УДК 539.3: 517.958

УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТИ И ГЛАВНЫЕ ОСИ АНИЗОТРОПИИ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Выведены условия экстремальности каждого из коэффициентов упругости (модулей Юнга, сдвига и др.) для общего случая линейно-упругих анизотропных материалов. Получены условия стационарности, определяющие ортогональные системы координат, являющиеся главными осями анизотропии, в которых число независимых постоянных упругости уменьшается с 21 до 18, а в некоторых случаях анизотропии — до 15 или менее. Приведен пример материала с кубической симметрией.

Ключевые слова: линейно-упругие материалы, анизотропия, постоянные упругости, условия экстремальности, главные оси анизотропии, триклинная сингония, кубическая сингония.

DOI: 10.15372/PMTF20160419

В декартовой прямоугольной системе координат x_i, $i = 1, 2, 3$ свойства упругости материалов определяются тензором четвертого ранга модулей упругости [1]

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{1}$$

и обратным тензором коэффициентов податливости

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}. \tag{2}$$

Компоненты тензоров (1), (2) связаны соотношениями

$$A_{ijkl}a_{klrs} = \delta_{ijrs} = \frac{1}{2}\,(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}), \qquad a_{ijkl}A_{klrs} = \delta_{ijrs}, \tag{3}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; повторяющиеся индексы означают суммирование по допустимым значениям индексов. Тензор δ_{ijrs} играет роль единичного в пространстве симметричных тензоров вида (1).

При ортогональном преобразовании системы координат

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \qquad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \qquad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \tag{4}$$

компоненты $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ тензора напряжений и A_{ijkl} преобразуются по формулам

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{\sigma}_{pq}, \qquad \hat{\sigma}_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\sigma_{ij}, \\ A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\hat{A}_{pqrs}, \qquad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}A_{ijkl}. \end{gathered} \tag{5}$$

Для компонент $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ тензора деформаций и a_{ijkl} формулы преобразования аналогичны (5). В силу свойств симметрии (1), (2) независимых компонент A_{ijkl} или a_{ijkl} только 21. За счет выбора трех свободных параметров α_{ij}, определяющих положение системы координат (4), число независимых компонент A_{ijkl} или a_{ijkl} можно уменьшить с 21 до 18 [1–3].

В линейной теории упругости удельная энергия деформации для анизотропных материалов принимается в квадратичной форме

$$2\Phi = A_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \tag{6}$$

которая должна быть положительно-определенной [1]. Напряжения и деформации связаны линейными соотношениями

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}. \tag{7}$$

Обзор работ, посвященных исследованию тензоров (1), (2) и обобщенного закона Гука (7), приведен в [4].

Для симметричных по двум индексам тензоров используем формулы перехода от двух индексов к одному

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_1, \qquad \sigma_{22} = \sigma_2, \qquad \sigma_{33} = \sigma_3, \\ \sqrt{2}\sigma_{23} = \sqrt{2}\sigma_{32} = \sigma_4, \quad \sqrt{2}\sigma_{13} = \sqrt{2}\sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sqrt{2}\sigma_{12} = \sqrt{2}\sigma_{21} = \sigma_6. \end{gathered} \tag{8}$$

Такие же формулы перехода используются для симметричных тензоров ε_{ij}, δ_{ij}, A_{ijkl}, a_{ijkl}. С учетом (8) соотношения (6), (7) принимают вид

$$2\Phi = A_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = a_{ij}\sigma_i\sigma_j, \quad \sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i,j = \overline{1,6}. \tag{9}$$

В силу (1)–(3) матрицы A_{ij}, a_{ij} являются симметричными, взаимно обратными и положительно-определенными.

Для тензоров второго ранга $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ существует понятие главных осей $\alpha_{ip} = n_{ip}$ [1], в которых (см. (5))

$$\hat{\sigma}_{32} = \sigma_{ij}n_{i3}n_{j2} = 0, \quad \hat{\sigma}_{31} = \sigma_{ij}n_{i3}n_{j1} = 0, \quad \hat{\sigma}_{21} = \sigma_{ij}n_{i2}n_{j1} = 0, \tag{10}$$

а другие компоненты $\hat{\sigma}_{11} = \sigma_{ij}n_{i1}n_{j1}$, $\hat{\sigma}_{22} = \sigma_{ij}n_{i2}n_{j2}$, $\hat{\sigma}_{33} = \sigma_{ij}n_{i3}n_{j3}$ являются главными (собственными) значениями. Уравнения (10) могут использоваться для определения собственных векторов (главных осей) n_{ip} тензора σ_{ij} [3].

Для тензоров четвертого ранга (1), (2) общепринятого определения главных осей не существует. Выбирая в качестве базиса собственные состояния $t_{ip}t_{iq} = \delta_{pq}$, $i,p,q = \overline{1,6}$ [4], в шестимерном пространстве для конкретных матриц A_{ij}, a_{ij} (9) можно обратить в нуль все недиагональные компоненты A_{ij} или a_{ij}. В трехмерном пространстве используются свертки по двум индексам A_{ijkk}, A_{ikkj} или a_{ijkk}, a_{ikkj} и в качестве главных осей анизотропии выбираются главные оси этих тензоров второго ранга или некоторых комбинаций этих тензоров [1–3, 5]. Таким образом число независимых компонент тензоров (1), (2) в общем случае анизотропии уменьшается до 18.

С использованием формул преобразования (5) в трехмерном пространстве можно найти другие системы координат, в которых тензоры (1), (2) при любой анизотропии определяются 18 независимыми компонентами [6].

В работе [7] ставится задача определения экстремальных значений функции (6), (9)

$$2\Phi = a_{ij}\sigma_i\sigma_j, \qquad \sigma_i\sigma_i = 1 \tag{11}$$

при некоторых выражениях для σ_i, в частности:

1) $\sigma_{ij} = n_i n_j, \;\; n_i n_i = 1;$

2) $\sigma_{ij} = (n_{i1}n_{j2} + n_{i2}n_{j1})/\sqrt{2}, \;\; n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}, \;\; p,q = 1,2, \;\; i = 1,2,3.$

Для варианта 1 из (6) имеем

$$2\Phi = a_{ijkl} n_i n_j n_k n_l = 1/E_n, \tag{12}$$

т. е. ищется экстремум модуля Юнга. Для варианта 2 из (6) получаем

$$2\Phi = a_{ijkl}(n_{i1}n_{j2} + n_{i2}n_{j1})(n_{k1}n_{l2} + n_{k2}n_{l1})/2 = 2n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k1}n_{l2} = 1/(2G_{12}), \tag{13}$$

т. е. ищется экстремум модуля сдвига.

Сначала найдем экстремум для формы (11). Составляем функцию $f = a_{ij}\sigma_i\sigma_j - \mu(\delta_{ij}\sigma_i\sigma_j - 1)$ (μ — множитель Лагранжа) и приравниваем производные к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = 2(a_{kj} - \mu\delta_{kj})\sigma_j = 0.$$

Таким образом, получаем задачу на собственные значения и собственные векторы (состояния) для матрицы a_{ij} (аналогичным образом — для A_{ij}). Решение ее известно, т. е. a_{ij} представляется через собственные податливости и состояния $a_{ij} = t_{ip}\mu_{pq}t_{jq}$, $p = q$ [4]. Аналогичным образом находим $A_{ij} = t_{ip}\lambda_{pq}t_{jq}$, $p = q$, где $\lambda_{pq} = 1/\mu_{pq}$ — собственные модули. Очевидно, что λ_{pq} ($p = q$, $p, q = \overline{1, 6}$) являются экстремальными значениями удельной энергии деформации (6), (9).

Вместо задачи (12), (13) рассмотрим более общую задачу. Компоненты тензора a_{ijkl} преобразуются по формулам

$$\begin{gathered} a_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{a}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})\hat{a}_{pqrs}\,\frac{1}{2}\,(\alpha_{kr}\alpha_{ls} + \alpha_{ks}\alpha_{lr}) = \alpha_{ijpq}\hat{a}_{pqrs}\alpha_{klrs}, \\ \hat{a}_{pqrs} = \alpha_{ijpq}a_{ijkl}\alpha_{klrs} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})a_{ijkl}\,\frac{1}{2}\,(\alpha_{kr}\alpha_{ls} + \alpha_{ks}\alpha_{lr}) = \alpha_{ip}\alpha_{jq}a_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls}. \end{gathered} \tag{14}$$

При $pq = rs$ второе выражение (14) принимает вид выражения для энергии деформации (6) с напряжениями $\sigma_{ij} = \alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2$, причем $\alpha_{ijpq}\alpha_{ijrs} = \delta_{pqrs}$.

Пусть $\alpha_{ip} = n_{ip}$, тогда из второй формулы (14) имеем

$$\begin{gathered} \hat{a}_{1111} = \hat{a}_{11} = n_{i1}n_{j1}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = 1/E_1, \\ \hat{a}_{2222} = \hat{a}_{22} = n_{i2}n_{j2}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = 1/E_2, \\ \hat{a}_{3333} = \hat{a}_{33} = n_{i3}n_{j3}a_{ijkl}n_{k3}n_{l3} = 1/E_3; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \hat{a}_{2323} = \hat{a}_{44}/2 = n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l3} = 1/(4G_{23}), \\ \hat{a}_{1313} = \hat{a}_{55}/2 = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l3} = 1/(4G_{13}), \\ \hat{a}_{1212} = \hat{a}_{66}/2 = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k1}n_{l2} = 1/(4G_{12}). \end{gathered} \tag{16}$$

Выражения (15), (16) соответствуют формулам (12), (13). Следовательно, необходимо искать экстремум модулей Юнга или сдвига, что соответствует экстремуму удельных энергий деформаций. Кроме того, выражения (15), (16) — это формулы преобразования (14) тензора a_{ijkl} в новый базис.

Запишем компоненты тензора $\hat{a}_{pqrs}$ для остальных индексов:

$$\hat{a}_{2211} = \hat{a}_{21} = n_{i2}n_{j2}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \frac{\nu_{21}}{E_1},$$

$$\hat{a}_{3311} = \hat{a}_{31} = n_{i3}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \hat{a}_{3322} = \hat{a}_{32} = n_{i3}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = \frac{\nu_{32}}{E_2},$$

$$\hat{a}_{2311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{41} = n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \frac{\nu_{41}}{\sqrt{2}E_1}, \quad \hat{a}_{2322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{42} = n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = \frac{\nu_{42}}{\sqrt{2}E_2},$$

$$\hat{a}_{1311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{51} = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \frac{\nu_{51}}{\sqrt{2}E_1}, \quad \hat{a}_{1322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{52} = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = \frac{\nu_{52}}{\sqrt{2}E_2},$$

$$\hat{a}_{1211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{61} = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1} = \frac{\nu_{61}}{\sqrt{2}E_1}, \quad \hat{a}_{1222} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{62} = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} = \frac{\nu_{62}}{\sqrt{2}E_2},$$

$$\hat{a}_{2333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{43} = n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k3}n_{l3} = \frac{\nu_{43}}{\sqrt{2}E_3}, \tag{17}$$

$$\hat{a}_{1333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{53} = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k3}n_{l3} = \frac{\nu_{53}}{\sqrt{2}E_3}, \quad \hat{a}_{1323} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{54} = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l3} = \frac{\nu_{54}}{4G_{23}},$$

$$\hat{a}_{1233} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{63} = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k3}n_{l3} = \frac{\nu_{63}}{\sqrt{2}E_3}, \quad \hat{a}_{1223} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{64} = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k2}n_{l3} = \frac{\nu_{64}}{4G_{23}},$$

$$\hat{a}_{1213} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{65} = n_{i1}n_{j2}a_{ijkl}n_{k1}n_{l3} = \frac{\nu_{65}}{4G_{13}}.$$

Обозначения в правых частях (17) приведены в [3]. Формулы преобразования, аналогичные (14)–(17), применимы также для модулей упругости A_{ijkl}, т. е. вместо a_{ijkl} в формулах записывается A_{ijkl}.

Выражения (15), (16) аналогичны. Представим (15) в виде

$$\hat{a} = n_i n_j a_{ijkl} n_k n_l = a_{(ijkl)} n_i n_j n_k n_l = 1/E_n, \tag{18}$$

где $a_{(ijkl)} = (a_{ijkl} + a_{iklj} + a_{iljk})/3$ — симметричная часть тензора a_{ijkl}. Из (18) следует, что несимметричная часть $a_{ijkl} - a_{(ijkl)} = (2a_{ijkl} - a_{iklj} - a_{iljk})/3$ не влияет на модуль Юнга E_n.

Для определения экстремальных значений модуля Юнга (12), (18) при $n_i n_i = 1$ составляем функцию $f = \hat{a} - 2\lambda(\delta_{ij} n_i n_j - 1)$, где λ — множитель Лагранжа, и приравниваем производную к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial n_s} = 4(a_{sklj} n_k n_l - \lambda\delta_{sj}) n_j = 0. \tag{19}$$

Уравнения (19) определяют направления n_j, для которых модуль Юнга (18) принимает экстремальные значения $\lambda = a_{sklj} n_s n_k n_l n_j$. При замене a_{sklj} на A_{sklj} соотношения (19) становятся уравнениями для нахождения продольных нормалей для тензора Кристоффеля $Q_{sj} = A_{sklj} n_k n_l$. Решение данной задачи существует всегда [8–12]. Условия (19) стационарности значений модулей Юнга рассматривались во многих работах (см., например, [13–18]).

Условия экстремальности (стационарности) каждой из постоянных (15)–(17) можно получить другим способом. В формулах преобразования (4), (5), (14) независимые параметры обозначим $\alpha_{32} = \alpha_1$, $\alpha_{13} = \alpha_2$, $\alpha_{21} = \alpha_3$. Каждый параметр α_i, $i = 1, 2, 3$ определяет поворот вокруг соответствующей оси [19]. При дифференциальном бесконечно малом преобразовании новая система бесконечно мало отличается от начальной, т. е. при $\alpha_i = 0$ в пределе получаем $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$. Из (4) находим

$$d(\alpha_{ip}\alpha_{jp}) = d(\delta_{ij}), \quad \alpha_{ip} d(\alpha_{jp}) + \alpha_{jp} d(\alpha_{ip}) = 0, \quad \delta_{ip} d(\alpha_{jp}) + \delta_{jp} d(\alpha_{ip}) = 0, \quad d\alpha_{ji} + d\alpha_{ij} = 0.$$

Отсюда следует, что $d\alpha_{ij} = \varepsilon_{isj} d\alpha_s$ — антисимметричная матрица (ε_{isj} — символы Леви-Чивиты).

Найдем $d\hat{a}_{pqrs}$. Из (14) имеем

$$d\hat{a}_{pqrs} = [d(\alpha_{ip})\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls} + \alpha_{ip} d(\alpha_{jq})\alpha_{kr}\alpha_{ls} + \alpha_{ip}\alpha_{jq} d(\alpha_{kr})\alpha_{ls} + \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr} d(\alpha_{ls})] a_{ijkl},$$

при $\alpha_i = 0$ $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, $\hat{a}_{pqrs} = a_{pqrs}$. Тогда [3, 19]

$$da_{pqrs} = [d(\alpha_{ip})\delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ip}d(\alpha_{jq})\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ip}\delta_{jq}d(\alpha_{kr})\delta_{ls} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}d(\alpha_{ls})]a_{ijkl} =$$
$$= d(\alpha_{ip})a_{iqrs} + d(\alpha_{jq})a_{pjrs} + d(\alpha_{kr})a_{pqks} + d(\alpha_{ls})a_{pqrl} =$$
$$= (\varepsilon_{npi}a_{iqrs} + \varepsilon_{nqj}a_{pjrs} + \varepsilon_{nrk}a_{pqks} + \varepsilon_{nsl}a_{pqrl})d\alpha_n. \qquad (20)$$

С учетом сокращенных обозначений (8) из (20) получаем дифференциалы всех постоянных a_{pq}, которые разделим на шесть групп [19]:

— группа I:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{11} = 2(-a_{51}d\alpha_2 + a_{61}d\alpha_3),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{22} = 2(a_{42}d\alpha_1 - a_{62}d\alpha_3),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{33} = 2(-a_{43}d\alpha_1 + a_{53}d\alpha_2);$$

— группа II:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{32} = (a_{43} - a_{42})d\alpha_1 + a_{52}d\alpha_2 - a_{63}d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{31} = -a_{41}d\alpha_1 + (a_{51} - a_{53})d\alpha_2 + a_{63}d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{21} = a_{41}d\alpha_1 - a_{52}d\alpha_2 + (a_{62} - a_{61})d\alpha_3;$$

— группа III:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{44} &= 2(a_{43} - a_{42})d\alpha_1 + \sqrt{2}(a_{64}d\alpha_2 - a_{54}d\alpha_3),\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{55} &= -\sqrt{2}a_{65}d\alpha_1 + 2(a_{51} - a_{53})d\alpha_2 + \sqrt{2}a_{54}d\alpha_3,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{66} &= \sqrt{2}(a_{65}d\alpha_1 - a_{64}d\alpha_2) + 2(a_{62} - a_{61})d\alpha_3;\end{aligned} \qquad (21)$$

— группа IV:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{65} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{55} - a_{66})d\alpha_1 + \Big(a_{61} - a_{63} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{54}\Big)d\alpha_2 + \Big(a_{52} - a_{51} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{64}\Big)d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{64} = \Big(a_{63} - a_{62} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{54}\Big)d\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{66} - a_{44})d\alpha_2 + \Big(a_{42} - a_{41} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{65}\Big)d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{54} = \Big(a_{53} - a_{52} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{64}\Big)d\alpha_1 + \Big(a_{41} - a_{43} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{65}\Big)d\alpha_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{44} - a_{55})d\alpha_3;$$

— группа V:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{41} = (a_{31} - a_{21})d\alpha_1 + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{61} - a_{54}\Big)d\alpha_2 + \Big(a_{64} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{51}\Big)d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{52} = \Big(a_{54} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{62}\Big)d\alpha_1 + (a_{21} - a_{32})d\alpha_2 + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{42} - a_{65}\Big)d\alpha_3,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{63} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{53} - a_{64}\Big)d\alpha_1 + \Big(a_{65} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{43}\Big)d\alpha_2 + (a_{32} - a_{31})d\alpha_3;$$

— группа VIa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{42} = (a_{44} - a_{22} + a_{32})d\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{62}d\alpha_2 - \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{52} + a_{64}\Big)d\alpha_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{53} = -\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{63} + a_{54}\Big)d\alpha_1 + (a_{55} - a_{33} + a_{31})d\alpha_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{43}d\alpha_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{61} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{51}d\alpha_1 - \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{41} + a_{65}\Big)d\alpha_2 + (a_{66} - a_{11} + a_{21})d\alpha_3;$$

— группа VIb:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{51} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{61}d\alpha_1 + (a_{11} - a_{55} - a_{31})d\alpha_2 + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{41} + a_{65}\Big)d\alpha_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{62} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{52} + a_{64}\Big)d\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{42}d\alpha_2 + (a_{22} - a_{66} - a_{21})d\alpha_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,da_{43} = (a_{33} - a_{44} - a_{32})d\alpha_1 + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{63} + a_{54}\Big)d\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{53}d\alpha_3.$$

Группа VI делится на две подгруппы. Формулы, аналогичные (21), применимы и для модулей упругости A_{pq}. Все инварианты постоянных упругости a_{pq} или A_{pq} относительно ортогональных преобразований (4), (14) можно получить путем интегрирования дифференциальных выражений (21) [3, 19]. Инварианты и линейные инвариантные неприводимые разложения тензоров упругости рассматриваются также в работах [5, 20–22].

Из дифференциальных формул (21) для da_{pq} (аналогично dA_{pq}) следует, что экстремальные значения каждой постоянной упругости имеют место для тех направлений $\alpha_{ip} = n_{ip}$, для которых обращаются в нуль коэффициенты при независимых дифференциалах $d\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Например, с учетом формул (15), (17), (21) получаем экстремальные значения модулей Юнга для направлений n_{ip}, для которых

$$\begin{aligned}
&\hat a_{1311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{51} = n_{j3}a_{jikl}n_{i1}n_{k1}n_{l1} = 0, \quad \hat a_{1211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{61} = n_{j2}a_{jikl}n_{i1}n_{k1}n_{l1} = 0,\\
&\hat a_{2322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{42} = n_{j3}a_{jikl}n_{i2}n_{k2}n_{l2} = 0, \quad \hat a_{1222} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{62} = n_{i1}a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = 0,\\
&\hat a_{2333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{43} = n_{i2}a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = 0, \quad \hat a_{1333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{53} = n_{i1}a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, что формулы (22) являются иной записью условия ортогональности векторов $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$, $p \neq q$, при этом в (22) имеем

$$a_{jikl}n_{i1}n_{k1}n_{l1} = \lambda_1 n_{j1}, \quad a_{jikl}n_{i2}n_{k2}n_{l2} = \lambda_2 n_{j2}, \quad a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = \lambda_3 n_{i3}, \tag{23}$$

т. е. выражения в левых частях (23) пропорциональны векторам n_{i1}, n_{i2}, n_{i3} соответственно. Формулы (23) совпадают с условиями (19) экстремума для модулей Юнга (15), (18).

При выполнении уравнений (22), (23) из (23) находим экстремальные значения модулей Юнга (ср. с (15))

$$\lambda_1 = a_{ijkl}n_{i1}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = \hat a_{1111} = \hat a_{11} = 1/E_1,$$

$$\lambda_2 = a_{ijkl}n_{i2}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = \hat a_{2222} = \hat a_{22} = 1/E_2,$$

$$\lambda_3 = a_{ijkl}n_{i3}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = \hat a_{3333} = \hat a_{33} = 1/E_3.$$

С учетом (23) формулы (22) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{51} = \lambda_1 n_{j3} n_{j1} = 0, &\qquad &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{61} = \lambda_1 n_{j2} n_{j1} = 0,\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{42} = \lambda_2 n_{j3} n_{j2} = 0, &\qquad &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{62} = \lambda_2 n_{i1} n_{i2} = 0,\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{43} = \lambda_3 n_{i2} n_{i3} = 0, &\qquad &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{53} = \lambda_3 n_{i1} n_{i3} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как $\lambda_i \ne 0$, $i = 1, 2, 3$, условия $\hat a_{51} = 0$, $\hat a_{53} = 0$; $\hat a_{61} = 0$, $\hat a_{62} = 0$; $\hat a_{42} = 0$, $\hat a_{43} = 0$ совпадают. Это совпадение имеет место только в случае, если уравнения (19), (23) допускают решения в виде ортогональных троек направлений. При произвольной анизотропии такие решения существуют не всегда. Если ортогональные тройки направлений решений уравнений (23) существуют, то для выполнения (22) достаточно выполнить либо условия

$$\hat a_{61} = 0, \qquad \hat a_{42} = 0, \qquad \hat a_{53} = 0, \tag{25}$$

либо условия

$$\hat a_{51} = 0, \qquad \hat a_{62} = 0, \qquad \hat a_{43} = 0. \tag{26}$$

Тройки (25), (26) соответствуют подгруппам группы VI по классификации постоянных упругости согласно [19]. В [6] для двумерного случая доказывалось одновременное выполнение равенств $\hat a_{61} = 0$, $\hat a_{62} = 0$ ($\hat A_{61} = 0$, $\hat A_{62} = 0$). Однако утверждение в [6], что равенства вида (25), (26) выполняются при любой анизотропии, является ошибочным.

Равенства (22), (24)–(26) можно получить еще одним способом. Пусть имеем условия (23) экстремума модулей Юнга. Без потери общности полагая в третьем уравнении (23) $n_{i3} = \delta_{i3} = \hat n_{i3}$ [13], получаем

$$\hat a_{i333} = \lambda_3 \delta_{i3}, \quad \hat a_{1333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{53} = 0, \quad \hat a_{2333} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{43} = 0, \quad \hat a_{3333} = \hat a_{33} = \lambda_3.$$

Далее выбирая в качестве второй оси $n_{i2} = \delta_{i2} = \hat n_{i2}$, из второго уравнения (23) имеем

$$\hat a_{i222} = \lambda_2 \delta_{i2}, \quad \hat a_{1222} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{62} = 0, \quad \hat a_{2222} = \hat a_{22} = \lambda_2, \quad \hat a_{3222} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{42} = 0.$$

Очевидно, что для третьей оси $n_{i1} = \delta_{i1} = \hat n_{i1}$ из (23) следует

$$\hat a_{i111} = \lambda_1 \delta_{i1}, \quad \hat a_{1111} = \hat a_{11} = \lambda_1, \quad \hat a_{2111} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{61} = 0, \quad \hat a_{3111} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{51} = 0.$$

Таким образом, из (23) следуют условия (22), (24)–(26) и, наоборот, из (22) следуют условия (23). Тем самым доказано, что в случае выполнения (23) существует ортогональная система координат n_{ip}, $n_{ip} n_{iq} = \delta_{pq}$, в которой матрица $\hat a_{pq}$ или a_{ij} (соответственно $\hat A_{pq}$ или A_{ij} [6]) имеет вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \text{sym} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & & \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} & \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \tag{27}$$

(обозначение sym соответствует элементам матрицы, симметричным относительно диагонали матрицы) и содержит 15 независимых компонент. Эта система координат, очевидно, определяется ортогональной тройкой направлений, в которых распространяются чисто продольные волны, или ортогональными направлениями, для которых имеют место экстремальные значения модуля Юнга. Если при общей анизотропии ортогональных решений уравнений (23) не существует, всегда можно выбрать три ортогональных направления, при которых выполняются уравнения (25) или (26). При этом матрица $\hat{a}_{pq}$ или a_{ij} будет содержать 18 независимых компонент. Кроме того, всегда можно выполнить по два условия (22), соответствующих экстремальным значениям модулей Юнга E_1, E_2, E_3.

Если в качестве тензора a_{ijkl} рассматривать нонор $a_{ijkl} = a_{(ijkl)}$ — симметричный по всем индексам тензор четвертого ранга, все следы которого являются нулевыми: $a_{ijkk} = a_{(ijkk)} = 0$, то соответствующая матрица (27) принимает вид [23]

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} -(a_{21}+a_{31}) & & & & & \\ a_{21} & -(a_{21}+a_{32}) & & & \text{sym} & \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{31}+a_{32}) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{32} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{21} \end{bmatrix}$$

и содержит три независимые компоненты a_{21}, a_{31}, a_{32}. Утверждение [23], что равенства вида (25), (26) выполняются для любого нонора, является несправедливым.

Заметим, что условия (25) или (26) получаются одно из другого при круговой перестановке осей 1, 2, 3. Разделение постоянных упругости a_{ij} (A_{ij}) на шесть групп обусловлено тем, что при круговой перестановке осей 1, 2, 3 (собственно ортогональных преобразованиях системы координат, когда углы между осями обеих систем являются кратными $\pi/2$) элементы каждой группы переходят друг в друга [19, 24]. Итак, при выполнении условий (25) или (26) (или (22)) элементы группы I в матрице (27) $a_{11} = 1/E_1$, $a_{22} = 1/E_2$, $a_{33} = 1/E_3$ (модули Юнга) принимают экстремальные значения.

Условия экстремальности (стационарности) каждой постоянной a_{ij} можно получить не только из дифференциальных выражений (21) или с помощью метода нахождения условного экстремума, аналогично тому, как это сделано в (19), но и непосредственно используя формулы преобразования (14), которые запишем в виде

$$a_{ijkl}n_{jq}n_{kr}n_{ls} = n_{ip}\hat{a}_{pqrs} = n_{i1}\hat{a}_{1qrs} + n_{i2}\hat{a}_{2qrs} + n_{i3}\hat{a}_{3qrs}. \tag{28}$$

Пусть в (28) индексы $qrs = 111, 222, 333$, тогда

$$\begin{aligned} a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} &= n_{i1}\hat{a}_{1111} + n_{i2}\hat{a}_{2111} + n_{i3}\hat{a}_{3111}, \\ a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} &= n_{i1}\hat{a}_{1222} + n_{i2}\hat{a}_{2222} + n_{i3}\hat{a}_{3222}, \\ a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} &= n_{i1}\hat{a}_{1333} + n_{i2}\hat{a}_{2333} + n_{i3}\hat{a}_{3333}. \end{aligned} \tag{29}$$

Если выполняются равенства (22), то соотношения (29) становятся условиями экстремума модулей Юнга:

$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1111}, \quad a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = n_{i2}\hat{a}_{2222}, \quad a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = n_{i3}\hat{a}_{3333}. \tag{30}$$

Очевидно, что условия (22) и (30) (или (23)) эквивалентны. Как показано выше, из шести условий (22) достаточно выполнить три условия (25) или (26), если существуют ортогональные решения уравнений (23) или (30).

Перейдем к постоянным группы II. Пусть в (28) индексы $qrs = 322$ или $qrs = 233$, тогда

$$\begin{aligned} a_{ijkl}n_{j3}n_{k2}n_{l2} &= n_{i1}\hat{a}_{1322} + n_{i2}\hat{a}_{2322} + n_{i3}\hat{a}_{3322}, \\ a_{ijkl}n_{j2}n_{k3}n_{l3} &= n_{i1}\hat{a}_{1233} + n_{i2}\hat{a}_{2233} + n_{i3}\hat{a}_{3233}. \end{aligned} \tag{31}$$

Если принять, что в (31) выполняются равенства (см. (21))

$$\hat a_{3233} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{43} = \hat a_{2322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{42}, \quad \hat a_{1322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{52} = 0, \quad \hat a_{1233} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{63} = 0, \tag{32}$$

то выражения (31) сводятся к выражениям

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k2}n_{l2} = n_{i2}\hat a_{2322} + n_{i3}\hat a_{3322}, \qquad a_{ijkl}n_{j2}n_{k3}n_{l3} = n_{i2}\hat a_{2233} + n_{i3}\hat a_{3233}, \tag{33}$$

которые являются условиями экстремума постоянной

$$\frac{\nu_{32}}{E_2} = \hat a_{3322} = \hat a_{32} = n_{i3}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2} \tag{34}$$

при ограничениях $n_{i2}n_{i2} = 1$, $n_{i3}n_{i3} = 1$, $n_{i2}n_{i3} = 0$. Применяя метод Лагранжа для нахождения условного экстремума функции (34) при указанных ограничениях, получаем необходимые условия (33). Очевидно, что условия (32), (33) эквивалентны.

Аналогичным образом для величин $\hat a_{31}$, $\hat a_{21}$ (17) в качестве условий их экстремума получаем уравнения вида (32) или (33):

$$\hat a_{2311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{41} = 0, \quad \hat a_{1311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{51} = \hat a_{3133} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{53}, \quad \hat a_{2133} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{63} = 0; \tag{35}$$

$$\hat a_{3211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{41} = 0, \quad \hat a_{3122} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{52} = 0, \quad \hat a_{1211} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{61} = \hat a_{2122} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{62}; \tag{36}$$

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k1}n_{l1} = n_{i1}\hat a_{1311} + n_{i3}\hat a_{3311}, \qquad a_{ijkl}n_{j1}n_{k3}n_{l3} = n_{i1}\hat a_{1133} + n_{i3}\hat a_{3133}; \tag{37}$$

$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k1}n_{l1} = n_{i1}\hat a_{1211} + n_{i2}\hat a_{2211}, \qquad a_{ijkl}n_{j1}n_{k2}n_{l2} = n_{i1}\hat a_{1122} + n_{i2}\hat a_{2122}. \tag{38}$$

Очевидно, что условия (35) и (37), (36) и (38) эквивалентны. Если выполняются уравнения (32) (или (35), или (36)), в общем случае анизотропии число независимых постоянных упругости уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat a_{32}$ (34) (или $\hat a_{31}$, или $\hat a_{21}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы II, условия (32), (35), (36) выполняются одновременно, а матрица $\hat a_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{21} & a_{33} & & & \\ 0 & a_{51} & a_{51} & a_{44} & & \\ a_{51} & 0 & a_{51} & a_{54} & a_{55} & \\ a_{51} & a_{51} & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

и содержит 11 независимых компонент.

Переходим к постоянным группы III. Пусть в (28) индексы $qrs = 332$ или $qrs = 223$, тогда

$$\begin{aligned} a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l2} &= n_{i1}\hat a_{1332} + n_{i2}\hat a_{2332} + n_{i3}\hat a_{3332}, \\ a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l3} &= n_{i1}\hat a_{1223} + n_{i2}\hat a_{2223} + n_{i3}\hat a_{3223}. \end{aligned} \tag{39}$$

Если выполняются равенства (см. (21))

$$\hat a_{3332} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{43} = \hat a_{2223} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat a_{42}, \quad \hat a_{1332} = \frac{1}{2}\,\hat a_{54} = 0, \quad \hat a_{1223} = \frac{1}{2}\,\hat a_{64} = 0, \tag{40}$$

то соотношения (39) сводятся к соотношениям

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l2} = n_{i2}\hat a_{2332} + n_{i3}\hat a_{3332}, \qquad a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l3} = n_{i2}\hat a_{2223} + n_{i3}\hat a_{3223}, \tag{41}$$

которые являются условиями экстремума величины

$$\frac{1}{2G_{23}} = 2\hat{a}_{2323} = \hat{a}_{44} = 2n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l3} \tag{42}$$

при ограничениях $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$, $p, q = 2, 3$. Применяя метод Лагранжа для нахождения условного экстремума функции (42) при указанных ограничениях, непосредственно получаем необходимые условия (41). Очевидно, что условия (40), (41) эквивалентны.

Аналогично для постоянных $\hat{a}_{55}$, $\hat{a}_{66}$ в качестве условий их экстремума получаем уравнения вида (40) или (41):

$$\hat{a}_{3331} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{53} = \hat{a}_{1113} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{51}, \quad \hat{a}_{2331} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{54} = 0, \quad \hat{a}_{2113} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{65} = 0; \tag{43}$$

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1331} + n_{i3}\hat{a}_{3331}, \qquad a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l3} = n_{i1}\hat{a}_{1113} + n_{i3}\hat{a}_{3113}; \tag{44}$$

$$\hat{a}_{2221} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{62} = \hat{a}_{1112} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{61}, \quad \hat{a}_{3221} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{64} = 0, \quad \hat{a}_{3112} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{65} = 0; \tag{45}$$

$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1221} + n_{i2}\hat{a}_{2221}, \qquad a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l2} = n_{i1}\hat{a}_{1112} + n_{i2}\hat{a}_{2112}. \tag{46}$$

Очевидно, что условия (43) и (44), (45) и (46) эквивалентны. Кроме того, формулы (40), (41); (43), (44); (45), (46) получаются друг из друга при круговой перестановке осей или индексов 1, 2, 3. Данное свойство имеет место и для постоянных остальных групп I, ..., VI.

Если выполняются уравнения (40) (или (43), или (45)), число независимых постоянных упругости уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat{a}_{44}$ (или $\hat{a}_{55}$, или $\hat{a}_{66}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы III, условия (40), (43), (45) выполняются одновременно, а матрица $\hat{a}_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{51} & a_{51} & a_{44} & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{51} & 0 & a_{44} & \\ a_{51} & a_{51} & a_{63} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

и содержит 11 независимых компонент.

Для постоянной (см. (17))

$$\frac{\nu_{54}}{4G_{23}} = \hat{a}_{3132} = \frac{1}{2}\,\hat{a}_{54} = n_{i3}n_{j1}a_{ijkl}n_{k3}n_{l2}$$

из группы IV аналогичным образом получаем условия экстремума (см. (21))

$$\hat{a}_{44} = \hat{a}_{55}, \qquad \hat{a}_{43} = \hat{a}_{41} + \hat{a}_{65}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{53} = \hat{a}_{52} + \hat{a}_{64}/\sqrt{2} \tag{47}$$

или эквивалентные условия

$$\begin{gathered} a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l2} = n_{i1}\hat{a}_{1332} + n_{i2}\hat{a}_{2332} + n_{i3}\hat{a}_{3332}, \\ a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1331} + n_{i2}\hat{a}_{2331} + n_{i3}\hat{a}_{3331}, \\ a_{ijkl}(n_{j1}n_{k3}n_{l2} + n_{j2}n_{k3}n_{l1}) = n_{i1}(\hat{a}_{1132} + \hat{a}_{1231}) + n_{i2}(\hat{a}_{2132} + \hat{a}_{2231}) + n_{i3}(\hat{a}_{3132} + \hat{a}_{3231}), \end{gathered} \tag{48}$$

причем матрица коэффициентов при n_{ip} в правой части (48) должна быть симметричной, что равносильно условиям (47). При круговой перестановке осей или индексов 1, 2, 3 из (47), (48) получаем условия экстремума постоянной (см. (17)) $\hat{a}_{1213} = \hat{a}_{65}/2$:

$$\hat{a}_{55} = \hat{a}_{66}, \qquad \hat{a}_{51} = \hat{a}_{52} + \hat{a}_{64}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{61} = \hat{a}_{63} + \hat{a}_{54}/\sqrt{2}; \tag{49}$$

$$a_{ijkl}(n_{j2}n_{k1}n_{l3}+n_{j3}n_{k1}n_{l2})=n_{i1}(\hat a_{1213}+\hat a_{1312})+n_{i2}(\hat a_{2213}+\hat a_{2312})+n_{i3}(\hat a_{3213}+\hat a_{3312}),$$
$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l3}=n_{i1}\hat a_{1113}+n_{i2}\hat a_{2113}+n_{i3}\hat a_{3113},$$
$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l2}=n_{i1}\hat a_{1112}+n_{i2}\hat a_{2112}+n_{i3}\hat a_{3112}$$

и постоянной (см. (17)) $\hat a_{1223}=\hat a_{64}/2$:

$$\hat a_{66}=\hat a_{44},\qquad \hat a_{62}=\hat a_{63}+\hat a_{54}/\sqrt2,\qquad \hat a_{42}=\hat a_{41}+\hat a_{65}/\sqrt2; \tag{50}$$
$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l3}=n_{i1}\hat a_{1223}+n_{i2}\hat a_{2223}+n_{i3}\hat a_{3223},$$
$$a_{ijkl}(n_{j3}n_{k2}n_{l1}+n_{j1}n_{k2}n_{l3})=n_{i1}(\hat a_{1321}+\hat a_{1123})+n_{i2}(\hat a_{2321}+\hat a_{2123})+n_{i3}(\hat a_{3321}+\hat a_{3123}),$$
$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l1}=n_{i1}\hat a_{1221}+n_{i2}\hat a_{2221}+n_{i3}\hat a_{3221}.$$

Если выполняются уравнения (47) (или (49), или (50)), число независимых постоянных уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat a_{54}$ (или $\hat a_{65}$, или $\hat a_{64}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы IV, условия (47), (49), (50) выполняются одновременно, при этом матрица $\hat a_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \text{sym} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{41}+a_{54}/\sqrt2 & a_{41}+a_{54}/\sqrt2 & a_{44} & & \\ a_{52}+a_{54}/\sqrt2 & a_{52} & a_{52}+a_{54}/\sqrt2 & a_{54} & a_{44} & \\ a_{63}+a_{54}/\sqrt2 & a_{63}+a_{54}/\sqrt2 & a_{63} & a_{54} & a_{54} & a_{44} \end{bmatrix}$$

и содержит 11 независимых компонент.

Для постоянной (см. (17))

$$\frac{\nu_{41}}{\sqrt2 E_1}=\hat a_{2311}=\frac{1}{\sqrt2}\,\hat a_{41}=n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1}$$

из группы V аналогичным образом получаем условия экстремума (см. (21))

$$\hat a_{31}=\hat a_{21},\qquad \hat a_{54}=\hat a_{61}/\sqrt2,\qquad \hat a_{64}=\hat a_{51}/\sqrt2 \tag{51}$$

или эквивалентные условия

$$\begin{gathered}2a_{ijkl}n_{j1}n_{k2}n_{l3}=n_{i1}2\hat a_{1123}+n_{i2}2\hat a_{2123}+n_{i3}2\hat a_{3123},\\ a_{ijkl}n_{j3}n_{k1}n_{l1}=n_{i1}\hat a_{1311}+n_{i2}\hat a_{2311}+n_{i3}\hat a_{3311},\\ a_{ijkl}n_{j2}n_{k1}n_{l1}=n_{i1}\hat a_{1211}+n_{i2}\hat a_{2211}+n_{i3}\hat a_{3211},\end{gathered} \tag{52}$$

причем матрица коэффициентов при n_{ip} в правой части (52) должна быть симметричной, что равносильно условиям (51). При круговой перестановке осей или индексов 1, 2, 3 из (51), (52) получаем условия экстремума постоянной (см. (17)) $\hat a_{1322}=\hat a_{52}/\sqrt2$:

$$\hat a_{54}=\hat a_{62}/\sqrt2,\qquad \hat a_{32}=\hat a_{21},\qquad \hat a_{65}=\hat a_{42}/\sqrt2; \tag{53}$$
$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k2}n_{l2}=n_{i1}\hat a_{1322}+n_{i2}\hat a_{2322}+n_{i3}\hat a_{3322},$$
$$2a_{ijkl}n_{j2}n_{k3}n_{l1}=n_{i1}2\hat a_{1231}+n_{i2}2\hat a_{2231}+n_{i3}2\hat a_{3231},$$
$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k2}n_{l2}=n_{i1}\hat a_{1122}+n_{i2}\hat a_{2122}+n_{i3}\hat a_{3122}$$

и постоянной (см. (17)) $\hat a_{1233}=\hat a_{63}/\sqrt2$:

$$\hat a_{64}=\hat a_{53}/\sqrt2,\qquad \hat a_{65}=\hat a_{43}/\sqrt2,\qquad \hat a_{32}=\hat a_{31}; \tag{54}$$

$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k3}n_{l3} = n_{i1}\hat{a}_{1233} + n_{i2}\hat{a}_{2233} + n_{i3}\hat{a}_{3233},$$
$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k3}n_{l3} = n_{i1}\hat{a}_{1133} + n_{i2}\hat{a}_{2133} + n_{i3}\hat{a}_{3133},$$
$$2a_{ijkl}n_{j3}n_{k1}n_{l2} = n_{i1}2\hat{a}_{1312} + n_{i2}2\hat{a}_{2312} + n_{i3}2\hat{a}_{3312}.$$

Если выполняются уравнения (51) (или (53), или (54)), число независимых постоянных упругости в общем случае анизотропии уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat{a}_{41}$ (или $\hat{a}_{52}$, или $\hat{a}_{63}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы V, условия (51), (53), (54) выполняются одновременно, при этом матрица $\hat{a}_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{21} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{42} & a_{44} & & \\ a_{51} & a_{41} & a_{51} & a_{61}/\sqrt{2} & a_{55} & \\ a_{61} & a_{61} & a_{41} & a_{51}/\sqrt{2} & a_{42}/\sqrt{2} & a_{66} \end{bmatrix}$$

и содержит 11 независимых постоянных.

Для постоянной (см. (17))

$$\frac{\nu_{42}}{\sqrt{2}E_2} = \hat{a}_{2322} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_{42} = n_{i2}n_{j3}a_{ijkl}n_{k2}n_{l2}$$

из группы VIa аналогичным образом находим условия экстремума (см. (21))

$$\hat{a}_{44} = \hat{a}_{22} - \hat{a}_{32}, \qquad \hat{a}_{62} = 0, \qquad \hat{a}_{64} = -\hat{a}_{52}/\sqrt{2} \tag{55}$$

или эквивалентные условия, получаемые непосредственно методом Лагранжа для нахождения условного экстремума либо из формул (28) при соответствующих значениях индексов q, r, s:

$$\begin{gathered} a_{ijkl}(n_{j3}n_{k2}n_{l2} + 2n_{j2}n_{k3}n_{l2}) = n_{i2}(\hat{a}_{2322} + 2\hat{a}_{2232}) + n_{i3}(\hat{a}_{3322} + 2\hat{a}_{3232}), \\ a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = n_{i2}\hat{a}_{2222} + n_{i3}\hat{a}_{3222}, \end{gathered} \tag{56}$$

причем матрица коэффициентов при n_{ip} в правой части (56) должна быть симметричной, что равносильно первому условию (55).

При круговой перестановке осей или индексов 1, 2, 3 из (55), (56) получаем условия экстремума постоянной (см. (17)) $\hat{a}_{1333} = \hat{a}_{53}/\sqrt{2}$:

$$\hat{a}_{54} = -\hat{a}_{63}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{55} = \hat{a}_{33} - \hat{a}_{31}, \qquad \hat{a}_{43} = 0; \tag{57}$$

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = n_{i1}\hat{a}_{1333} + n_{i3}\hat{a}_{3333},$$

$$a_{ijkl}(n_{j1}n_{k3}n_{l3} + 2n_{j3}n_{k1}n_{l3}) = n_{i1}(\hat{a}_{1133} + 2\hat{a}_{1313}) + n_{i3}(\hat{a}_{3133} + 2\hat{a}_{3313})$$

и постоянной (см. (17)) $\hat{a}_{1211} = \hat{a}_{61}/\sqrt{2}$:

$$\hat{a}_{51} = 0, \qquad \hat{a}_{65} = -\hat{a}_{41}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{66} = \hat{a}_{11} - \hat{a}_{21}; \tag{58}$$

$$a_{ijkl}(n_{j2}n_{k1}n_{l1} + 2n_{j1}n_{k2}n_{l1}) = n_{i1}(\hat{a}_{1211} + 2\hat{a}_{1121}) + n_{i2}(\hat{a}_{2211} + 2\hat{a}_{2121}),$$

$$a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1111} + n_{i2}\hat{a}_{2111}.$$

Если выполняются уравнения (55) (или (57), или (58)), число независимых постоянных упругости уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat{a}_{42}$ (или $\hat{a}_{53}$, или $\hat{a}_{61}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы VIa, условия (55), (57), (58) выполняются одновременно и матрица $\hat{a}_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{61} & 0 & a_{22} - a_{32} & & \\ 0 & a_{52} & a_{61} & -a_{63}/\sqrt{2} & a_{33} - a_{31} & \\ a_{61} & 0 & a_{63} & -a_{52}/\sqrt{2} & -a_{41}/\sqrt{2} & a_{11} - a_{21} \end{bmatrix} \tag{59}$$

и содержит 10 независимых постоянных.

Для постоянной (см. (17))

$$\frac{\nu_{51}}{\sqrt{2}E_1} = \hat{a}_{1311} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{a}_{51} = n_{i1}n_{j3}a_{ijkl}n_{k1}n_{l1}$$

из группы VIb аналогичным образом получаем условия экстремума (см. (21))

$$\hat{a}_{61} = 0, \qquad \hat{a}_{55} = \hat{a}_{11} - \hat{a}_{31}, \qquad \hat{a}_{65} = -\hat{a}_{41}/\sqrt{2} \tag{60}$$

или эквивалентные условия

$$\begin{gathered} a_{ijkl}(n_{j3}n_{k1}n_{l1} + 2n_{j1}n_{k3}n_{l1}) = n_{i1}(\hat{a}_{1311} + 2\hat{a}_{1131}) + n_{i3}(\hat{a}_{3311} + 2\hat{a}_{3131}), \\ a_{ijkl}n_{j1}n_{k1}n_{l1} = n_{i1}\hat{a}_{1111} + n_{i3}\hat{a}_{3111}, \end{gathered} \tag{61}$$

причем матрица коэффициентов при n_{ip} в правой части (61) должна быть симметричной, что равносильно второму условию (60).

При круговой перестановке осей или индексов 1, 2, 3 из (60), (61) получаем условия экстремума постоянной (см. (17), (21)) $\hat{a}_{1222} = \hat{a}_{62}/\sqrt{2}$:

$$\hat{a}_{64} = -\hat{a}_{52}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{42} = 0, \qquad \hat{a}_{66} = \hat{a}_{22} - \hat{a}_{21}; \tag{62}$$

$$a_{ijkl}n_{j2}n_{k2}n_{l2} = n_{i1}\hat{a}_{1222} + n_{i2}\hat{a}_{2222},$$

$$a_{ijkl}(n_{j1}n_{k2}n_{l2} + 2n_{j2}n_{k1}n_{l2}) = n_{i1}(\hat{a}_{1122} + 2\hat{a}_{1212}) + n_{i2}(\hat{a}_{2122} + 2\hat{a}_{2212})$$

и постоянной (см. (17), (21)) $\hat{a}_{2333} = \hat{a}_{43}/\sqrt{2}$:

$$\hat{a}_{44} = \hat{a}_{33} - \hat{a}_{32}, \qquad \hat{a}_{54} = -\hat{a}_{63}/\sqrt{2}, \qquad \hat{a}_{53} = 0; \tag{63}$$

$$a_{ijkl}n_{j3}n_{k3}n_{l3} = n_{i2}\hat{a}_{2333} + n_{i3}\hat{a}_{3333},$$

$$a_{ijkl}(n_{j2}n_{k3}n_{l3} + 2n_{j3}n_{k2}n_{l3}) = n_{i2}(\hat{a}_{2233} + 2\hat{a}_{2323}) + n_{i3}(\hat{a}_{3233} + 2\hat{a}_{3323}).$$

Если выполняются уравнения (60) (или (62), или (63)), число независимых постоянных упругости в общем случае анизотропии (триклинная сингония) уменьшается до 18, при этом постоянные $\hat{a}_{51}$ (или $\hat{a}_{62}$, или $\hat{a}_{43}$) принимают некоторые экстремальные значения. В случае если оси 1, 2, 3 равноправны для постоянных группы VIb, условия (60), (62), (63) выполняются одновременно. Тогда матрица $\hat{a}_{pq}$ или a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & 0 & a_{51} & a_{33} - a_{32} & & \\ a_{51} & a_{52} & 0 & -a_{63}/\sqrt{2} & a_{11} - a_{31} & \\ 0 & a_{51} & a_{63} & -a_{52}/\sqrt{2} & -a_{41}/\sqrt{2} & a_{22} - a_{21} \end{bmatrix} \tag{64}$$

и содержит 10 независимых постоянных.

Если в матрицах (59), (64) положить $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, $a_{61} = 0$, $a_{51} = 0$ и вместо a_{ij} использовать A_{ij}, то (59), (64) принимают вид матрицы модулей упругости для так называемой среды Грина [25–27]

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{32} & A_{11} & & & \\ A_{41} & 0 & 0 & A_{11}-A_{32} & & \\ 0 & A_{52} & 0 & -A_{63}/\sqrt{2} & A_{11}-A_{31} & \\ 0 & 0 & A_{63} & -A_{52}/\sqrt{2} & -A_{41}/\sqrt{2} & A_{11}-A_{21} \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Среда Грина характеризуется тем, что для нее любое направление является продольной нормалью, т. е. в любом направлении распространяется чисто продольная волна [28]. Если матрица a_{ij} коэффициентов податливости анизотропного материала имеет структуру вида (65), то модуль Юнга (12) в направлении n_i не зависит от n_i и одинаков для всех направлений: $1/E_n = a_{11}$, как и в случае изотропного материала [28]. Частный случай среды Грина (65) вида

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -2c^2 & 0 & & & \text{sym} & \\ -2b^2 & -2a^2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c^2 \end{bmatrix} \tag{66}$$

(a, b, c — постоянные кристалла) рассматривался С. В. Ковалевской [29] и В. Вольтеррой [30], а ранее и Г. Ламе [29, 30] при исследовании распространения света в кристаллических средах. Заметим, что матрица (66) не является положительно-определенной, кроме того, скорость продольных волн равна нулю, так как $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$.

Разделение постоянных упругости на группы более очевидно, если принять, что оси 1, 2, 3 равноправны для всех постоянных или в материале имеется ось симметрии третьего порядка, равнонаклоненная к осям 1, 2, 3, тогда постоянные каждой группы будут одинаковыми, при этом матрица a_{ij} принимает вид [24]

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{21} & a_{11} & & & \\ a_{41} & a_{61} & a_{51} & a_{44} & & \\ a_{51} & a_{41} & a_{61} & a_{54} & a_{44} & \\ a_{61} & a_{51} & a_{41} & a_{54} & a_{54} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{67}$$

и содержит семь независимых постоянных.

В качестве примера рассмотрим материалы с кубической симметрией [8], имеющие матрицу

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{21} & a_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \tag{68}$$

для которых условия (26) принимают вид

$$\begin{gathered}\hat a_{51} = \sqrt{2}a(n_{13}n_{11}^3 + n_{23}n_{21}^3 + n_{33}n_{31}^3) = 0,\\ \hat a_{62} = \sqrt{2}a(n_{11}n_{12}^3 + n_{21}n_{22}^3 + n_{31}n_{32}^3) = 0,\\ \hat a_{43} = \sqrt{2}a(n_{12}n_{13}^3 + n_{22}n_{23}^3 + n_{32}n_{33}^3) = 0, \qquad a = a_{11} - a_{21} - a_{44},\end{gathered} \tag{69}$$

где n_{ip} — ортогональная матрица: $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$. Матрица (68) соответствует матрице (67), так как материалы с кубической сингонией имеют ось симметрии третьего порядка, равнонаклоненную к осям 1, 2, 3 [8]. Очевидно, что для исходной системы координат $n_{ip} = \delta_{ip}$ условия (69) выполняются и матрица (68) принимает вид (27).

Другие системы координат получаются как решения уравнений (69) или уравнений вида (19) или (23) (см. также [14]):

$$\begin{gathered}(an_1^2 + a_{21} + a_{44} - \lambda)n_1 = 0, \qquad (an_2^2 + a_{21} + a_{44} - \lambda)n_2 = 0,\\ (an_3^2 + a_{21} + a_{44} - \lambda)n_3 = 0, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.\end{gathered} \tag{70}$$

Уравнения (70) имеют следующие решения, определяющие направления, для которых модули Юнга принимают экстремальные значения $\lambda = 1/E$:

$$\begin{gathered}n_1^2 = 1, \qquad n_2 = 0, \qquad n_3 = 0, \qquad \lambda = a_{11},\\ n_1 = 0, \qquad n_2^2 = 1, \qquad n_3 = 0, \qquad \lambda = a_{11},\\ n_1 = 0, \qquad n_2 = 0, \qquad n_3^2 = 1, \qquad \lambda = a_{11},\\ n_1 = 0, \qquad n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\,(a_{11} + a_{21} + a_{44}) = a_{11} - \frac{1}{2}\,a,\\ n_2 = 0, \qquad n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\,(a_{11} + a_{21} + a_{44}) = a_{11} - \frac{1}{2}\,a,\\ n_3 = 0, \qquad n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\,(a_{11} + a_{21} + a_{44}) = a_{11} - \frac{1}{2}\,a,\\ n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3}, \qquad \lambda = \frac{1}{3}\,[a_{11} + 2(a_{21} + a_{44})] = a_{11} - \frac{2}{3}\,a.\end{gathered} \tag{71}$$

Формулы (71) определяют 26 направлений, являющихся также продольными нормалями [31], которые запишем в виде столбцов

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{matrix} \tag{72}$$

$$\begin{matrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{matrix}$$

Из этих 26 направлений нужно составлять ортогональные матрицы n_{ip}, $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$, чтобы получить все системы координат, в которых матрица a_{ij} в случае материала с кубической сингонией имеет вид (27). В некоторых осях n_{ip}, образуемых из столбцов (72), матрица a_{ij} сохраняет вид (68), в других, например при

$$n_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad n_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{73}$$

принимает вид

$$\hat{a}_{pq} = \begin{bmatrix} a_{11} - a/2 & & & & & \\ a_{21} + a/2 & a_{11} - a/2 & & & \text{sym} & \\ a_{21} & a_{21} & a_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} + a \end{bmatrix} \tag{74}$$

или вид, получаемый из (74) путем круговой перестановки постоянных в каждой из групп I, ..., VI. Матрица (74) похожа на матрицу для случая трансверсальной изотропии с осью симметрии x_3, но $\hat{a}_{66} \neq \hat{a}_{11} - \hat{a}_{21} = a_{44}$.

Заметим, что элементы матриц (73) удовлетворяют уравнениям (69), при этом выполняются также условия (25). Также возможны решения уравнений (69), для которых условия (25) не выполняются. Например, для матрицы

$$n_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \tag{75}$$

уравнения (69) выполняются, а условия (25) не выполняются, при этом

$$\hat{a}_{pq} = \begin{bmatrix} a_{11} - 2a/3 & & & & & \\ a_{21} + a/3 & a_{11} - a/2 & & & \text{sym} & \\ a_{21} + a/3 & a_{21} + a/6 & a_{11} - a/2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} + a/3 & & \\ 0 & a/3 & -a/3 & 0 & a_{44} + 2a/3 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,a/3 & 0 & a_{44} + 2a/3 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Из формулы (76) следует, что $\hat{a}_{53} = -a/3 \neq 0$, т. е. условия (25) не выполняются. Это обусловлено тем, что третий столбец в матрице (75) не входит в перечень направлений (продольных нормалей) (72), удовлетворяющих уравнениям (70). Таким образом, условия (25), (26) выполняются одновременно для тех решений n_{ip}, для которых каждый столбец n_{i1}, n_{i2}, n_{i3} является также решением уравнений (23).

Матрица (68) имеет следующие собственные значения (податливости) [32]:

$$\mu_1 = a_{11} + 2a_{21} > 0, \qquad \mu_2 = \mu_3 = a_{11} - a_{21} > 0, \qquad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = a_{44} > 0. \tag{77}$$

Три экстремальных значения $\lambda = 1/E$ из (71) выражаются через μ_i из (77) по формулам

$$\begin{gathered} \lambda_1 = a_{11} = \frac{1}{3}\,(\mu_1 + 2\mu_2), \qquad \lambda_2 = a_{11} - \frac{1}{2}\,a = \frac{1}{6}\,(2\mu_1 + \mu_2 + 3\mu_4), \\ \lambda_3 = a_{11} - \frac{2}{3}\,a = \frac{1}{3}\,(\mu_1 + 2\mu_4), \qquad a = \mu_2 - \mu_4. \end{gathered} \tag{78}$$

В зависимости от соотношений между величинами μ_1, μ_2, μ_4 (77) материалы с кубической сингонией делятся на шесть классов [32]. Соотношения между λ_1, λ_2, λ_3 (см. (78)) зависят от соотношений между μ_1, μ_2, μ_4. Из (78) следует, что экстремальные значения модулей Юнга $\lambda_1 = 1/E_1$, $\lambda_2 = 1/E_2$, $\lambda_3 = 1/E_3$ в соответствующих направлениях (71), (72) связаны равенством

$$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 4\lambda_2, \qquad \frac{1}{E_1} + \frac{3}{E_3} = \frac{4}{E_2}. \tag{79}$$

При этом, в случае если $a > 0$,

$$E_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{a_{11}}, \qquad E_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{a_{11} - 2a/3},$$

т. е.

$$\frac{1}{a_{11}} < \frac{1}{a_{11} - a/2} < \frac{1}{a_{11} - 2a/3}: \qquad E_1 < E_2 < E_3,$$

в случае если $a < 0$,

$$E_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{a_{11} - 2a/3}, \qquad E_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{a_{11}},$$

т. е.

$$\frac{1}{a_{11} - 2a/3} < \frac{1}{a_{11} - a/2} < \frac{1}{a_{11}}: \qquad E_3 < E_2 < E_1.$$

Если вместо a_{ij} запишем A_{ij}, тогда из (71), (78) получаем скорости чисто продольных волн в соответствующих направлениях (71), (72):

$$\begin{gathered} \rho c_1^2 = \lambda_1 = A_{11}, \qquad \rho c_2^2 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\,(A_{11} + A_{21} + A_{44}) = A_{11} - \frac{1}{2}\,A, \\ \rho c_3^2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}\,[A_{11} + 2(A_{21} + A_{44})] = A_{11} - \frac{2}{3}\,A, \end{gathered} \tag{80}$$

где $A = A_{11} - A_{21} - A_{44} = \tilde\lambda_2 - \tilde\lambda_4$; $\tilde\lambda_2 = A_{11} - A_{21} > 0$, $\tilde\lambda_4 = A_{44} > 0$ — собственные модули упругости; ρ — постоянная плотность материала. Из (80) и первого равенства (79) следует, что скорости c_1, c_2, c_3 чисто продольных волн в соответствующих направлениях в материале с кубической симметрией связаны соотношением

$$c_1^2 + 3c_3^2 = 4c_2^2, \tag{81}$$

т. е. как стороны прямоугольного треугольника с катетами c_1, $\sqrt{3}\,c_3$ и гипотенузой $2c_2$. Полагая в (80) $A > 0$, получаем

$$c_3^2 < c_2^2 < c_1^2, \qquad c_3 < c_2 < c_1,$$

полагая $A < 0$ —

$$c_1^2 < c_2^2 < c_3^2, \qquad c_1 < c_2 < c_3.$$

Экстремальные значения модулей Юнга для материалов с кубической симметрией также рассматривались в [33], однако в данной работе значение $1/E_2 = \lambda_2 = a_{11} - a/2$ (см. (78)) не приводится (см. также [14]). Далее с использованием формул (40)–(46) можно анализировать экстремальные значения модулей сдвига.

Итак, в работе получены разные формы условий экстремальности (стационарности) любой постоянной упругости (модулей Юнга, сдвига и др.) при произвольной анизотропии. Эти условия стационарности позволяют находить экстремальные значения любой постоянной упругости, а также определяют главные системы координат, в которых число независимых постоянных уменьшается с 21 до 18, а в случае выполнения условий (25), (26) — до 15. Таких главных систем координат может быть несколько (см., например, (68), (74)). В случаях когда постоянные какой-либо из шести групп I, ..., VI равноправны относительно перестановок осей 1, 2, 3, число независимых постоянных можно уменьшить до 11 или 10. Для материалов с кубической симметрией установлены зависимость (79) между экстремальными значениями модулей Юнга и аналогичная зависимость (81) между квадратами скоростей чисто продольных волн, распространяющихся в соответствующих направлениях.

Автор выражает благодарность Б. Д. Аннину и А. В. Шутову за полезные обсуждения, способствовавшие уточнению результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Jarić J. P.** On the conditions for existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic materials // Mech. Res. Comm. 1994. V. 21, N 2. P. 153–174.
3. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
4. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
5. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.
6. **Остросаблин Н. И.** Канонические модули и общее решение уравнений двумерной статической задачи анизотропной упругости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 94–106.
7. **Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J.** Generalized proper states for anisotropic elastic materials // Arch. Mech. 2001. V. 53, N 4/5. P. 501–518.
8. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
9. **Борисович Ю. Г., Даринский Б. М., Кунаковская О. В.** Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах // Теорет. и мат. физика. 1993. Т. 94, № 1. С. 146–152.
10. **Гришин А. С., Лошицкий А. Р.** Энергия плоских упругих волн в анизотропных средах // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 5. С. 111–114.
11. **Vianello M.** Coaxiality of strain and stress in anisotropic linear elasticity // J. Elasticity. 1996. V. 42, N 3. P. 283–289.
12. **Geymonat G., Gilormini P.** On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media // J. Elasticity. 1999. V. 54, N 3. P. 253–266.
13. **Boulanger P., Hayes M.** On Young's modulus for anisotropic media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 819–820.
14. **Cazzani A., Rovati M.** Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40, N 7. P. 1713–1744.
15. **Cazzani A., Rovati M.** Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry // Intern. J. Solids Struct. 2005. V. 42, N 18/19. P. 5057–5096.
16. **Ting T. C. T.** The stationary values of Young's modulus for monoclinic and triclinic materials // J. Mech. 2005. V. 21, N 4. P. 249–253.
17. **Ting T. C. T.** Explicit expression of the stationary values of Young's modulus and the shear modulus for anisotropic elastic materials // J. Mech. 2005. V. 21, N 4. P. 255–266.

18. **Norris A. N.** Extreme values of Poisson's ratio and other engineering moduli in anisotropic materials // J. Mech. Mater. Struct. 2006. V. 1, N 4. P. 793–812.

19. **Бехтерев П.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1926. Т. 58, вып. 3. С. 415–446.

20. **de Saxcé G., Vallée C.** Invariant measures of the lack of symmetry with respect to the symmetry groups of 2D elasticity // J. Elasticity. 2013. V. 111, N 1. P. 21–39.

21. **Auffray N., Kolev B., Petitot M.** On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor // J. Elasticity. 2014. V. 115, N 1. P. 77–103.

22. **Norris A. N.** Quadratic invariants of elastic moduli // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2007. V. 60, N 3. P. 367–389.

23. **Остросаблин Н. И.** Об одной модели анизотропной ползучести материалов // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 114–119.

24. **Бехтерев П. В.** К систематике констант упругости анизотропных веществ // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1928. Т. 60, вып. 4. С. 351–353.

25. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

26. **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.

27. **Marciniak J. J.** The generalized scalar wave equation and linear differential invariants in linear elasticity // Intern. J. Engng Sci. 1989. V. 27, N 6. P. 679–688.

28. **Остросаблин Н. И.** Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 143–151.

29. **Ковалевская С. В.** О преломлении света в кристаллических средах // Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 75–135.

30. **Полищук Е. М.** Вито Вольтерра. Л.: Наука, 1977.

31. **Helbig K.** Longitudinal directions in media of arbitrary anisotropy // Geophysics. 1993. V. 58, N 5. P. 680–691.

32. **Остросаблин Н. И.** Критерии предельности и модель неупругого деформирования анизотропных сред // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 165–176.

33. **Hayes M., Shuvalov A.** On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poisson's ratio for cubic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1998. V. 65, N 3. P. 786–787.

Поступила в редакцию 28/I 2015 г.,
в окончательном варианте — 3/VII 2015 г.