7. **Байбородин Ю. В., Криксунов Л. З., Литвиненко О. Н.** Справочник по лазерной технике.— Киев: Техника, 1978.
8. **Романченко В. И., Марусий О. И., Крамаренко И. В.** Микроструктура алюминиевого сплава на ранних стадиях откола // Пробл. прочности.— 1983.— № 9.

*Поступила 3/III 1986 г.*

---

УДК 534.539.3

# АСИМПТОТИКА ПОЛЯ СМЕЩЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

*Г. П. Коваленко*

(*Сумы*)

В работе получены точные и приближенные уравнения движения упругой непрерывно-неоднородной среды в виде связанных волновых уравнений и асимптотика смещений в слабонеоднородном упругом полупространстве при действии на него касательной и нормальной нагрузок, гармонически зависящих от времени. Влияние неоднородности среды на асимптотику смещений, групповую скорость и длину волны Рэлея, а также интенсивность энергии взаимодействия волн выражены через коэффициенты, связывающие волновые уравнения.

**1**. Линейное взаимодействие волн в неоднородных средах во многих случаях [1] можно описать связанной системой волновых уравнений типа

$$\left(\nabla^2 - v_n^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_n - Z_n\Phi_{3-n} = 0,\ n = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $Z_n$ — известные функции; искомые функции $\Phi_n$ могут иметь различный смысл; другие обозначения общеприняты. Представляет интерес получить уравнения типа (1.1) для упругой среды, параметры Ламэ $\lambda$, $\mu$ и плотность $\rho$ которой зависят от одной координаты. Векторное уравнение движения такой среды имеет вид

$$\nabla(\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\mu\nabla\times\mathbf{u}) + 2\mu'(\mathbf{u}' - \mathbf{i}_z\nabla\cdot\mathbf{u} + \tag{1.2}$$
$$+ \mathbf{i}_z\times\nabla\times\mathbf{u}) = \rho\ddot{\mathbf{u}},\ \varepsilon = \lambda + 2\mu.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещений; штрих обозначает производную по декартовой координате $z$, а точка — по времени; $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор; $\nabla$ — набла-оператор в декартовой системе координат.

Применив преобразование Фурье по переменным $x$ и $y$ к уравнению (1.2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с основной и возмущающей матрицами. Основная матрица не содержит производных от параметров среды. Эффективность матричных алгоритмов интегрирования таких систем [2] существенно зависит от возможности найти собственные значения основной матрицы в явном и компактном виде. В данном случае собственные значения находятся после решения кубического уравнения и довольно громоздки, а потому матричные алгоритмы интегрирования становятся малоэффективными. Метод взвешенных потенциалов позволяет получить систему уравнений без указанного недостатка. Поскольку упомянутый метод существенно затрагивался на некоторых конференциях [3, 4] при обсуждении близких вопросов, то ниже он излагается весьма кратко в том объеме, который необходим для рассматриваемой граничной задачи. Представим вектор смещения $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u} = f_1^{-1}\nabla(f_1\Phi_1) + f_2^{-1}\nabla\times\nabla\times(\mathbf{i}_z f_2\Phi_2) + \nabla\times(\Phi_3\mathbf{i}_z), \tag{1.3}$$

где $f_n$ — неизвестные пока функции переменной $z$. Подставим (1.3) в (1.2) и к результату подстановки прибавим два тождества, содержащих функции $h_n$:

$$\nabla(h_1\Phi_1') - \mathbf{i}_z\left(h_1\nabla^2 + h_1'\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_1 - (\nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z h_1 - h_1'\nabla_t)\Phi_1 \equiv 0,$$

$$\nabla(h_2\nabla_t^2\Phi_2) - \left(\mathbf{i}_z h_2'\nabla_t^2 - \nabla\times\nabla\times h_2\mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_2 - \nabla_t(h_2\nabla^2\Phi_2 + h_2'\Phi_2') \equiv 0,$$

$$\nabla_t^2 = \nabla_t\cdot\nabla_t,\ \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}.$$

После некоторых преобразований имеем векторное уравнение

(1.4) $$\nabla\Lambda_{11} + \nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z\Lambda_{22} + \nabla\times\mathbf{i}_z\Lambda_{33} - \nabla_t\Lambda_{12} - \mathbf{i}_z\Lambda_{13} = 0$$

($\Lambda_{nm}$ — дифференциальные выражения, зависящие от $\Phi_n$), которое будет удовлетворено, если потенциалы $\Phi_n$ найти из системы скалярных уравнений

(1.5) $$\Lambda_{11} + \Lambda_{22}' - \Lambda_{12} = 0,\ \Lambda_{11}' - \nabla_t^2\Lambda_{22} - \Lambda_{13} = 0,$$

$$\Lambda_{33} = \mu\nabla^2\Phi_3 + \mu'\Phi_3' - \rho\ddot{\Phi}_3 = 0.$$

Значения функций $h_n$, $g_n = f_n' f_n^{-1}$ выбираем таким образом, чтобы выражения $\Lambda_{nm}$ максимально упрощались. Если взять $h_1 = h_2 = -2\mu'$, $g_1 = g_2 = \rho'\rho^{-1}$, то

$$\Lambda_{nn} = \chi_n\{\square\Phi_n + Q_n[(2-n)\nabla_t^2 + 1 - n]\Phi_{3-n}\}\quad (n = 1, 2),$$

$$\square_n = \nabla^2 + p_\rho\frac{\partial}{\partial z} + p_\rho' - v_n^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ \chi_1 = \varepsilon,\ \chi_2 = \mu,$$

$$\Lambda_{12} = Z_1\nabla_t^2\Phi_2,\ \Lambda_{13} = Z_1\Phi_1,\ Z_1 = 2\mu' p_\rho - 2\mu'',$$

$$Q_n = p_\rho - 2p_\mu\gamma^{-2(2-n)},\ p_\rho = \rho'\rho^{-1},\ p_\mu = \mu'\mu^{-1},\ \gamma^2 = \varepsilon\mu^{-1}.$$

В системе (1.5) третье уравнение отделено от первых двух, каждое из которых имеет третий порядок. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающая (1.5), интегрируется эффективно, так как характеристический многочлен ее основной матрицы распадается на двучленные квадратичные множители. Для слабонеоднородной среды можно использовать уравнения первого приближения, т. е. (1.5), в которых отброшены слагаемые $\Lambda_{12}$, $\Lambda_{13}$ как величины второго порядка малости. Тогда получим систему приближенных уравнений

(1.6) $$\nabla^2\Phi_1 + (p_\rho\Phi_1)' - v_1^{-2}\ddot{\Phi}_1 + Q_1\nabla_t^2\Phi_2 = 0,$$

$$\nabla^2\Phi_2 + (p_\rho\Phi_2)' - v_2^{-2}\ddot{\Phi}_2 - Q_2\Phi_1 = 0,$$

$$\nabla^2\Phi_3 + p_\mu\Phi_3' - v_2^{-2}\ddot{\Phi}_3 = 0.$$

2. Ниже (1.6) используется для нахождения асимптотики поля смещений в упругом слабонеоднородном полупространстве, если в плоскости $z = 0$ заданы граничные условия

(2.1) $$\sigma_n = \psi_n(x, y)\, e^{i\omega t},\ n = 1, 2, 3,\ x, y \in \Omega,$$

$$\sigma_1 = \sigma_z,\ \sigma_2 = \sigma_{xz},\ \sigma_3 = \sigma_{yz},$$

где $\Omega$ — ограниченная область приложения нагрузки; $\sigma_n$ — компоненты тензора напряжений; $\omega$— частота колебаний. Множитель $e^{i\omega t}$ далее опущен. Решение системы (1.6), ограниченное при $z\to\infty$, запишем в пространстве изображений Фурье по переменным $x$, $y$ в первом приближении, т. е. с сохранением слагаемых, содержащих первые производные по $z$ параметров среды. При этом выполняются следующие операции. После преобразования по Фурье первые два уравнения (1.6) (третье интегрируется независимо) записываются в виде системы четырех уравнений первого порядка, собственные значения основной матрицы которой равны

$\pm(\alpha^2+\beta^2-k_n^2)^{1/2}$, $k_n=\omega v_n^{-1}$, где $\alpha$, $\beta$ — параметры преобразования Фурье. Далее система подвергается матричному преобразованию, после чего основная матрица становится квазидиагональной, так как предполагается, что собственные значения ее имеют по одной точке поворота. Затем строится в первом приближении вторая преобразующая матрица, которая обеспечивает расщепление системы на две независимые пары уравнений [5]. Наконец, к каждой паре и к третьему уравнению из (1.6), преобразованному по Фурье, применяется метод эталонных систем, в результате чего

$$\mathbf{\Phi}=W\mathbf{C},\ \mathbf{\Phi}=\{\Phi_1,\Phi_1',\Phi_2,\Phi_2',\Phi_3,\Phi_3'\}^t, \tag{2.2}$$

$$W=\left\|\begin{matrix}\left\|\begin{matrix}W_1 & W_1' & d_2W_2 & d_2W_2'\\ d_1W_2 & d_1W_2' & W_2 & W_2'\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}}\left\|W_2W_2'\right\|}\end{matrix}\end{matrix}\right\|^t,$$

$$W_n=\frac{w\left(k^{3/2}\varphi_n\right)}{\sqrt{\varphi_n'}},\ \varphi_n=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{z_n}^{z}m_n(z)\,dz\right)^{2/3},\ \rho_0=\rho(0),$$

$$m_n=\left(\zeta^2+\xi^2-v_{20}^2v_n^{-2}(z)\right)^{1/2},\ d_n=(-1)^n\frac{Q_n}{1-\gamma^{-2}}v_n^2(z)\,v_2^{-2}(0),$$

$$\mathbf{C}=(c_1,c_2,c_3)^t,\ \zeta=\alpha k^{-1},\ \xi=\beta k^{-1},\ k=\omega v_2^{-1}(0).$$

Здесь $w$ — функция Эйри, ограниченная при $z\to\infty$; $W_n$ — функция Эйри — Фока; индекс $t$ указывает на операцию транспонирования. Постоянные $c_n$ находятся из граничных условий (2.1), преобразованных по Фурье:

$$\mu PW\mathbf{C}=\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)^t,$$

где

$$P=\left\|\begin{matrix}2i\alpha q & 2i\alpha & i\alpha\varkappa^2 & 0 & 0 & i\beta\\ 2i\beta q & 2i\beta & i\beta\varkappa^2 & 0 & 0 & i\alpha\\ \varkappa^2 & 0 & 2\eta^2q & 2\eta^2 & 0 & 0\end{matrix}\right\|;$$

$$\eta^2=\alpha^2+\beta^2;\ \varkappa^2=2\eta^2-k_2^2;\ q=p_\rho+Q_2.$$

Трансформанты Фурье в (2.2) обозначены так же, как и оригиналы. Произвольные постоянные определим для двух случаев. Пусть в граничном условии (2.1) отличным от нуля является нормальное напряжение. Тогда

$$\mathbf{u}=(2\pi)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int SW\mathbf{C}e^{i(\alpha x+\beta y)}d\alpha\,d\beta, \tag{2.3}$$

$$S=\left\|\begin{matrix}i\alpha & 0 & i\alpha p_\rho & i\alpha & i\beta & 0\\ i\beta & 0 & i\beta p_\rho & i\beta & -i\alpha & 0\\ p_\rho & 1 & \eta^2 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|,$$

$$c_1=\psi_1(\alpha,\beta)\,L\,(\mu_0\Delta)^{-1},\ c_2=-\psi(\alpha,\beta)\,K\,(\mu_0\Delta)^{-1},$$

$$K=2W_1'+W_1(2q+\varkappa^2d_2),\ L=\varkappa^2W_2+2d_1\eta^2W_2,$$

$$\Delta=\varkappa^4W_1W_2-4\eta^2W_1'W_2'+2\tau^2\varkappa^2\left(W_2W_1'-W_1W_2'\right)(d_2-d_1)-$$
$$-4q\eta^2\left(W_1W_2'+W_2W_1'\right),\ \tau^2=\zeta^2+\xi^2,\ \mu_0=\mu(0).$$

Если отличны от нуля только касательные напряжения, то смещения находим по тем же зависимостям (2.3), но при других значениях постоянных $c_n$, которые теперь определяются как

$$c_n = \pi_1 E_n (\mu_0 \Delta)^{-1} \quad (n = 1, 2), \quad c_3 = \pi_2 (W'_2)^{-1},$$

$$\pi_1 = (\psi_2(\alpha, \beta)\alpha + \psi_3(\alpha, \beta)\beta)(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}, \quad E_1 = 2\eta^2 W'_2 + (2q\eta^2 + \varkappa^2 d_1) W'_2,$$

$$E_2 = \varkappa^2 W_1 + 2\eta^2 d_2 W'_1,$$

$$\pi_2 = -i(\psi_2(\alpha, \beta)\beta - \psi_3(\alpha, \beta)\alpha)\eta^{-2}.$$

В простейшем случае постоянных напряжений $\sigma_n$ внутри области, имеющей форму прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, множители $\psi_n = \sigma_r \sin(\alpha a) \sin(\beta b)(\alpha\beta)^{-1}$. Анализ поля смещений (2.3) проведем в той области переменных, где функции Эйри — Фока допускают асимптотическое представление

$$W_n = m_n^{-1/2} \exp\left(-k \int_{z_n}^{z} m_n dz\right), \quad n = 1, 2$$

($z_n$ — точки поворота). После указанной замены вычислим главный член асимптотики полученного интеграла в далекой точке поля. Для этого нужно вычислить вклад трех видов точек: седловых, ветвления и полюса подынтегральной функции. Но поскольку вклад точек ветвления на порядок ниже вклада седловых [6], здесь он не рассматривается. Седловые точки находим приближенно, считая среду слабонеоднородной. В фазовой функции

$$-k \int_0^z m_n(z)\, dz + i(\alpha x + \beta y)$$

интеграл вычислим методом замораживания и перейдем к переменным $R$, $\theta$, $\varphi$ сферической системы координат. Тогда для седловых точек получим

$$\zeta_n = -q_n \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi_n = -q_n \sin\theta \sin\varphi, \quad q_n = v_2(0) v_n^{-1}(z).$$

Вклад седловых точек в поле смещений отметим индексом $s$. После вычислений, предусмотренных двумерным методом стационарной фазы, выразим смещения упругой среды в сферической системе координат по формулам

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_\theta \end{pmatrix} = (u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \pm u_z \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$u_\varphi = -u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi.$$

Тогда для смещений получим

(2.4) $$u_{ns} = \sum_{\nu=1}^{2} G_\nu K_{n\nu}, \quad u_{1s} = u_{Rs}, \quad u_{2s} = u_{\theta s}, \quad u_\varphi = 0,$$

$$G_\nu = \frac{q_\nu \cos\theta}{2\pi Rk} \exp\left(-ikR\gamma^{\nu-2} + \frac{\pi i}{2}\right) \left(\frac{m_\nu(0)}{m_\nu(z)}\right)^{1/2} \frac{\psi_1(\zeta_\nu, \xi_\nu)}{F(\zeta_\nu, \xi_\nu)},$$

$$K_{11} = k^3(\mu_1 \varkappa_{1\theta} - 2\delta_1), \quad \mu_n = kq_n i - p_\rho \cos\theta,$$

$$K_{22} = k^3 q_2 \sin^2\theta (2э_2\mu_2 - q_2 T_2), \quad T_n = 2q(0) + \varkappa_{n\theta} d_n,$$

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{21} \end{pmatrix} = \frac{k^3\gamma^2 \sin\theta}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} -2Q_2 э_2 q_2 \\ \varkappa_{10}^2 Q_1 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_{n\theta}^2 = 2q_n^2 \sin^2\theta - 1,$$

$$\delta_n = 2q_n э_n d_n(0) \sin^2\theta, \quad э_n = \left(\gamma^{-2(n-1)} - q_n^2 \sin^2\theta\right)^{1/2},$$

$$F(\zeta, \xi) = k^3[(\varkappa^4 - 4\tau^2 m_1 m_2)k + 2(d_2 - d_1)\varkappa^2\tau^2(m_2 - m_1) + 4\tau^2 q(m_1 + m_2)],$$

где $\psi_1(\zeta_\nu, \xi_\nu)$ — преобразование Фурье функции $\psi_1$, вычисленное в седловой точке. При действии касательной нагрузки вместо $\psi_1$, $K_{nk}$ следует брать $\pi_1$, $L_{nk}$ и смещение $u_\varphi$ будет отличным от нуля:

$$\begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{21} \end{pmatrix} = \frac{k^3 \sin^2\theta\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} q_2\varkappa_{2\theta}Q_2 \\ \text{э}_1 q_1^2 Q_1 \end{pmatrix},$$

$$L_{11} = k^3 q_1 \sin^2 \theta (2\mu_1 \text{э}_1 + q_1 T_1),$$

$$L_{22} = ik^3 q_2^2 \sin\theta\,(\mu_2\varkappa_{2\theta} + 2\delta_2),$$

$$u_\varphi = i \sin\theta q_2^2 \pi_2 (\zeta_2, \xi_2) \frac{\cos\theta}{2\pi R}\, e^{-\left(kR + \frac{\pi}{2}\right)} (m_2(0)\, m_2(z))^{-1/4}.$$

Сделаем ряд выводов. В однородной среде смещения $u_R$ и $u_\theta$ распространяются далеко от источника как соответственно продольная и поперечная волны. В данном случае продольная волна в смещении $u_R$ сопровождается поперечной, которая исчезает в случае однородной среды. Поэтому основная волна продольная, а поперечную можно назвать индуцированной. В смещении $u_\theta$ основная волна поперечная, а продольная — индуцированная. Амплитуды индуцированных волн пропорциональны коэффициентам связи волновых уравнений $Q_n$. Как известно [6], для однородной среды главный член асимптотики смещения $u_\theta$ действительный, а в смещении $u_\theta$ он может быть как действительным, так и комплексным. Неоднородность среды делает оба указанных выражения комплексными; в частности, комплексной является функция Рэлея в обеих седловых точках. Например, в седловой точке $\zeta_1$, $\xi_1$ имеем

$$F = k^3 (F_{11}k + iF_{12}), \quad F_{11} = \varkappa_{1\theta}^4 + 4q_1^2 \text{э}_1 \text{э}_2 \sin^2\theta,$$

$$F_{12} = 2q_1^2 \sin^2\theta \left[\varkappa_{1\theta}^2 (d_2 - d_1)(\text{э}_2 - \text{э}_1) + 2q(\text{э}_2 + \text{э}_1)\right].$$

Это значит, что максимальное радиальное и окружное смещения достигаются в разных точках волновой поверхности в различное время; различие во времени зависит не только от взаимного расположения двух точек, но и от характера распространения волн. Так, при волноводном распространении, когда $v_1$ возрастает, $\text{э}_1$ остается действительной величиной. Если же $v_1$ убывает, то $\text{э}_1$ становится мнимой при $q_1 \sin\theta > \gamma^{-1}$ и вид функции $F$ изменится.

Неоднородность среды приводит к перераспределению энергии источника колебаний между продольными, поперечными и поверхностными волнами. Часть энергии идет на образование индуцированных волн. Выведем формулу для интенсивности энергии взаимодействия основных и индуцированных волн. Как известно, интенсивность излучения энергии определяется как средняя за период энергия излучения на единицу площади и находится по формуле

$$-\frac{i\omega}{4} (\sigma_R \bar{u}_R - \bar{\sigma}_R u_R + \sigma_{R\theta} u_\theta - \bar{\sigma}_{R\theta} u_\theta),$$

где черта обозначает комплексно-сопряженную величину и принято, что $u_\varphi = 0$. Если записать смещения в виде

$$u_R = (A_1 + iB_1)F^{-1}(\zeta_1, \xi_1) + V_1 Q_2 F^{-1}(\zeta_2, \xi_2) = u_{Rl} + u_{Rs}, \tag{2.5}$$

$$u_\theta = (A_2 + iB_2)F^{-1}(\zeta_2, \xi_2) + V_2 Q_1 F^{-1}(\zeta_1, \xi_1) = u_{\theta s} + u_{\theta l}$$

(вторые слагаемые справа отвечают индуцированным волнам), то можно показать, что в далекой точке поля

$$\sigma_R = \mu\gamma^2 i(\gamma^{-1} u_{Rl} + u_{Rs})k + O(R^{-2}),$$

$$\sigma_\theta = \mu i(\gamma^{-1} u_{\theta l} + u_{\theta s})k + O(R^{-2}).$$

Здесь $O(R^{-2})$ указывает па порядок величины отброшенных слагаемых. Тогда для интенсивности энергии имеем в первом приближении

$$k\frac{\omega\mu}{4}\{2\gamma u_{Rl}\bar{u}_{Rl} + 2u_{\theta s}\bar{u}_{\theta s} + (1 + \gamma^{-1})\,[(u_{Rl}\bar{u}_{Rs} + \bar{u}_{Rl}u_{Rs})\,\gamma^2 + u_{\theta l}\bar{u}_{\theta s} + \bar{u}_{\theta l}u_{\theta s}]\}.$$

Второе слагаемое в полученной формуле дает интенсивность энергии взаимодействия основных и индуцированных волн. Запишем его более подробно, для чего введем два плоских вектора $N = F_{n1} + iF_{n2}$, компоненты которых равны действительным и мнимым частям функции Рэлея, вычисленным в седловых точках. Тогда указанное слагаемое примет вид

$$k\frac{\omega}{4}\mu\left(1+\gamma^{-1}\right)\sum_{n=1}^{2}\frac{Q_n V_n \gamma^{2(2-n)}\left(B_n N_1\cdot N_2 + (-1)^n A_n \left|N_1 \times N_2\right|\right)}{\left|N_1\right|^2\left|N_2\right|^2},$$

где $A_n$, $B_n$, $V_n$ находятся путем сравнения (2.4) и (2.5).

Для оценки смещений, вызванных волной Рэлея в далекой точке поля, найдем корень функции $F(\zeta,\ \xi)$, отвечающий поверхностной волне. Если в качестве нулевого приближения взять значение корня $b_0$ для однородной среды, то для первого приближения методом Ньютона получим

$$b_1 = b_0(1-M), \quad M = M_1 M_2^{-1},$$

$$M_1 = 2b_0^{-2}\left(2-b_0^2\right)(d_2-d_1)(э_{2b}-э_{1b}) + 4q(э_{2b}+э_{1b}),$$

$$M_2 = \Pi_1 k + \Pi_2, \quad \Pi_1 = 4b_0\left(э_{2b}э_{1b}^{-1}\gamma^{-2} + э_{1b}э_{2b}^{-1} - 2 + b_0^2\right),$$

$$\Pi_2 = M_1 - 2(d_2-d_1)\left[2(э_{2b}-э_{1b}) + \left(2-b_0^2\right)\left(\gamma^{-2}э_{1b}^{-1} - э_{2b}^{-1}\right)\right] -$$

$$- 4qb_0^2\left(э_{1b}^{-1}\gamma^{-2} + э_{2b}^{-1}\right), \quad э_{nb} = \left(1 - b_0^2\gamma^{2(n-2)}\right)^{1/2}.$$

Отсюда находим приращение скорости $\Delta v_R$ и длины $\Delta l_R$ волны Рэлея, вызванное неоднородностью среды:

$$\Delta v_R = v_R - v_{R0} = b_0 M v_2(0), \ \ \Delta l_R = 2\pi\omega^{-1} b_0 M v_2(0)$$

(индекс 0 указывает на значение величины для однородной среды). Групповую скорость волны Рэлея $v_{Rg}$ найдем, дифференцируя зависимость $\omega = k_R v_R$ по $k_R$ — волновому числу волны Рэлея:

$$v_{Rg} = \frac{d\omega}{dk_R} = v_R(1-M)\left(1 - Mk_R^{-1}M_2^{-1}\right)^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, с возрастанием частоты колебаний влияние неоднородности убывает и групповая скорость в пределе стремится к фазовой. Для оценки поля смещений, вызванных волной Рэлея в далекой точке поля, вычислим внутренний интеграл в (2.3) по теореме о вычетах, а внешний — методом стационарной фазы. При этом в корне Рэлея $\zeta = \zeta_R = \left(c_R^2 - \xi^2\right)^{1/2}$, $c_R = v_{20}v_R^{-1}$, а стационарное значение $\xi$ находится в точке $\xi_R = c_R \sin\varphi$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,(yx^{-1})$. Приведем в качестве примера асимптотику осевого смещения $u_{zR}$ в точке $z = 0$ при действии нормального напряжения

$$u_{zR} = G_R\left[m_{1R}k + 2p_\mu c_R^2 - p_\rho\right], \quad r = (x^2+y^2)^{1/2},$$

$$G_R = 2\pi\psi_1(\zeta_R, \xi_R)\left(\frac{2\pi c_R}{Rk}\right)^{1/2}\exp\left(i\omega r v_R^{-1} - i\omega t\right)\Gamma^{-1}(c_R),$$

$$\Gamma(c_R) = \zeta^{-1}\frac{\partial F}{\partial\zeta}, \quad \zeta = \zeta_R, \quad m_{1R} = \left(c_R^2 - v_2^2(0)\,v_1^{-2}(0)\right)^{1/2}.$$

В случае постоянного напряжения $\sigma_1$, приложенного к границе по прямоугольной площадке,

$$\psi_1(\zeta_R, \xi_R) = k_R^{-2}\sin^{-1}\varphi\cos^{-1}\varphi\sin(k_R a\cos\varphi)\sin(k_R b\sin\varphi)\,\sigma_1.$$

Отсюда следует, что если размеры площадки выбрать согласно зависимостям $a = \dfrac{n\pi v_R}{\omega\cos\varphi}$ или $b = \dfrac{n\pi v_R}{\omega\sin\varphi}$, то смещения будут отсутствовать. Следовательно, можно оценить влияние неоднородности среды на размеры площадки, при которых на возбуждение волн Рэлея в данном направлении передается максимальная или минимальная часть энергии источника колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.** Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1983.
3. **Коваленко Г. П.** Метод связанных параметров в теории упругости непрерывно-неоднородных сред // Механика неоднородных структур. Тез. докл. I Всесоюз. конф.— Киев: Наук. думка, 1983.
4. **Коваленко Г. П.** Матричные алгоритмы метода асимптотически эквивалентных систем в задачах неоднородной вязкоупругости // Восьмая Всесоюз. конф. по прочности и пластичности. Тез. докл.— Пермь, 1983.
5. **Фещенко С. Ф., Шкиль Н. Н., Николенко Л. Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.
6. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.


*Поступила 17/IV 1986 г.*

---

УДК 539.374

# АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

*В. Г. Новиков*

(*Москва*)

Особенности и детали пластического течения у вершины трещины определяют ее развитие [1]. Поэтому важно иметь правильное представление о форме и размерах пластической зоны, об интенсивности деформаций в ней. В связи с этим большое значение приобретают задачи, в ходе решения которых, помимо определения напряжений и деформаций, должна быть определена без предварительных допущений граница, отделяющая упругую область от пластической. Приближенными или численными методами такие задачи исследовались в [2—8], а аналитические решения в замкнутом виде получены только для антиплоской деформации безграничной среды с одной прямолинейной трещиной или периодической системой коллинеарных дефектов [9—14]. В данной работе получено точное аналитическое решение упругопластической задачи об антиплоской деформации полосы с полубесконечной трещиной.

Рассмотрим антиплоскую деформацию полосы из упругопластического материала, занимающую область $|x| < \infty$, $|y| \leqslant d$. Предполагается, что в пластическом состоянии поведение материала описывается условием Треска

$$\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 = \tau_*^2 \tag{1}$$

и ассоциированным законом пластического течения, а в упругом — линейным законом Гука

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 < \tau_*^2, \tag{3}$$

где $\sigma_{xz}$ и $\sigma_{yz}$ — компоненты тензора напряжений; $\tau_*$ — предел текучести; $\mu$ — модуль сдвига; $w$ — смещение вдоль оси $z$. В полосе при $y = 0$, $x < 0$ имеется полубесконечный разрез-трещина, берега которого свободны от нагрузки

$$\sigma_{yz} = 0, \; x < 0, \; y = 0. \tag{4}$$

Известно [5, 9], что при антиплоской деформации область пластичности примыкает к вершине трещины и расположена целиком в области $x > 0$, как показано па рис. 1, а распределение напряжений и деформаций в пластической зоне имеет вид

$$\sigma_{\theta z} = \tau_*, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\tau_*}{\mu} R(\theta), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \tag{5}$$