3. Исследовано влияние нерасчетности на энергетические характеристики лазера.

Авторы благодарят Т. А. Бунгову, Г. Н. Волчкову за помощь в работе и В. А. Поспелова, М. Х. Стрельцова, М. Л. Шура за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию 12/IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **G. Emanuel, N. Cohen, T. Jacobs.** J. Quant. Spectr. Rad. Transfer, 1973, 13, 1341.
2. **W. S. King, H. Mirels.** AIAA Paper, 1972, № 146.
3. **В. Г. Крутова, А. И. Ораевский, А. А. Степанова и др.** Квантовая электроника, 1976, 3, 1919.
4. **В. И. Головичев, Н. Г. Преображенский.** ФГВ, 1977, 13, 3, 366.
5. **J. D. Ramshaw, R. C. Miolsness, O. A. Farmer.** J. Quant. Spectr. Rad. Transfer. 1977, 17, 149.
6. **А. В. Лавров, В. А. Поспелов.** Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, 3, 95.
7. **А. В. Лавров, В. А. Поспелов, А. В. Федотов и др.** ФГВ, 1979, 15, 1, 89.
8. **В. И. Головичев, А. А. Яник.**— В кн.: Исследование рабочего процесса газодинамических и химических лазеров. Новосибирск: ИТПМ, 1979.
9. **А. А. Степанов, В. А. Щеглов.** Квантовая электроника, 1979, 6, 747.
10. **В. А. Поспелов, М. Л. Шур.**— В кн.: Тепломассообмен в химически реагирующих системах. Минск: ИТМО, 1980.
11. **W. L. Hendricks, R. R. Mikatarian, B. J. Gross a. o.** AIAA Paper, 1981, N 1133.
12. **Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур.** ФГВ, 1982, 2, 5, 89.
13. **В. А. Поспелов.** ЧММСС, 1982, 13, 99.
14. **Т. А. Бунгова, А. В. Лавров, С. С. Харченко.** Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, 3, 18.
15. **W. L. Hendricks, S. C. Kurzins.** AIAA Paper, 1977, N 656.
16. **В. М. Ковеня, С. Г. Черный.** ЧММСС, 1978, 10, 71.
17. **Ю. П. Головачев, А. А. Фурсенко.** Препринт ЛФТИ, № 731, 1981.
18. **С. А. Лосев.** Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977.
19. **Н. П. Яненко.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
20. **Е. П. Бондарев, А. П. Горина.** Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, 4, 17.
21. **Г. П. Волчкова, А. В. Лавров, С. С. Харченко.** ТВТ, 1981, 6, 1198.
22. **Б. М. Павлов.** Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, 4, 57.
23. **Н. Ханг, Г. Маккормак.** РТК, 1976, 4, 73.
24. **П. Роуч.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

О РЕЖИМАХ КОНВЕКЦИИ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

Е. А. Еремин

(Пермь)

В плоском вертикальном слое жидкости или газа, ограниченном изотермическими плоскостями, при наличии реакции нулевого порядка возникает плоскопараллельное конвективное течение, состоящее из восходящего вдоль оси слоя и двух нисходящих вдоль границ потоков жидкости [1]. Распределение температуры поперек слоя определяется при этом решением известной задачи Франк-Каменецкого. Такой режим конвекции существует при любых значениях параметра Франк-Каменецкого FK, не превышающих некоторого критического FK_0, характеризующего порог теплового взрыва. Однако при достаточно большом значении второго характерного параметра задачи — числа Грасгофа Gr, определяющего интенсивность движения, стационарное плоскопараллельное конвективное течение становится неустойчивым и сменяется вторичным движением, имеющим структуру дрейфующих вдоль границ раздела потоков цепочек вихрей. Исследование устойчивости плоскопараллельного течения по отношению к малым возмущениям проведено в [1, 2].

При $FK > FK_0$ постановка линейной задачи устойчивости теряет смысл, поскольку основной плоскопараллельный режим невозможен. Тем не менее развитие конвективных возмущений конечной амплитуды в не-которой области $\mathrm{FK}_0 < \mathrm{FK} < \mathrm{FK}_*(\mathrm{Gr})$ может в принципе привести к увеличению теплопередачи и предотвратить тепловой взрыв (FK_* — порог теплового взрыва). Поэтому для решения вопроса о режимах теплопереноса и конвекции в области $\mathrm{FK} > \mathrm{FK}_0$ необходимо решение полных нелинейных уравнений конвекции реагирующей среды. Такое исследование проводится в настоящей работе.

Рассмотрим бесконечный слой реагирующей жидкости, ограниченный двумя параллельными вертикальными плоскостями $x = \pm h$. Границы слоя твердые и поддерживаются при одинаковой постоянной температуре T_0. Во всем объеме в результате реакции нулевого порядка выделяется тепло, которое учитывается в уравнении теплопроводности в виде источников мощностью $q = Qk_0 \exp(-E/RT)$, где T — температура; R — газовая постоянная; Q, k_0, E — заданные константы реакции (тепловой эффект, предэкспоненциальный множитель и энергия активации соответственно).

Для описания процесса используем уравнения конвекции в приближении Буссинеска [3]. Из линейного анализа устойчивости следует, что наиболее опасными являются плоские возмущения; поэтому будем рассматривать плоскую задачу. Введем функцию тока, связанную с компонентами скорости v_x и v_z соотношениями $v_x = -\partial\psi/\partial z$ и $v_z = \partial\psi/\partial x$. Тогда, исключив из уравнения Навье — Стокса давление, получим для функции тока ψ и температуры T, отсчитываемой от T_0, следующую систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \mathrm{Gr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right) = \Delta\Delta\psi - \frac{\partial T}{\partial x}, \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{Gr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\Delta T + \mathrm{FK}\exp T) \end{aligned} \tag{1}$$

(при написании уравнения теплопроводности слагаемое с источниками преобразовано согласно известному методу разложения экспоненты [4]). В качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления приняты соответственно h, h^2/ν, $g\beta h^2RT_0^2/E\nu$, RT_0^2/E, $\rho_0 g\beta hRT_0^2/E$. Сформулированная задача содержит три безразмерных параметра: $\mathrm{FK} = Qk_0h^2E\exp(-E/RT_0)/\varkappa RT_0^2$ — параметр Франк-Каменецкого; $\mathrm{Gr} = g\beta h^3RT_0^2/E\nu$ — число Грасгофа; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, где $\varkappa$, ν, χ, β, ρ_0 — коэффициенты теплопроводности, кинематической вязкости, температуропроводности, объемного расширения и плотность.

Уравнения (1) необходимо дополнить условиями на твердых изотермических границах

$$x = \pm 1: \quad T = 0, \quad \psi = 0, \quad \partial\psi/\partial x = 0. \tag{2}$$

При $\mathrm{FK} < \mathrm{FK}_0$ задача (1), (2) допускает стационарные решения в виде плоскопараллельного конвективного течения, подробно исследованного в [1]. Поперечный теплоперенос при таком движении остается чисто кондуктивным, поэтому применима стационарная теория теплового взрыва [4], в соответствии с которой при $\mathrm{FK} < \mathrm{FK}_0 \approx 0{,}88$ возможны два режима переноса тепла. Решение с большей температурой абсолютно неустойчиво, поэтому рассматриваться не будет. Таким образом, в этой области изменения параметра Франк-Каменецкого реализуется стационарное плоскопараллельное конвективное течение, в котором нагретая жидкость поднимается в центре слоя, а охлажденная опускается вдоль его границ. Устанавливающийся при этом параболический профиль температуры совпадает с ее распределением в неподвижной реагирующей среде и для не слишком интенсивных течений не зависит от числа Gr.

С ростом Gr плоскопараллельное течение теряет устойчивость и возникает вторичное движение, искажающее температурное поле. Граница этого перехода определяется кривой нейтральной устойчивости относительно малых нормальных возмущений, найденной для различных значений числа Pr в [2]. Там же рассмотрена зависимость минимальных критических чисел Грасгофа $\mathrm{Gr}_{\min}$ от параметра Франк-Каменецкого.

Как уже отмечалось, для определения характера протекания реакции при $\mathrm{FK} > \mathrm{FK}_0$ необходимо решение полной нелинейной задачи. Так как слой имеет бесконечную протяженность вдоль оси z, а коэффициенты уравнений (1) и граничные условия (2) от этой координаты не зависят, будем рассматривать пространственно-периодические вдоль оси z решения с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Значение волнового числа k примем в районе минимума нейтральной кривой: как следует из линейной теории [2], $k_{\min}$ очень слабо зависит от параметров задачи (для случая $\mathrm{Pr} = 1$, в частности, $k_{\min} \approx 1{,}4$). Расчетной областью в этом случае является прямоугольник $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant z \leqslant \lambda$.

После введения вихря скорости уравнения (1) записывались в конечно-разностной форме. Все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, а производные по времени представлялись разностями вперед. Значения переменных на новом временном слое находились по явной схеме, уравнение Пуассона для функции тока решалось итерационно методом последовательной верхней релаксации (обычно с относительной точностью 10^{-4}). Для основных расчетов использовалась сетка 20×23.

Экспоненциальное слагаемое с тепловыми источниками вычислялось на предыдущем временном слое. Применялось, кроме того, следующее выражение для этого слагаемого:

$$\exp T^{n+1} = \exp (T^n + \Delta T) \approx (1 + \Delta T) \exp T^n,$$

где верхний индекс обозначает номер временного слоя, а $\Delta T = T^{n+1} - T^n$. Такое представление тепловых источников, не нарушающее явности разностной схемы, практически не меняло установившегося решения.

Условия периодизма па горизонтальных границах конвективной ячейки $z = 0$ и $z - \lambda$ удовлетворялись путем введения дополнительного ряда узлов сетки, который соответствовал координате $z = \lambda + h_z$ (h_z — шаг сетки в направлении z). При этом на каждом шаге по времени требовалось выполнение соотношений вида $F(x, 0) = F(x, \lambda)$ и $F(x, \lambda + h_z) = F(x, h_z)$, где под F подразумевается температура, вихрь скорости или функция тока, причем для последней граничные условия подправлялись после каждой итерации. Для вихря скорости на твердых границах использовались условия Тома или Кусковой (см., например, [5]). Различие между обеими аппроксимациями было порядка сеточной погрешности.

Все расчеты проводились при $\mathrm{Pr} = 1$, что соответствует случаю реагирующих газов.

Сравнение результатов нелинейных расчетов границы устойчивости основного плоскопараллельного режима со значениями критических чисел Грасгофа, полученными на основе линейной теории в [2], дало вполне удовлетворительное совпадение. Так, например, для $\mathrm{FK} = 0{,}8$ при сетке 10×23 имеется различие около 4%. К таким же погрешностям приводит варьирование пространственного шага сетки. Лишь в области $\mathrm{FK} \approx \mathrm{FK}_0$, где наблюдаются наибольшие вычислительные трудности и реализуется самая медленная сходимость, несовпадение между линейной и нелинейной теориями превысило 7%. Структура получающегося вторичного течения также хорошо согласуется с данными работ [1, 2]. На рис. 1 приведены в качестве примера изолинии функции тока и температуры для $\mathrm{Gr} = 500$ и $\mathrm{FK} = 1$ в некоторый момент времени. Движение представляет собой систему вихрей, расположенных вдоль слоя в шахматном порядке. Возникает дополнительный поперечный теплоперенос, поэтому изотермы оказываются искривленными — в областях интенсивного движения реагирующая среда охлаждается. Отметим, что приведенная на рис. 1 картина не является стационарной — неустойчивость вызвана «бегущими» возмущениями.

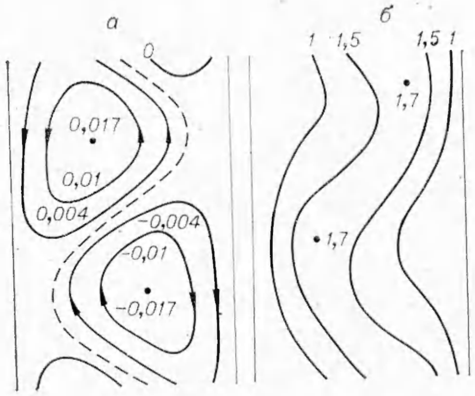

Рис. 1. Изолинии функции тока (*а*) и температуры (*б*) для вторичного течения в вертикальном слое. Цифры соответствуют значениям переменных на изолиниях, точками отмечены положения максимумов. Нулевая изолиния функции тока нанесена штриховой линией.

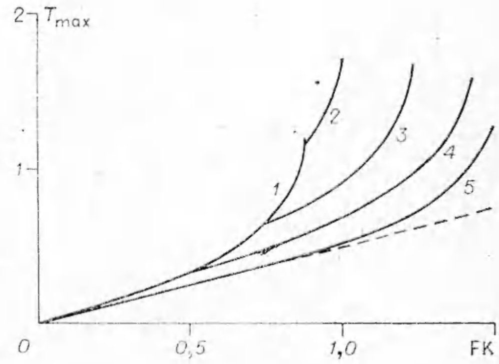

Рис. 2. Зависимость максимальной температуры в слое от параметра FK.

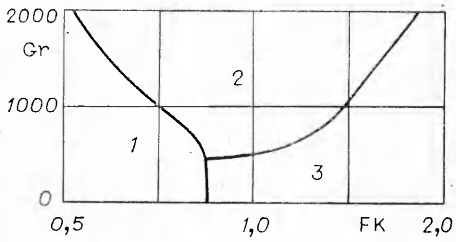

Рис. 3. Диаграмма режимов на плоскости параметров Gr и FK. (Граница между областями *1* и *3* — вертикальная прямая.)

Для описания конвекции и теплопереноса в слое при наличии химической реакции удобно следить за максимальным разогревом T_{max} при фиксированном значении Gr. Получающееся в этом случае семейство кривых T_{max}(FK) для различных чисел Gr приведено на рис. 2. Линия *1* отвечает стационарному плоскопараллельному течению и совпадает с соответствующей зависимостью для экзотермической реакции в неподвижной среде [4]; при FK $\approx$ 0,88 кривая имеет концевую точку. Расчеты показывают, что это совпадение сохраняется до $Gr_* \approx 450$, пока рассматриваемое течение устойчиво. Если $Gr > Gr_*$, то для малых FK состояние системы по-прежнему определяется кривой *1*, однако при достаточно интенсивном тепловыделении основное стационарное течение оказывается неустойчивым и сменяется нестационарным вторичным движением. При этом от кривой *1* ответвляется линия T_{max}(FK), характеризующаяся меньшим разогревом (для Gr = 500, например, это линия *2*). Сравнение линий *2*, *3* и *4* на рис. 2, соответствующих Gr = 500, 1000 и 2000, показывает, что, чем выше выбранное число Gr, тем при меньшем значении FK происходит такой переход.

С ростом Gr интенсивность перемешивания среды увеличивается, поэтому условия теплопереноса в слое становятся близкими к случаю однородного тепловыделения в нереагирующей жидкости. Такая задача рассматривалась в [6, 7]; соответствующая зависимость показана на рис. 2 штриховой линией, которая при FK < 1 практически совпадает с результатами расчетов для Gr = 5000 (кривая *5*).

Охлаждение реагирующей среды при установлении вихревого вторичного движения приводит к тому, что оно оказывается возможным при $FK > FK_0$. Хотя плоскопараллельное решение с $k = 0$ по-прежнему удовлетворяет уравнениям (1), учет нелинейных членов позволяет получить другое решение с конечными значениями поля температур, которое и реализуется в расчетах при $FK_0 < FK < FK_*$(Gr). Порог теплового взрыва, таким образом, оказывается сдвинутым в сторону больших значений параметра FK. Сдвиг этот с ростом Gr увеличивается и может быть значительным — при Gr = 2000, например, FK_* превышает FK_0 в 1,6 раза. При больших Gr зависимость FK_*(Gr) близка к линейной.

Обработка результатов расчетов с помощью метода наименьших квадратов позволила для $Gr \geqslant 450$ получить формулу

$$FK_* = 0{,}88 + 0{,}0218\,(Gr - 450)^{0{,}437},$$

которая дает погрешность аппроксимации не более 1% во всех полученных точках.

Отметим, что зависимость порога теплового взрыва от интенсивности конвекции рассматривалась ранее только для движений, возникающих в результате неустойчивости равновесия [8—10]. В случае потери устойчивости конвективного течения, исследованного в настоящей работе, порог теплового взрыва также оказывается зависимым от интенсивности вторичного течения.

На основе результатов решения линейной и нелинейной задач можно построить в плоскости (FK, Gr) диаграмму режимов, определяющую характер протекания экзотермической реакции нулевого порядка (при $Pr = 1$). На диаграмме рис. 3 указаны области существования трех режимов конвекции и теплопереноса: *1* — стационарное плоскопараллельное течение, состоящее из трех встречных потоков [1]. Профиль температуры совпадает с чисто теплопроводным, применима стационарная теория теплового взрыва; *2* — нестационарное вихревое вторичное движение, представляющее собой расположенную в шахматном порядке систему вихрей, бегущих вдоль слоя (см. рис. 1); *3* — тепловой взрыв. Разогрев, вызванный сильной экзотермической реакцией, настолько велик, что механизмы теплопроводности и конвективного теплопереноса, обусловленного имеющимся в этой области интенсивным поперечным движением, уже недостаточны для компенсации тепловыделения — происходит лавинообразное самоускорение реакции.

Таким образом, проведенное численное решение полных нелинейных уравнений конвекции для случая реакции нулевого порядка показывает, что при достаточно больших числах Gr в слое возникает нестационарное вихревое движение с дополнительным по сравнению с теплопроводным режимом поперечным переносом тепла. Происходящее при этом охлаждение среды приводит к существенному сдвигу порога теплового взрыва FK_* в область большей интенсивности тепловыделения.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за руководство работой.

Поступила в редакцию 18/IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Е. А. Еремин.**— В кн.: Конвективные течения. Вып. 2. Пермь, 1981.
2. **Е. А. Еремин.** Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, 3, 123.
3. **Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
4. **Д. А. Франк-Каменецкий.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
5. **Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов.** Разностные методы исследования задач теплообмена. Минск: Наука и техника, 1976.
6. **Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Якимов.** ПММ, 1970, 34, 4.
7. **Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Якимов.** ПММ, 1973, 37, 3.
8. **А. Г. Мержанов, Э. А. Штессель.** ФГВ, 1971, 7, 1.
9. **Э. А. Штессель, К. В. Прибыткова, А. Г. Мержанов.** ФГВ, 1971, 7, 2.
10. **D. R. Lones.** Int. J. Heat and Mass Transf., 1973, 16, 1.