УДК 533; 517.958

ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. П. Чупахин, А. А. Янченко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: chupakhin@hydro.nsc.ru, arseny@pm.me

Найдено и исследовано точное решение уравнений Эйлера релятивистской гидродинамики сжимаемой жидкости — релятивистский аналог вихря Овсянникова (особого вихря) в классической газовой динамике. Доказана теорема о представлении фактор-системы в виде объединения неинвариантной подсистемы для функции, определяющей отклонение вектора скорости от меридиана, и инвариантной подсистемы для функции, определяющей термодинамические параметры, фактор Лоренца и радиальную компоненту вектора скорости. Получены условия совместности переопределенной неинвариантной системы. Детально исследовано стационарное решение. Доказано, что инвариантная подсистема для него сводится к неявному дифференциальному уравнению. Исследовано многообразие ветвления решений этого уравнения, найдено множество особых точек. Доказано существование двух режимов течения — решений, описывающих вихревой источник релятивистского газа. Одно из этих решений определено только на конечном расстоянии от источника, другое является аналогом режима сверхзвукового истечения газа с поверхности шара.

Ключевые слова: вихрь Овсянникова, релятивистская гидродинамика, групповой анализ.

DOI: 10.15372/PMTF20190201

1. Уравнения релятивистской газовой динамики. Уравнения релятивистской газовой динамики (РГД) [1] могут быть записаны в виде

$$(\Gamma\rho)_t + \nabla\cdot(\Gamma\rho\boldsymbol{u}) = 0, \qquad (\Gamma^2\rho w\boldsymbol{u})_t + \nabla\cdot(\Gamma^2\rho w\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla p = 0,$$
$$(\Gamma^2\rho w - p)_t + \nabla\cdot(\Gamma^2\rho w\boldsymbol{u}) = 0, \tag{1.1}$$

где скорость газа в лабораторной системе отсчета $\boldsymbol{u}$, плотность ρ и давление p, энтальпия $w = 1+(\gamma/(\gamma-1))p/\rho$, фактор Лоренца $\Gamma = (1-|\boldsymbol{u}|^2)^{-1/2}$ являются функциями независимых переменных — времени t и пространственных координат $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Выбрана система единиц, в которой скорость света $c = 1$, при этом для модуля скорости $|\boldsymbol{u}| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{3} u^{i2}\Big)^{1/2}$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{u}| < 1$.

© Чупахин А. П., Янченко А. А., 2019

Уравнения (1.1) записаны в виде законов сохранения, что удобно для численного моделирования [2–4]. Некоторые частные решения этих уравнений исследованы в работах [7–9].

При анализе свойств симметрии целесообразно использовать другую форму уравнений (1.1). Введем величины

$$a = \Gamma\rho, \qquad b = \Gamma^2\rho w, \qquad d = b/a = \Gamma w \tag{1.2}$$

и обозначим через $D = \partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla$ полную производную. Тогда первое и последнее уравнения системы (1.1) записываются в виде

$$Da + a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \qquad Db + b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = p_t. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует уравнение для d

$$Dd = a^{-1}p_t. \tag{1.4}$$

Уравнение импульсов, записанное через функции (1.2), имеет вид

$$(Db + b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + bD\boldsymbol{u} + \nabla p = 0. \tag{1.5}$$

Заменяя выражение в скобках в первом слагаемом в (1.5) выражением из второго уравнения (1.3), находим

$$bD\boldsymbol{u} + p_t\boldsymbol{u} + \nabla p = 0. \tag{1.6}$$

С учетом уравнений (1.3), (1.6) получаем уравнения РГД в виде

$$bD\boldsymbol{u} + p_t\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \quad Da + a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \quad aDd = p_t, \tag{1.7}$$

где величины a, b, d определяются формулами (1.2).

2. Уравнения РГД в сферических и специальных координатах. Запишем уравнения (1.7) в сферических координатах (r, θ, φ) [10]:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

где $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ — радиус, широта и долгота; U, V, W — соответствующие компоненты вектора скорости в сферической системе координат. Компоненты вектора скорости в декартовой и сферической системах координат связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\mathcal{D} = \partial_t + U\,\partial_r$. Система (1.7) в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{gathered}
ad\Big(\mathcal{D}U + \frac{V}{r}\,U_\theta + \frac{W}{r\sin\theta}\,U_\varphi - \frac{1}{r}\,(V^2 + W^2)\Big) + p_tU + p_r = 0, \\
ad\Big(\mathcal{D}V + \frac{V}{r}\,V_\theta + \frac{W}{r\sin\theta}\,V_\varphi + \frac{UV}{r} - \frac{1}{r}\,W^2\,\mathrm{ctg}\,\theta\Big) + p_tV + \frac{1}{r}\,p_\theta = 0, \\
ad\Big(\mathcal{D}W + \frac{V}{r}\,W_\theta + \frac{W}{r\sin\theta}\,W_\varphi + \frac{UW}{r} + \frac{VW}{r}\,\mathrm{ctg}\,\theta\Big) + p_tW + \frac{1}{r\sin\theta}\,p_\varphi = 0, \\
\mathcal{D}d + \frac{V}{r}\,d_\theta + \frac{W}{r\sin\theta}\,d_\varphi = \frac{1}{a}\,p_t, \\
\mathcal{D}a + \frac{V}{r}\,a_\theta + \frac{W}{r\sin\theta}\,a_\varphi + a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = r^{-2}(r^2U)_r + (r\sin\theta)^{-1}(W_\varphi + (\sin\theta V)_\theta)$.

Для касательной составляющей вектора скорости $\boldsymbol{u}_\tau = (V, W)$, лежащей в плоскости Π_τ, касательной к сфере $r = \mathrm{const}$, введем новые полярные координаты H и ω:

$$V = H\cos\omega, \qquad W = H\sin\omega. \tag{2.2}$$

Здесь $H = \sqrt{V^2 + W^2}$; $\omega = \operatorname{arctg} W/V$ — угол между вектором $\boldsymbol{u}_\tau$ и меридианом сферы.

В обозначениях функций, введенных в (2.2), система (2.1) приводится к виду

$$\begin{gathered}
ad\Big(DU - \frac{1}{r}\,H^2\Big) + p_t U + p_r = 0,\\
ad\Big(DH + \frac{1}{r}\,UH\Big) + p_t H + \frac{1}{r}\,\Big(\cos\omega p_\theta + \frac{\sin\omega}{\sin\theta}\,p_\varphi\Big) = 0,\\
ad\Big(D\omega + \frac{1}{r}\,H\sin\omega\operatorname{ctg}\theta\Big) + \frac{1}{rH}\Big(\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\,p_\varphi - \sin\omega p_\theta\Big) = 0,\\
Da + a\Big(\frac{1}{r^2}\,(r^2U)_r + \frac{1}{r\sin\theta}\,[(H\cos\omega\sin\theta)_\theta + (H\sin\omega)_\varphi]\Big) = 0,\\
Dd = \frac{1}{a}\,p_t,
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где полная производная D задана формулой

$$D = \partial_t + U\,\partial_r + \frac{H}{r}\Big(\cos\omega\partial_\theta + \frac{\sin\omega}{\sin\theta}\,\partial_\varphi\Big),$$

величины a, b, d — формулами (1.2), H, ω — формулой (2.2).

Система (2.3) является основной при построении решения типа особого вихря (вихря Овсянникова) для уравнений РГД.

3. Особый вихрь (вихрь Овсянникова) для РГД. Особым вихрем (вихрем Овсянникова) называется решение дифференциальных уравнений механики или математической физики, являющееся частично инвариантным относительно группы вращений $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{u})$. В этом представлении группа $SO(3)$ имеет инварианты $r = |\boldsymbol{x}|^{1/2}$, $|\boldsymbol{u}|$ и $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u^i x^i$. Поскольку инвариантов, зависящих от трех функций — компонент вектора скорости u^1, u^2, u^3, только два (меньше, чем функций), то решение, инвариантное по группе $SO(3)$, построить невозможно. Можно построить частично инвариантное решение ранга два и дефекта один. Инвариантные независимые переменные очевидны (время t и радиус $r = |\boldsymbol{x}|^{1/2}$), в то время как вид неинвариантной функции не очевиден. Выбор в качестве такой функции какой-либо компоненты вектора скорости в декартовых или сферических координатах не позволяет полностью исследовать решение, что объясняется, в частности, отсутствием симметрии в задаче при таком выборе. Именно выбор переменных (2.2), предложенных Л. В. Овсянниковым в 1995 г. в известной работе [5], позволил построить данное решение. Инвариантами группы $SO(3)$ в переменных (2.2) являются $r = |\boldsymbol{x}|^{1/2}$, U и $H = |\boldsymbol{u}_\tau|$, а неинвариантной функцией, зависящей от всех пространственных переменных, — угол $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$.

Таким образом, вихрь Овсянникова (ВО) — это решение уравнений (2.3), в котором реализуется специальная зависимость функций от независимых переменных:

$$\begin{gathered}
U = U(r,t), \qquad \Gamma = \Gamma(r,t), \qquad H = H(r,t),\\
p = p(r,t), \qquad \rho = \rho(r,t), \qquad w = w(r,t), \qquad \omega = \omega(t,r,\theta,\varphi).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

4. Уравнения вихря Овсянникова для РГД. Подставляя представление (3.1) в (2.3), получаем разложение системы (2.3) на инвариантную подсистему для инвариантных функций, зависящих только от t и r, и переопределенную подсистему для неинвариантной функции ω. Такое представление справедливо в силу общих теорем группового анализа дифференциальных уравнений [6].

Инвариантная подсистема имеет вид

$$ad\Big(D_0U - \frac{1}{r}\,H^2\Big) + p_tU + p_r = 0, \quad ad\Big(D_0H + \frac{U}{r}\,H\Big) + p_tH = 0, \quad aD_0d = p_t, \tag{4.1}$$

где $D_0 = \partial_t + U\,\partial_r$ — инвариантная часть полной производной. Переопределенная подсистема для функции ω записывается в виде

$$\begin{gathered} D_0\omega + \frac{H}{r}\Big(\cos\omega\omega_\theta + \frac{\sin\omega}{\sin\theta}\,\omega_\varphi\Big) + \frac{H}{r}\sin\omega\operatorname{ctg}\theta = 0, \\ \frac{r\sin\theta}{H}\Big(\frac{1}{a}\,D_0a + \frac{1}{r^2}\,(r^2U)_r\Big) - \sin\theta\sin\omega\omega_\theta + \cos\omega\omega_\varphi + \cos\omega\cos\theta = 0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Введем обозначения

$$k = r/H, \qquad h = k(a^{-1}D_0a + r^{-2}(r^2U)_r). \tag{4.3}$$

Тогда система (4.2) принимает вид

$$\begin{gathered} k\sin\theta D_0\omega + \sin\theta\cos\omega\omega_\theta + \sin\omega\omega_\varphi + \cos\theta\sin\omega = 0, \\ \sin\theta\sin\omega\omega_\theta - \cos\omega\omega_\varphi = h\sin\theta + \cos\theta\cos\omega. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Следует отметить, что система (4.4) совпадает с соответствующей системой в классической газовой динамике [5]. При этом функция h отличается от ее аналога для уравнений газовой динамики, в которых она была связана с другими физическими величинами. Такая ситуация типична для математических задач: одна и та же структура справедлива для различных моделей. Это свидетельствует о сходстве описываемых явлений.

Система (4.4) является переопределенной: имеется два уравнения для одной функции. В силу отмеченного выше “изоморфизма” моделей справедлива следующая

Теорема (условие совместности Овсянникова). *Условие совместности системы* (4.4) *имеет вид*

$$kD_0h = h^2 + 1. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) дополняет инвариантную систему (4.1). Таким образом, на ВО в РГД переносятся все математические результаты, доказанные для ВО в классической газовой динамике [5, 11, 12]. Физическая интерпретация этого решения в РГД аналогична его интерпретации в “чистой” газовой динамике.

5. Стационарный вихрь Овсянникова в РГД. Рассмотрим стационарный ВО, т. е. решения, частично инвариантные относительно соответствующей группы Ли с алгеброй Ли $L_4 = \langle\partial_t, so_3\rangle$. Если в представлении (3.1) не учитывать зависимость переменных от времени, то в (4.1), (4.5) инвариантная полная производная D_0 принимает вид $D_0 = U\,d/dr$. В случае стационарного ВО инвариантная система (4.1), (4.5) имеет вид

$$\begin{gathered} Ud' = 0, \qquad U(H' + r^{-1}H) = 0, \\ ad(UU' - r^{-1}H^2) + p_r = 0, \qquad kUh' = 1 + h^2. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Из (5.1) получаем

$$d = d_0 = \text{const}, \qquad H = a_0/r, \qquad a_0 = \text{const}\,. \tag{5.2}$$

Из физического смысла величин a_0 и d_0 следует, что $a_0 > 0$, $d_0 > 0$. Тогда из (1.2) находим интеграл системы (5.1)

$$\Gamma w = d_0, \tag{5.3}$$

справедливый также для общих стационарных решений в РГД [13]. Из (4.3), (5.2) следует

$$k = r/H = r^2/a_0, \qquad UU' - H^2/r = UU' - a_0^2/r^3.$$

Тогда

$$(\Gamma^{-2})' = (1 - (U^2 + H^2))' = (1 - (U^2 + a_0^2/r^2))' = -2(UU' - a_0^2/r^3).$$

Таким образом,

$$UU' - H^2/r = -(\Gamma^{-2})'/2. \tag{5.4}$$

Выражение в левой части формулы (5.4) содержится в третьем уравнении (5.1).

Из последнего уравнения (5.1) получаем представление радиальной компоненты вектора скорости U через функцию h и ее производную h':

$$U = \frac{1+h^2}{h'}\,\frac{a_0}{r^2}. \tag{5.5}$$

Это представление является ключевым для вывода уравнений, определяющих инвариантные компоненты ВО РГД. Представления такого вида справедливы для всех инвариантных функций решения. Функция h играет роль обобщенного потенциала решения. Получим эти представления. Аналогичное представление имеет место для ВО в газовой динамике [11].

Подставляя во второе уравнение (4.3) представление (5.5), с учетом (5.2) получаем

$$h = \frac{r^2}{a_0}\Big(\Big(\frac{1+h^2}{h'}\,\frac{a_0}{r^2}\Big)\frac{a'}{a} + \frac{a_0}{r^2}\Big(\frac{1+h^2}{h'}\Big)'\Big),$$

или

$$\frac{hh'}{1+h^2} = \frac{a'}{a} + \frac{h'}{1+h^2}\Big(\frac{1+h^2}{h'}\Big)'.$$

Следует отметить, что все члены этого уравнения представляются в виде логарифмических производных:

$$\frac{1}{2}\big(\ln(1+h^2)\big)' = (\ln a)' + \Big(\ln\frac{1+h^2}{h'}\Big)'.$$

Последнее уравнение интегрируется в виде

$$a = \frac{\varkappa_0\sqrt{1+h^2}}{1+h^2}\,h' = \frac{\varkappa_0 h'}{\sqrt{1+h^2}},$$

где $\varkappa_0$ — постоянная интегрирования. В результате получено представление для a через потенциалы h и h':

$$a = \frac{\varkappa_0 h'}{\sqrt{1+h^2}}.$$

Так как $\rho = a/\Gamma$, то

$$p = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,(w-1)\rho = \frac{\gamma-1}{\gamma}\Big(\frac{d_0}{\Gamma} - 1\Big)\frac{a}{\Gamma}.$$

Имеем следующие представления:

$$\begin{gathered} a = \Gamma\rho = \frac{\varkappa_0 h'}{\sqrt{1+h^2}}, \qquad U = \frac{a_0}{r^2}\,\frac{1+h^2}{h'}, \\ \Gamma = \Big(1 - \Big(U^2 + \frac{a_0^2}{r^2}\Big)\Big)^{-1/2} = \Big[1 - \frac{a_0^2}{r^2}\Big(1 + \Big(\frac{1+h^2}{rh'}\Big)^2\Big)\Big]^{-1/2}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Тогда уравнение импульсов для радиальной компоненты (третье уравнение системы (5.1)) записывается в виде

$$-ad(\Gamma^{-2})'/2 + p' = 0. \tag{5.7}$$

В силу (5.3)

$$p = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,(w-1)\,\frac{a}{\Gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,(w-1)\,\frac{aw}{d_0} = \frac{\gamma-1}{\gamma d_0}\,(w-1)wa. \tag{5.8}$$

Подставляя в (5.7) $\Gamma^{-2} = w^2/d_0^2$, $ad = ad_0$, с учетом (5.8) имеем

$$-\frac{1}{2}\,ad_0\Big(\frac{w^2}{d_0^2}\Big)' + \frac{\gamma-1}{\gamma d_0}\,[(w-1)wa]' = 0.$$

Выполняя преобразования

$$-\frac{aww'}{d_0} + \frac{\gamma-1}{\gamma d_0}\,[(2w-1)w'a + (w-1)wa'] = 0,$$

$$-ww' + \frac{\gamma-1}{\gamma}\,(2w-1)w' + \frac{\gamma-1}{\gamma}\,(w-1)w\,\frac{a'}{a} = 0,$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1}\,ww' + (2w-1)w' + (w-1)w\,\frac{a'}{a} = 0,$$

$$\Big(2w - 1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\,w\Big)w' + w(w-1)\,\frac{a'}{a} = 0,$$

находим

$$\frac{\mu_0 w - 1}{w(w-1)}\,w' + \frac{a'}{a} = 0, \tag{5.9}$$

где $\mu_0 = (\gamma-2)/(\gamma-1)$.

Интегрируем уравнение (5.9):

$$\int \frac{dw}{w} - \frac{1}{\gamma-1}\int \frac{dw}{w-1} + \int \frac{da}{a} = 0;$$

$$w|w-1|^{-1/(\gamma-1)}a = E_0 \tag{5.10}$$

($E_0 = \mathrm{const}$ — постоянная интегрирования).

С учетом (5.3), (5.6) имеем следующие представления для w и a:

$$w = \frac{d_0}{\Gamma} = d_0\Big(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\Big(1 + \Big(\frac{1+h^2}{rh'}\Big)^2\Big)\Big)^{1/2}, \qquad a = \frac{\varkappa_0 h'}{\sqrt{1+h^2}}. \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получаем уравнение

$$\frac{d_0\varkappa_0}{E_0}\,\frac{h'}{\sqrt{1+h^2}}\Big(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\Big(1 + \Big(\frac{1+h^2}{rh'}\Big)^2\Big)\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big[d_0\Big(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\Big(1 + \Big(\frac{1+h^2}{rh'}\Big)^2\Big)\Big)^{1/2} - 1\Big]^{1/(\gamma-1)}, \tag{5.12}$$

являющееся основным уравнением для определения $h = h(r)$. По его решению находятся все инвариантные функции. Решение переопределенной системы (4.4) для ω задается неявной функцией [5], геометрическая интерпретация решений приведена в [12].

Уравнение (5.12) принадлежит классу обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Такие уравнения называются неявными дифференциальными уравнениями. Современное состояние теории неявных дифференциальных уравнений описано в [14], детальный обзор результатов, полученных с использованием этой теории, приведен в [15, 16]. Особенностями уравнений данного типа являются существование многообразия ветвления решений и наличие пучка траекторий, исходящих из особых точек с различной степенью вырожденности [14]. Примеры использования этой теории при исследовании уравнений газовой динамики приведены в [5, 17].

6. Упрощение ключевого уравнения (5.12). После масштабирования пространственной переменной ($r \to R = r/a_0$, $dh/dr = a_0^{-1}\, dh/dR$) уравнение (5.12) записывается в виде

$$\frac{d_0\varkappa_0}{a_0E_0}\,\frac{h_R}{\sqrt{1+h^2}}\Big[1-\frac{1}{R^2}\Big(1+\Big(\frac{1+h^2}{Rh_R}\Big)^2\Big)\Big]^{1/2} = \\ = \Big[d_0\Big(1-\frac{1}{R^2}\Big(1+\Big(\frac{1+h^2}{Rh_R}\Big)^2\Big)\Big)^{1/2}-1\Big]^{1/(\gamma-1)}. \qquad (6.1)$$

Введем обозначение $q = R^2(R^2-1)h_R^2-(1+h^2)^2$. Необходимыми условиями существования решения являются условия для области, в которой находится решение:

$$R > 1, \qquad q > 0.$$

После возведения (6.1) в квадрат и ряда преобразований получаем

$$s_0\frac{R^{4(2-\gamma)/(\gamma-1)}p^{2/(\gamma-1)}q}{1+h^2} = \big(q^{1/2}-m_0R^2p\big)^{2/(\gamma-1)}, \qquad (6.2)$$

где $p = h_R$.

Постоянные s_0 и $m_0 = d_0^{-1}$ должны удовлетворять неравенствам

$$s_0 = \Big(\frac{d_0^{(\gamma-2)/(\gamma-1)}\varkappa_0}{a_0E_0}\Big)^2 > 0, \qquad 0 < m_0 < 1.$$

Ниже рассматривается используемый в астрофизических приложениях одноатомный газ, для которого $\gamma = 5/3$. При этом значении γ уравнение (6.2) принимает вид

$$\frac{s_0R^2p^3q}{1+h^2} = \big(q^{1/2}-m_0R^2p\big)^3. \qquad (6.3)$$

Неявное уравнение (6.3) записывается в виде

$$F(R,h,p) \equiv q^{3/2}-R^2p\Big(3m_0+s_0\,\frac{p^2}{1+h^2}\Big)q+3m_0^2R^4p^2q^{1/2}-m_0^3R^6p^3 = 0. \qquad (6.4)$$

Уравнение (6.4) приводится к алгебраическому уравнению

$$\hat F(R,h,p) \equiv \frac{R^4p^6q^2}{(1+h^2)^2}+2\,\frac{m_0}{s_0}\,\frac{R^4p^4q(3q+m_0^2R^4p^2)}{1+h^2}+ \\ +\Big(\frac{m_0}{s_0}\Big)^2R^4p^2(m_0^2R^4p^2+3q)^2-\frac{1}{s_0^2}\,q(q+3m_0^2R^4p^2)^2 = 0. \qquad (6.5)$$

Ниже проводится анализ уравнений (6.4), (6.5).

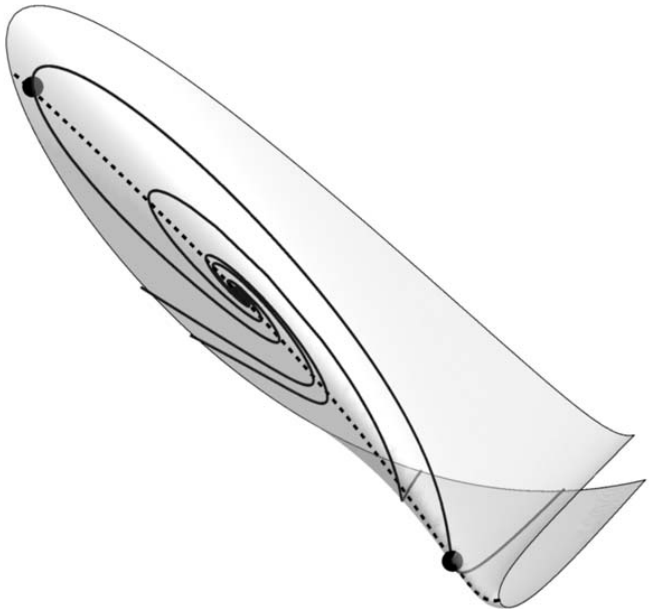

Рис. 1. Положение интегральных кривых вблизи сложенной особой точки при $m_0 = 0{,}5$, $s_0 = 1$

7. Исследование особых точек уравнения (6.4). Приведем необходимые сведения из теории неявных дифференциальных уравнений [14–16]. Неявно заданное уравнение (6.4) может быть разрешено относительно производной p во всех точках пространства $\mathbb{R}^3(R, h, p)$, за исключением точек многообразия

$$F(R, h, p) = 0, \qquad F_p(R, h, p) = 0. \tag{7.1}$$

Кривая в $\mathbb{R}^3(R, h, p)$, задаваемая уравнениями (7.1), называется криминантой уравнения (6.4) и определяет многообразие ветвления интегральных кривых. Она состоит из особых точек уравнения (6.4), называемых регулярными. В общем случае уравнение (6.4) может иметь особые точки двух типов: сложенные и собранные. Сложенные особые точки задаются системой уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \qquad F_p(R, h, p) = 0, \qquad F_R(R, h, p) + pF_h(R, h, p) = 0, \tag{7.2}$$

собранные — системой уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \qquad F_p(R, h, p) = 0, \qquad F_{pp}(R, h, p) = 0. \tag{7.3}$$

Проекция криминантной кривой на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ называется дискриминантной кривой.

Суть геометрического подхода к исследованию неявных уравнений, предложенного Пуанкаре, состоит в поднятии неявного уравнения $F = 0$ до векторного поля

$$R_\tau = F_p, \qquad h_\tau = pF_p, \qquad p_\tau = -(F_R + pF_h) \tag{7.4}$$

в пространстве (R, h, p), где τ — новый параметр вдоль интегральной кривой. При такой трактовке неявного уравнения интегральные кривые уравнения (6.4) расположены на различных листах поверхности $F = 0$ и могут проецироваться на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ с наложением друг на друга (рис. 1). При этом решение определено на интервале, в котором интегральная кривая не доходит до дискриминантной кривой. Уравнения (7.4) являются уравнениями характеристик для уравнения (6.4) [18].

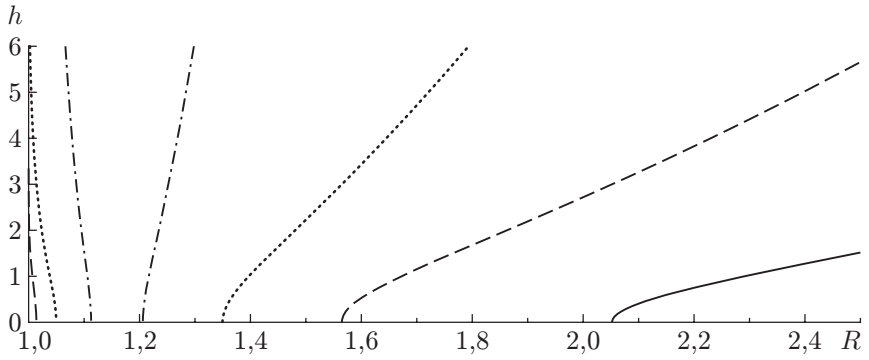

Рис. 2. Дискриминантная кривая при $m_0 = 0{,}5$ и различных значениях s_0: сплошная кривая — $s_0 = 10^{-1}$, штриховые — $s_0 = 10^{-2}$, пунктирные — $s_0 = 10^{-3}$, штрихпунктирные — $s_0 = 10^{-5}$

При исследовании особых точек уравнения (6.4) возникают значительные вычислительные трудности. Решение систем уравнений (7.2), (7.3), определяемое результантами соответствующих многочленов, может быть получено с помощью систем символьных и численных вычислений.

8. Численное исследование. Далее будем исследовать уравнение (6.4) в алгебраической форме, т. е. $F^2 = 0$, что более удобно при проведении вычислений. Вместо обозначения F^2 будем использовать обозначение F.

8.1. *Дискриминантная кривая.* Дискриминантная кривая определяется как проекция на плоскость (R, h) криминантной кривой, задаваемой системой уравнений (7.1). Для решения этой и подобных систем используем следующую процедуру. Поскольку уравнения системы (7.1) являются полиномами по p, можно исключить p с помощью результанта этих двух полиномов [19].

Введем обозначения $\Phi_1 = F$, $\Phi_2 = F_p$. Тогда

$$R_{12}(R, h) = \mathrm{Resultant}\,(\Phi_1, \Phi_2).$$

Далее, на (R, h)-плоскости численно решается алгебраическое уравнение $R_{12}(R, h) = 0$ относительно h. Таким образом, для заданных постоянных m_0, s_0 и радиуса R можно вычислить дискриминантную кривую. В результате численных расчетов получено

Утверждение 1 (о структуре дискриминантной кривой). Дискриминантная кривая состоит из одной или двух компонент.

Дискриминантная кривая всегда имеет основную компоненту; при $s_0 \leqslant 10^{-2}$ возникает дополнительная компонента (рис. 2).

8.2. *Сложенные особые точки.* Сложенные особые точки находятся из системы уравнений (7.2). Для решения этой системы применяется та же процедура, что и для нахождения дискриминантной кривой (7.1). Введем обозначения $\Phi_1 = F$, $\Phi_2 = F_p$, $\Phi_3 = F_R + pF_h$. Тогда, для того чтобы получить решение системы, необходимо вычислить следующие результанты:

$$R_{12}(R, h) = \mathrm{Resultant}\,(\Phi_1, \Phi_2), \qquad R_{13}(R, h) = \mathrm{Resultant}\,(\Phi_1, \Phi_3). \tag{8.1}$$

Пересечение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$ является множеством сложенных особых точек. После упрощения полином R_{12} имеет степень 60 по R и 180 по h, полином R_{13} — 64 по R и 170 по h. Для нахождения $R_{12}(R, h)$ необходимо вычислить определитель порядка 19 ($11! = 39\,916\,800$ ненулевых слагаемых), а для нахождения $R_{13}(R, h)$ — определитель порядка 20 ($15! = 1\,307\,674\,368\,000$ ненулевых слагаемых).

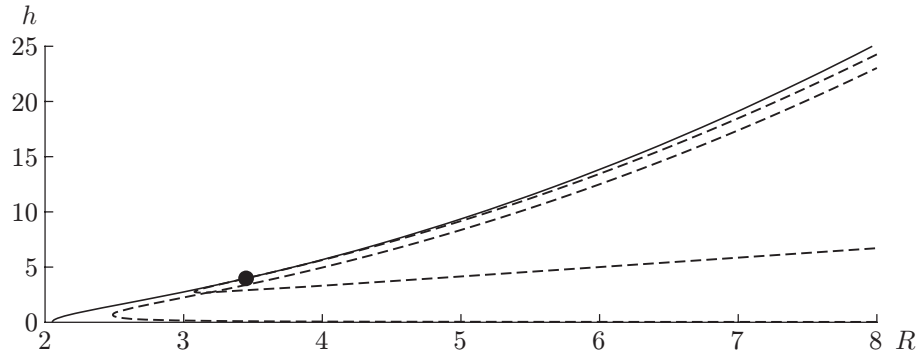

Рис. 3. Положение кривых $R_{12} = 0$ (сплошная линия) и $R_{13} = 0$ (штриховая линия) при наличии сложенной особой точки при $m_0 = 0{,}5$, $s_0 = 0{,}1$

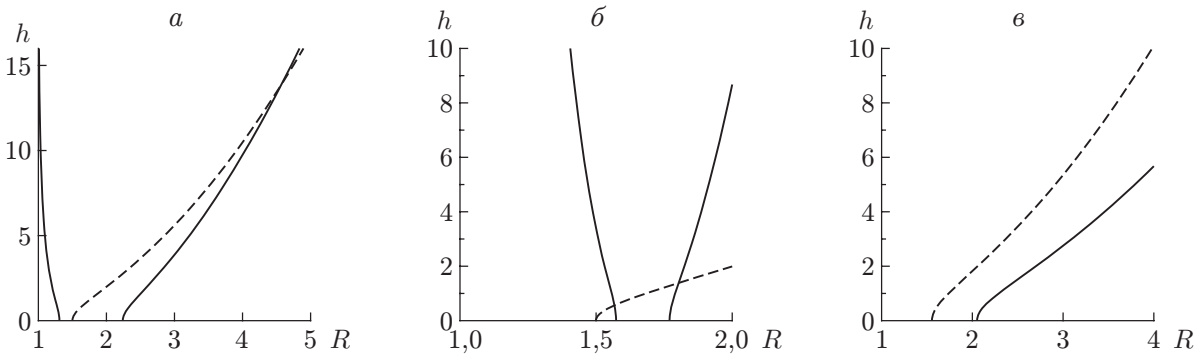

Рис. 4. Положение кривых $R_{12} = 0$ (сплошные линии) и $R_{14} = 0$ (штриховые линии) при наличии одной (*а*), двух (*б*) собранных особых точек и при их отсутствии (*в*)

В результате численных расчетов получено

Утверждение 2 (о существовании и единственности сложенной особой точки). Для любых значений параметров s_0 и m_0 существует единственная особая точка.

На рис. 3 показано стандартное расположение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$.

8.3. *Собранные особые точки.* Собранные особые точки определяются из системы уравнений (7.3). При решении этой системы используется результант из (8.1): $R_{12} = \mathrm{Resultant}\,(\Phi_1, \Phi_2)$. Введем обозначение $\Phi_4 = F_{pp}$. Тогда для нахождения собранных особых точек нужно вычислить результант

$$R_{14}(R, h) = \mathrm{Resultant}\,(\Phi_1, \Phi_4).$$

Пересечение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{14} = 0$ является множеством собранных особых точек. После упрощения полином $R_{14}(R, h)$ имеет степень 88 по R и 144 по h. Для нахождения $R_{14}(R, h)$ необходимо вычислить определитель порядка 18 (11! ненулевых слагаемых).

В результате численных расчетов получено следующее утверждение (рис. 4).

Утверждение 3 (классификация собранных особых точек). Для любых параметров $s_0 > 0$ и $0 < m_0 < 1$ реализуются следующие три случая:

1) существует одна собранная особая точка, расположенная на основной компоненте;

2) существует две собранных особых точки, одна из которых расположена на основной компоненте, а другая — на дополнительной;

3) не существует ни одной собранной особой точки.

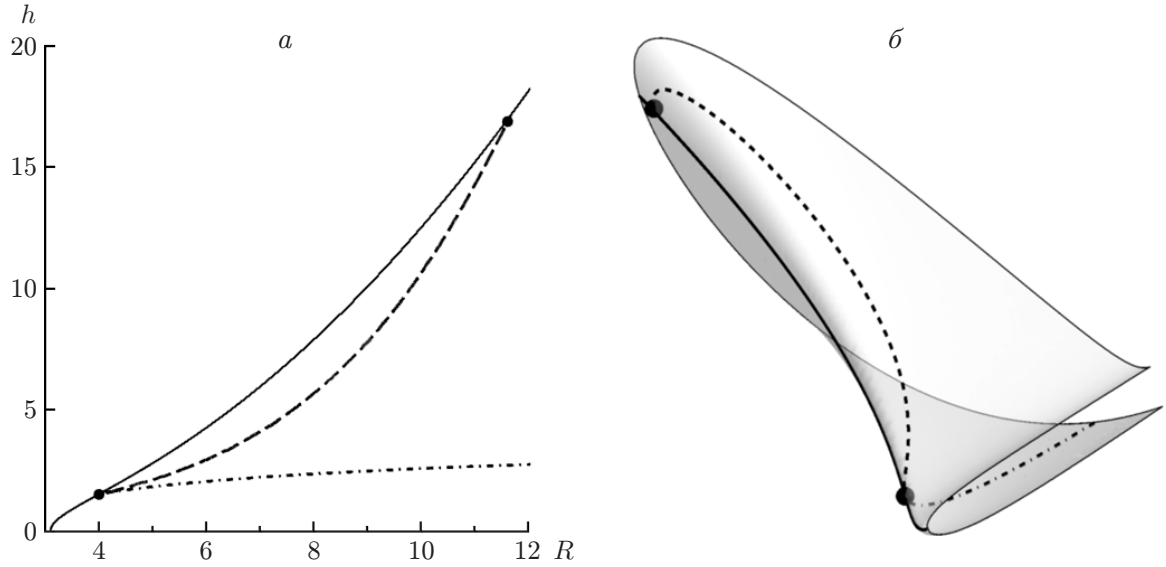

Рис. 5. Положение криминанты в пространстве (R, h, p) и ее проекция на плоскость (R, h):

а — дискриминантная кривая (сплошная линия) и проекции на плоскость (R, h) интегральных кривых первого (штриховая линия) и второго (штрихпунктирная линия) семейств с различных листов поверхности $F = 0$; *б* — криминанта (сплошная линия) и интегральные кривые первого (штриховая линия) и второго (штрихпунктирная линия) семейств на различных листах поверхности $F = 0$

В результате численного расчета установлено, что при увеличении значения s_0 от 0 до 1 кривая $R_{14} = 0$ перемещается в направлении возрастания R. Кривая $R_{12} = 0$ перемещается в том же направлении при увеличении m_0 от 0 до 1. При одних и тех же значениях m_0 и s_0 кривые $R_{14} = 0$ и $R_{12} = 0$ совпадают. Случай 3 реализуется при $s_0 \leqslant 10^{-5}$.

9. Физическая интерпретация результатов исследования. Для исследования характера интегральных кривых уравнения (6.4) используется эквивалентная ему (см. п. **8**) система уравнений (7.4). Вспомогательный параметр τ описывает изменение соответствующих величин вдоль интегральных кривых. Уравнение (6.4) и система (7.4) имеют совпадающие особые точки, характер их решений один и тот же. На основной компоненте поверхности $F = 0$ численно обнаружено два семейства интегральных кривых. Кривые первого семейства начинаются и заканчиваются на криминанте, а по соответствующим траекториям точки перемещаются за конечное “время” (рис. 5). Траектории определены на конечных интервалах изменения параметра τ и радиуса R. Значению радиуса, соответствующему одному концу интегральной кривой этого семейства, соответствует источник, значению радиуса, соответствующему другому ее концу, — сток. При смене направления параметра τ в системе уравнений (7.4) источник и сток меняются местами. Бóльшим радиусам R соответствуют меньшие значения касательной к сферам компоненты скорости H. Величина радиальной скорости U и фактор Лоренца Γ изменяются с ростом R немонотонно и имеют минимум при промежуточных значениях радиуса R. Давление и плотность, наоборот, при промежуточном значении радиуса имеют максимум. Таким образом, при промежуточном значении радиуса в газе имеется сферический слой, в котором плотность и давление больше, чем при остальных значениях радиуса, а радиальная скорость газа минимальна. Вблизи этого слоя релятивистские эффекты проявляются наиболее слабо (рис. 6).

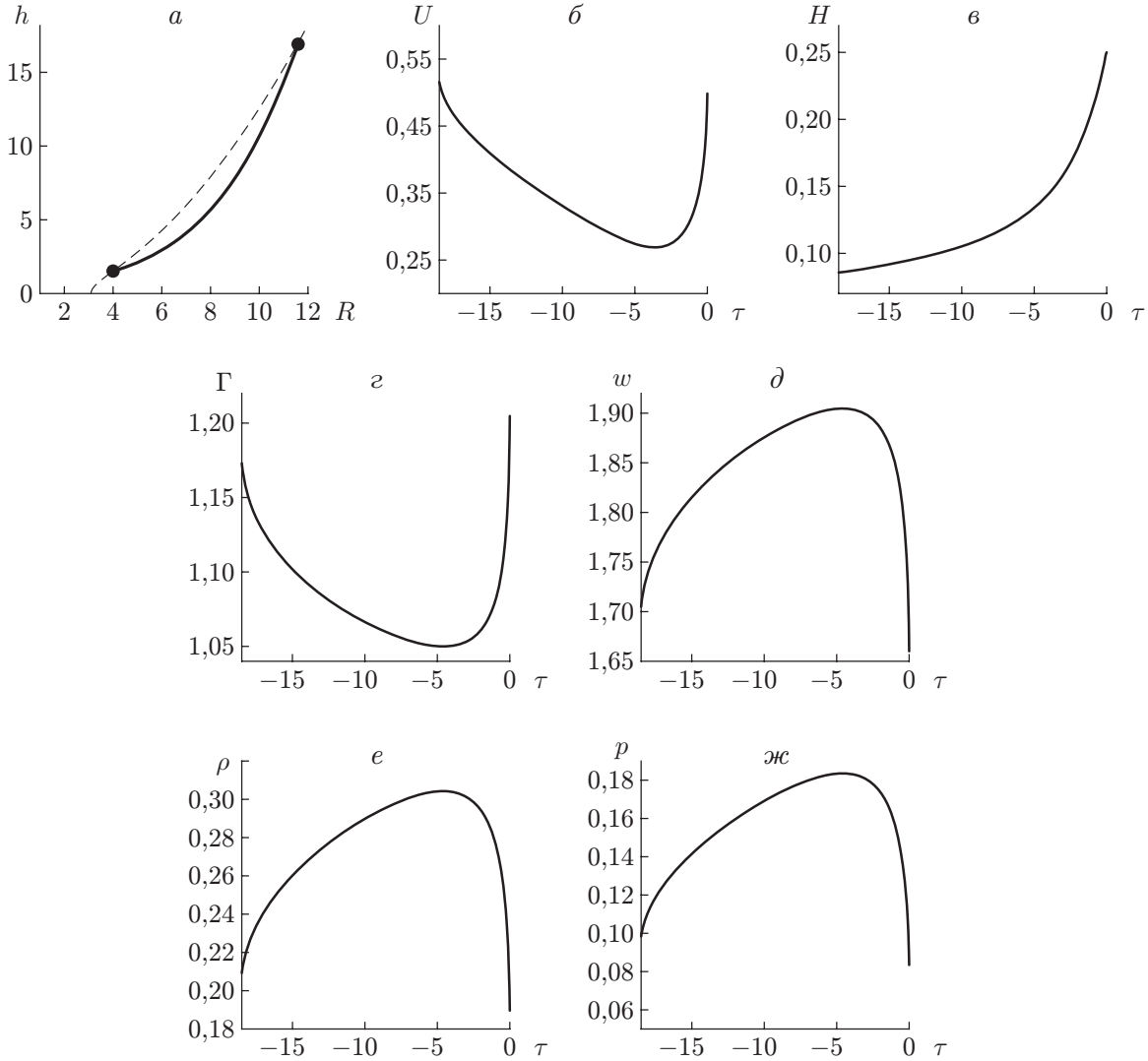

Рис. 6. Криминанта (штриховая линия), интегральная кривая первого семейства (сплошная линия) (*а*) и изменение величин U (*б*), H (*в*), Γ (*г*), w (*д*), ρ (*е*), p (*ж*) вдоль нее

Кривые другого семейства интегральных кривых также начинаются на криминанте, но с увеличением параметра τ частицы газа уходят на бесконечность. При данном режиме движения радиальная компонента вектора скорости U стремится к постоянной величине, а касательная к сферам H — к нулю. На больших расстояниях от источника течение газа представляет собой радиальный разлет. Траектории частиц асимптотически являются лучами, расходящимися из центра $R = 0$, при этом плотность и давление газа стремятся к нулю при увеличении радиуса R. По мере движения вдоль траектории происходит замедление изменения времени и уменьшение длины в системе координат, связанной с движущейся частицей, вследствие увеличения фактора Лоренца. При больших радиусах фактор Лоренца стремится к постоянному значению, равному двум (рис. 7). Это значение соответствует асимптотическому значению радиальной скорости $U = \sqrt{3}/2$, приближенно равному 0,85 скорости света.

Заключение. Найдено и исследовано точное решение уравнений релятивистской газовой динамики, частично инвариантное относительно группы вращений. Доказана тео-

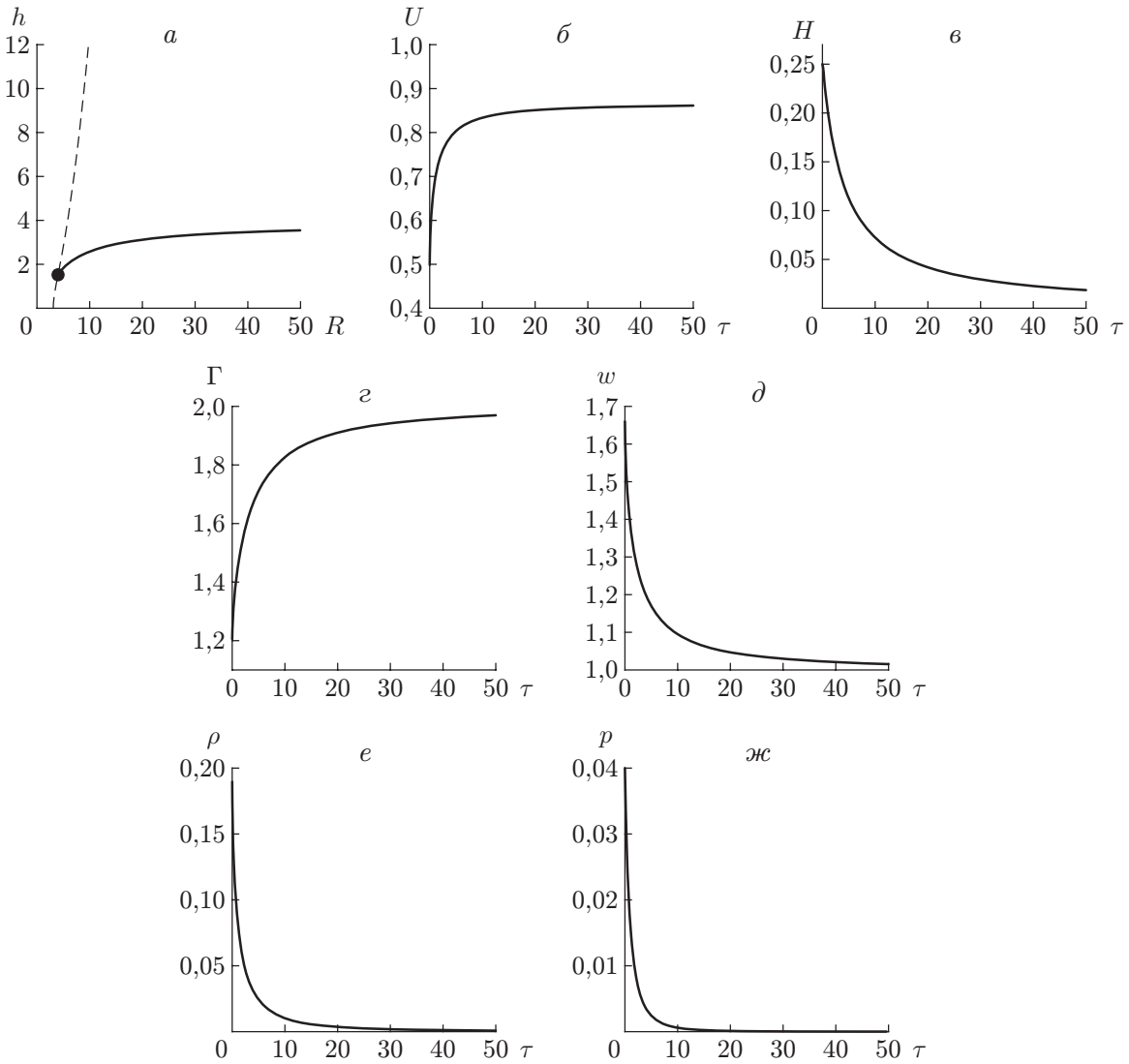

Рис. 7. Криминанта (штриховая линия), интегральная кривая второго семейства (сплошная линия) (*а*) и изменение величин U (*б*), H (*в*), Γ (*г*), w (*д*), ρ (*е*), p (*ж*) вдоль нее

рема о представлении фактор-системы в виде объединения неинвариантной подсистемы для функции, определяющей отклонение вектора скорости от меридиана, и инвариантной подсистемы для функции, определяющей термодинамические параметры, фактор Лоренца и радиальную компоненту вектора скорости. Получены условия совместности переопределенной неинвариантной системы. Доказано, что инвариантная подсистема для стационарного решения сводится к неявному дифференциальному уравнению. Для этого уравнения изучено многообразие ветвления решений, найдено множество особых точек. Определено положение особых точек в зависимости от параметров m_0, s_0. Исследовано поведение интегральных кривых. Доказано существование двух режимов течения — решений, описывающих вихревой источник релятивистского газа. Одно из этих решений определено для конечных расстояний от источника, другое является аналогом режима сверхзвукового истечения газа с поверхности шара. Изучено поведение физических величин, соответствующих интегральным кривым различного типа.

Авторы выражают благодарность А. А. Черевко за плодотворное обсуждение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
2. **LeFloch P. G., Ukai S. A.** A symmetrization of the relativistic Euler equations in several spatial variables // Kinetic Related Models. 2009. V. 2. P. 275–292.
3. **Годунов С. К.** Термодинамическая формализация уравнений гидродинамики заряженного диэлектрика в электромагнитном поле // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 916–929.
4. **Gourgoulhon E.** An introduction to relativistic hydrodynamics, stellar fluid dynamics and numerical simulations: from the sun to neutron stars // EAS Publ. Ser. 2006. V. 21. P. 43–79.
5. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Borshch M. S., Zhdanov V. I.** Exact solutions of the equations of relativistic hydrodynamics representing potential flows // Symmetry, Integrability Geometry: Methods Appl. 2007. V. 3, N 116. P. 1–11.
8. **Alexa C., Vrinceanu D.** On the symmetries of the 1+1 dimensional relativistic fluid dynamics. S. l., 1997. (Prepr. / Europ. Organizat. Nuclear Res.; N 9710004-1997).
9. **Perucho M., Marti J. M., Hanasz M.** Nonlinear stability of relativistic sheared planar jets // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. V. 139. P. 377–398.
10. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
11. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Стационарный вихрь Овсянникова. Новосибирск, 2005. (Препр. / Ин-т гидродинамики СО РАН; № 1-2005).
12. **Golovin S. V.** Singular vortex in magnetohydrodynamics // J. Phys. A. Math. General. 2005. V. 38. P. 4501–4516.
13. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
14. **Arnold V. I.** Ordinary differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
15. **Ремизов А. О.** Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // Соврем. математика. Фундам. направления. 2006. Т. 19. С. 131–170.
16. **Давыдов А. А.** Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функцион. анализ и его приложения. 1985. Т. 19, № 2. С. 1–10.
17. **Барлукова А. М., Чупахин А. П.** Частично инвариантные решения в газовой динамике и неявные уравнения // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 11–24.
18. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
19. **Мишина А. П.** Высшая алгебра: линейная алгебра, многочлены, общая алгебра / А. П. Мишина, И. В. Проскуряков. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 11/X 2018 г.,
после доработки — 11/X 2018 г.
Принята к публикации 29/X 2018 г.