frac{D + aU}{1 + a}, \quad (1)$$

где $a = [4(1 + \nu)\gamma_4^2 - (\gamma_2 - 1)^2]/(\gamma_2^2 - 1)$ — константа, зависящая от свойств продуктов сгорания (ПС) и исходной смеси; $\nu = 0, 1, 2$ — параметр симметрии соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случаев; γ_4, γ_2 — показатели адиабаты ПС и

смеси за фронтом УВ.

При низкоскоростных режимах дефлаграции вплоть до некоторого значения скорости распространения пламени U_* интенсивность фронта УВ остается практически нулевой, т. е. с высокой точностью можно положить $D_1 = c_1$ при $U < U_*$, а затем начинает возрастать, приближаясь к зависимости (1) при $U > 0,2 D$.

Согласно [4] возрастание интенсивности фронта УВ описывается уравнением, следующим из интегрального закона сохранения массы:

$$\left(\frac{2}{\gamma_1 + 1} + \frac{b-1}{\nu+2} \right) \left(\frac{D_1}{c_1} \right)^{\nu+1} - \frac{2}{\gamma_1 + 1} \left(\frac{D_1}{c_1} \right)^{\nu-1} - \frac{(\nu+1) + b[1 - (\nu+2)/\sigma]}{\nu+2} \left(\frac{U}{c_1} \right)^{\nu+1} = \bar{u}, \quad (2)$$

где $b = 1 + (1/2)\nu/(\gamma_1 + 1)$ — параметр, равный отношению плотностей газа перед фронтом пламени и за фронтом УВ; σ — степень расширения газа при сгорании, которая может быть найдена из адиабаты для ПС по начальному давлению:

$$\sigma = \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_4} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + Q_1 \rho_1 / p_1 \right).$$

Здесь Q_1 , ρ_1 , p_1 , γ_1 — удельная теплота сгорания, плотность, давление, показатель адиабаты исходной смеси.

Значение скорости U_* определяется из соотношения (2) по условию $D_1 = c_1$:

$$\frac{U_*}{c_1} = \frac{\nu+1}{\sqrt{(\nu+1) + b[1 - (\nu+2)/\sigma]}} \sqrt{\frac{b-1}{\nu+2}}. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (2) по U , нетрудно получить выражение для производной $(D'_1)_*$ при $U = U_*$ и, соответственно, $D_1 = c_1$:

$$(D'_1)_* = (\nu+1)(\gamma_1+1) \frac{(\nu+1) + b[1 - (\nu+2)/\sigma]}{4(\nu+2) + (b-1)(\nu+1)(\gamma_1+1)} \left(\frac{U_*}{c_1} \right)^\nu, \quad (4)$$

где значение U_* определяется соотношением (3). Тогда для скорости фронта УВ при произвольной скорости распространения фронта пламени $U > U_*$ с учетом (1) можно записать приближенную зависимость

$$D_1 = \frac{D + aU}{1 + a} + B(1 - U/D)^\delta, \quad (5)$$

в которой константы B и δ определяются из условий $D_1 = c_1$ и $D'_1 = (D'_1)_*$ из (4) при $U = U_*$:

$$\delta = (D - U) \frac{a - (1+a)(D'_1)_*}{(1+a)c_1 - (D + aU_*)}, \quad B = \frac{(1+a)c_1 - (D + aU_*)}{(1+a)(1 - U_*/D)^\delta}.$$

Зная величину D_1 , из соотношений динамической совместности [5] нетрудно определить все остальные параметры на фронте УВ:

$$U_2 = \frac{2D_1}{\gamma_2 + 1} \left(1 - \frac{\gamma_2 p_1}{\rho_1 D_1^2} \right), \quad p_2 = p_1 + \frac{2\rho_1 D_1^2}{\gamma_2 + 1} \left(1 - \frac{\gamma_2 p_1}{\rho_1 D_1^2} \right), \quad (6)$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \left(1 - \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p_1}{\rho_1 D_1^2} \right).$$

Учитывая относительно невысокую интенсивность фронта УВ при дефлаграции даже со скоростью, близкой к детонационной, как правило, можно пренебречь изменением

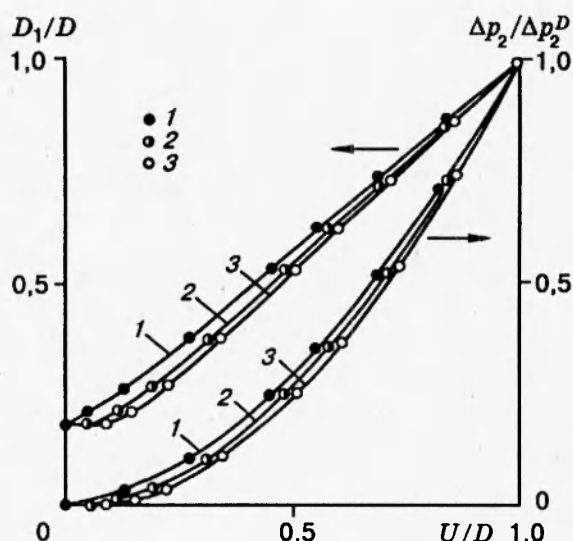


Рис. 1. Зависимость скорости фронта УВ и избыточного давления на нем от скорости распространения фронта пламени:

$\nu = 0$ (1), 1 (2) и 2 (3)

показателя адиабаты исходной смеси и в соотношениях (6) положить $\gamma_2 = \gamma_1$.

На рис. 1 представлены результаты вычислений по формулам (5) и (6) скорости фронта УВ D_1 и избыточного давления на нем Δp_2 (отнесены к соответствующим параметрам в детонационном режиме) для всех трех видов симметрии при дефлаграции стехиометрической смеси ацетилен — воздух с параметрами: $p_1 = 101,3$ кПа, $\rho_1 = 1,2168$ кг/м³, $c_1 = 341,4$ м/с, $Q_1 = 3,269$ МДж/кг, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,4$, $\gamma_4 = 1,234$ (индекс 4 соответствует параметрам за фронтом пламени). Здесь же значками нанесены результаты численного решения задачи [3, 4]. Максимальные ошибки при вычислении D_1 не превосходят 2%, а по остальным параметрам $\sim 4\%$.

При малой скорости распространения пламени массовая скорость газа перед фронтом u_3 возрастает практически линейно [4]:

$$u_3 = \frac{\sigma - 1}{\sigma} U, \quad (7)$$

а в высокоскоростных режимах связана со скоростью газа за фронтом УВ соотношением [3]

$$u_3 = u_2 \left[1 + \frac{2\nu\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \left(1 - \frac{U}{D_1} \right) \right]. \quad (8)$$

В приближении «сильной» УВ с учетом (1) зависимость (8) принимает вид

$$u_3 = \frac{2}{\gamma_2 + 1} \frac{D + aU}{1 + a} \left(1 + \frac{2\nu\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \frac{D - U}{D + aU} \right)$$

и позволяет вычислить производную

$$u'_3|_{U \rightarrow D} = 2 \frac{a(\gamma_2 + 1) - 2\nu\gamma_2}{(1 + a)(1 + \gamma_2)^2}. \quad (9)$$

Таким образом, с учетом (7)–(9), для массовой скорости газа перед фронтом пламени можно записать кубическую зависимость в окончательной форме:

$$u_3 = U \left\{ \frac{\sigma - 1}{\sigma} + \left[3 \frac{u_2^D}{D} - 2 \frac{\sigma - 1}{\sigma} - 2 \frac{a(\gamma_2 + 1) - 2\nu\gamma_2}{(1 + a)(\gamma_2 + 1)^2} \right] \frac{U}{D} - \right.$$

$$- \left[2 \frac{u_2^D}{D} - \frac{\sigma - 1}{\sigma} - 2 \frac{a(\gamma_2 + 1) - 2\nu\gamma_2}{(1 + a)(\gamma_2 + 1)^2} \right] \left(\frac{U}{D} \right)^2 \}, \quad (10)$$

где u_2^D — массовая скорость смеси за фронтом УВ в детонационном режиме, рассчитанная по соотношению (6) при $D_1 = D$.

В режимах Чепмена — Жуге распределение скорости газа между фронтами пламени и УВ близко к линейному [2, 3], а при «слабой» дефлаграции может быть описано функциональной зависимостью [4]

$$u = u_2 + (u_3 - u_2) \left(\frac{\lambda_3}{\lambda} \right)^\zeta \frac{1 - \lambda^{3\nu}}{1 - \lambda_3^{3\nu}}, \quad (11)$$

где λ — относительная линейная координата за фронтом УВ; индекс 3 относится к фронту пламени, а показатель степени ζ определяется из системы дифференциальных уравнений задачи по производной $du/d\lambda$ при $\lambda = \lambda_3$:

$$\zeta = \nu \frac{u_3}{u_3 - u_2} \frac{1}{1 - ((U - u_3)/c_3)^2} - 3\nu \frac{\lambda_3^{3\nu}}{1 - \lambda_3^{3\nu}}. \quad (12)$$

Вычисление показателя ζ по соотношению (12) показывает, что его величина вплоть до скорости фронта пламени $U = c_1$ мало отличается от значения, равного параметру симметрии ν (в пределах 10 %), а при большей скорости ширина области ударно-сжатой исходной смеси становится настолько малой, что при любом значении ζ соотношение (11) приводит практически к линейному изменению скорости между фронтами. Поэтому, положив $\zeta = \nu$, зависимость (11) с достаточно высокой степенью точности можно распространить на весь диапазон изменения U , записав ее в виде

$$u = u_2 + (u_3 - u_2) \frac{\lambda^{-\nu} - \lambda_3^{-\nu}}{\lambda_3^{-\nu} - \lambda_3^{2\nu}}. \quad (13)$$

Соотношение (13) позволяет воспользоваться интегралом Коши — Лагранжа [4] (интегралом автомодельного уравнения движения)

$$\frac{c^2 - c_2^2}{\gamma_2 - 1} = D_1 (\lambda u - u_2) - \frac{u^2 - u_2^2}{2} - D_1 \int_1^\lambda u d\lambda \quad (14)$$

для определения скорости звука, а через изоэнтروпическую связь — и давления в области УВ перед фронтом пламени.

Взяв с помощью (13) интеграл и подставив его в (14), нетрудно получить соотношения: для плоской волны ($\nu = 0$)

$$c = c_2, \quad p = p_2; \quad (15)$$

для цилиндрической волны ($\nu = 1$)

$$c = c_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u - u_2) \frac{D_1}{c_2^2} \left[\lambda \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln(1/\lambda)}{1 - \lambda^3} \right) - \frac{u + u_2}{2D_1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$p = p_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u - u_2) \frac{D_1}{c_2^2} \left[\lambda \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln(1/\lambda)}{1 - \lambda^3} \right) - \frac{u + u_2}{2D_1} \right] \right\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}};$$

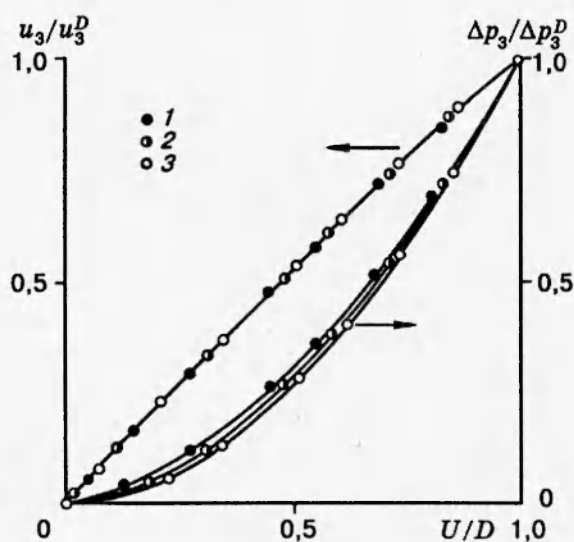


Рис. 2. Зависимость скорости газа и избыточного давления перед фронтом пламени от скорости его распространения:

$\nu = 0$ (1), 1 (2) и 2 (3)

для сферической волны ($\nu = 2$)

$$c = c_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u - u_2) \frac{D_1}{c_1^2} \left[\frac{2}{5} \lambda \left(2 + 3 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^6} \right) - \frac{u + u_2}{2D_1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$p = p_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u - u_2) \frac{D_1}{c_2^2} \left[\frac{2}{5} \lambda \left(2 + 3 \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^6} \right) - \frac{u + u_2}{2D_1} \right] \right\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}.$$

Подставляя в (15)–(17) значения $\lambda = \lambda_3 = U/D$ и $u = u_3$, получим параметры перед фронтом пламени. В частности, для давления:

при $\nu = 0$

$$p_3 = p_2; \quad (18)$$

при $\nu = 1$

$$p_3 = p_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u_3 - u_2) \frac{U}{c_2^2} \left[\frac{2}{3} + \frac{\ln D_1/U}{1 - (U/D_1)^3} - \frac{u_3 + u_2}{2U} \right] \right\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}; \quad (19)$$

при $\nu = 2$

$$p_3 = p_2 \left\{ 1 + (\gamma_2 - 1)(u_3 - u_2) \frac{U}{c_1^2} \left[\frac{4}{5} + \frac{6}{5} \frac{1 - U/D_1}{1 - (U/D_1)^6} - \frac{u_3 + u_2}{2U} \right] \right\}^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}. \quad (20)$$

На рис. 2 сопоставлены результаты вычислений по формулам (10), (18)–(20) (сплошные линии) с численным решением задачи (значки) для массовой скорости u_3 и избыточного давления Δp_3 перед фронтом пламени (отнесены к соответствующим параметрам в детонационном режиме $u_3^D = u_2^D$, $\Delta p_3^D = \Delta p_2^D$) при дефлаграции стехиометрической ацетиленовоздушной смеси с различными скоростями. Зависимость (10) для разных видов симметрии дает близкие значения, поэтому на рис. 2 нанесена кривая лишь для цилиндрического случая. Расхождение численных и аналитических данных не превосходит 3%.

В плоском случае массовая скорость газа перед фронтом пламени постоянна и совпадает со скоростью на фронте УВ. Поэтому величину u_3 можно определить как с помощью

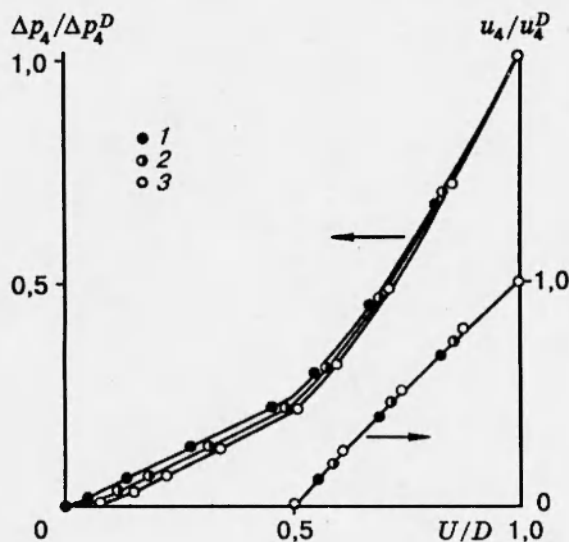


Рис. 3. Зависимость избыточного давления и скорости продуктов сгорания за фронтом пламени от скорости его распространения:

$\nu = 0$ (1), 1 (2) и 2 (3)

зависимости (10), так и по интенсивности УВ из (6). Различие в получаемых значениях u_3 лежит в пределах точности указанных соотношений.

Расчет параметров за фронтом пламени проводится с использованием соотношений динамической совместности, которые удобно записать в виде

$$U = u_3 + \frac{1}{\rho_3} \sqrt{(p_4 - p_3)(1/\rho_3 - 1/\rho_4)}, \quad (21)$$

$$u_4 = u_3 - \sqrt{(p_4 - p_3)(1/\rho_3 - 1/\rho_4)}, \quad (22)$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_3} = \left(p_4 \frac{\gamma_4 + 1}{\gamma_4 - 1} + p_3 \right) / \left(p_4 + p_3 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} + 2Q_1 \rho_3 \right). \quad (23)$$

В режимах «слабой» дефлаграции, которые реализуются при скорости фронта $U < D/2$ [3], ПС покоятся, т. е. $u_4 = 0$. Тогда из (21), (22) следует

$$p_4 = p_3 - \rho_3 u_3 (U - u_3). \quad (24)$$

При дефлаграции в режимах Чепмена — Жуге ($U > D/2$) за фронтом пламени продукты сгорания движутся, при этом выполняется условие

$$u_4 = U - c_4, \quad (25)$$

которое позволяет получить из соотношений (21)–(23) формулу для давления [3]

$$p_4 = p_3 \left[1 - \frac{\gamma_4 - \gamma_2 ((U - u_3)/c_3)^2}{\gamma_4 + 1} \right]. \quad (26)$$

Плотность продуктов сгорания находится из адиабаты (23) по найденному из (24) или (26) давлению.

Для скорости фронта пламени $U \approx D/2$, т. е. когда нет уверенности в типе режима дефлаграции, расчет ведется вначале для режима Чепмена — Жуге, и если из (25) следует $u_4 < 0$, то делается переход к формулам «слабой» дефлаграции.

На рис. 3 приведены избыточное давление и массовая скорость продуктов сгорания

за фронтом пламени, отнесенные к значениям в детонационном режиме, рассчитанные с помощью соотношений (24)–(26), а также результаты численного решения задачи для стехиометрической смеси ацетилен — воздух. Различие не превосходит 3 %.

Из рис. 3 видно, что закон изменения избыточного давления за фронтом пламени с ростом скорости дефлаграции меняет свой характер при переходе из одного режима в другой. При «слабой» дефлаграции в плоском случае величина Δp_4 возрастает практически линейно (даже с некоторой вогнутостью к оси U). В цилиндрическом и сферическом случаях после начального нелинейного возрастания изменение Δp_4 также близко к линейному. После перехода дефлаграции в режим Чепмена — Жуге для всех видов симметрии величина Δp_4 начинает расти нелинейно.

В режимах Чепмена — Жуге за фронтом пламени появляется зона течения ПС, в которой скорость газа падает до нуля на границе с центральной областью покоя, а распределение параметров подобно детонационному режиму, т. е. согласно [6] может быть описано функциональной зависимостью

$$\frac{u}{u_4} = \frac{c - c_5}{c_4 - c_5} = 1 - \left[1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_5}{\lambda_3 - \lambda_5} \right)^\alpha \right]^\beta. \quad (27)$$

Здесь индекс 5 относится к границе области покоя.

Размер центральной области покоя, давление и плотность ПС в ней определяются через скорость звука c_5 , которая связана с параметрами за фронтом пламени соотношением, следующим из первого уравнения приведенной в [3] системы, описывающей задачу:

$$c_5 = c_4 - (\gamma_4 - 1) u_4 \bar{f} / 2, \quad (28)$$

где среднее значение $\bar{f}$ комплекса $f = (\lambda D_1 - u)/c$ может быть рассчитано по зависимости

$$\bar{f} = 1 - \frac{\bar{f}_D - 1}{2} \left(\frac{D}{D_1} + \frac{c_4^D}{c_4} \right) \frac{u_4}{u_4^D},$$

где $\bar{f}_D = (6\nu + 15)/(4\nu + 15)$ — среднее значение комплекса в детонационном режиме [6]; c_4^D , u_4^D — звуковая и массовая скорости за фронтом пламени в детонационном режиме.

Тогда для относительной координаты границы области покоя λ_5 и давления в ней с учетом (28) можно записать

$$\lambda_5 = c_5 / D_1, \quad p_5 = p_4 (c_5 / c_4)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}. \quad (29)$$

Показатель степени β в распределении параметров (27) за фронтом пламени практически не зависит от скорости дефлаграции и может быть принят равным значению в детонационном режиме [6] $\beta = 2/(\nu + 2)$, а показатель α изменяется и описывается зависимостью [3] $\alpha = (20 + \nu)/20 + (\nu/4)(\bar{f}_D - \bar{f})/(\bar{f}_D - 1)$.

На рис. 4 в качестве примера представлены (сплошными линиями) распределения избыточного давления и массовой скорости в области за фронтом УВ при цилиндрической дефлаграции стехиометрической смеси ацетилен — воздух, построенные с помощью зависимостей (13), (16), (27)–(29). Здесь же кружками нанесены результаты численного решения задачи. Для удобства представления графики нормированы относительно параметров перед фронтом пламени Δp_3 и u_3 . Проведенное сравнение показывает, что максимальные ошибки аналитические соотношения дают при скорости дефлаграции $U \approx U_*$, однако они не превосходят 4 %. Как при меньшей, так и при большей скорости фронта пламени расхождение численных и аналитических данных уменьшается.

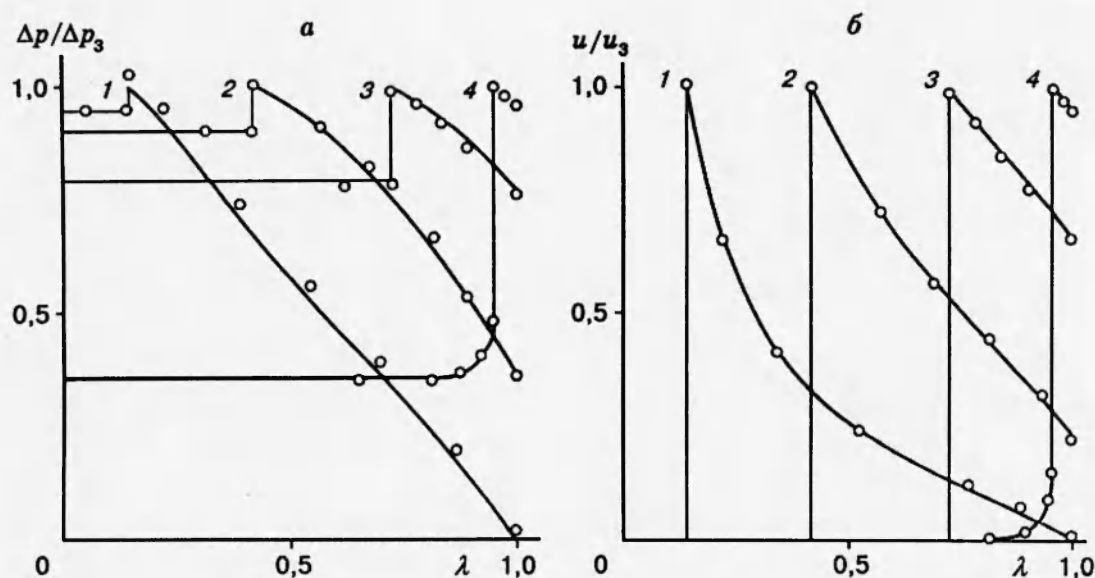


Рис. 4. Распределение избыточного давления (а) и массовой скорости (б) в области течения при цилиндрической дефлаграции:

U , м/с: 1 — 50, 2 — 150, 3 — 350, 4 — 1100

Таким образом, полученные аналитические соотношения позволяют с точностью $2 \div 4\%$ построить распределения всех параметров в области течения при одномерной дефлаграции газовых смесей с произвольной скоростью распространения фронта пламени вплоть до режима нормальной детонации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев В. А., Мирошников С. Н., Трошин Я. К. Определение параметров сферической дефлаграции // Физика горения и взрыва. 1979. Т. 15, № 2. С. 73–80.
2. Горев В. А., Мирошников С. Н., Трошин Я. К. Аналитическое решение задачи о сферической дефлаграции для больших скоростей горения // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16, № 2. С. 132–135.
3. Охитин В. Н. Автомодельное распределение параметров при дефлаграции в режимах Чепмена — Жуге // Библиогр. указатель ВИНТИ «Депонированные рукописи». 1988. № 12, 6/о 865а. Деп. № 5870-B88, 1988.
4. Охитин В. Н. Расчет параметров слабой одномерной дефлаграции // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 2. С. 122–129.
5. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. М.: Наука, 1975.
6. Охитин В. Н. Автомодельное распределение параметров за фронтом детонационной волны // ПМТФ. 1984. № 1. С. 109–113.

Поступила в редакцию 14/IV 1995 г.