

УДК 519.642

Регуляризация рядов Фурье с приближенными коэффициентами для задачи оценки плотности распределения вероятностей фаз

М.Л. Маслаков^{1,2}, В.В. Егоров^{1,2}

¹Российский институт мощного радиостроения, 11-я линия В.О., 66, Санкт-Петербург, 199178

²Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, 67, лит. А, Санкт-Петербург, 190000

E-mails: maslakovml@gmail.com (Маслаков М.Л.), egorovrimr@mail.ru (Егоров В.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 15, 2022.

Маслаков М.Л., Егоров В.В. Регуляризация рядов Фурье с приближенными коэффициентами для задачи оценки плотности распределения вероятностей фаз // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 157–171.

В работе рассматривается задача оценки плотности распределения вероятностей фаз для сигналов с фазовой манипуляцией. При этом модулирующая последовательность и, соответственно, значения фаз символов, а также статистические характеристики этой последовательности неизвестны. Оценка плотности вероятности фаз осуществляется по ограниченной выборке на основе расчета коэффициентов Фурье. При этом осуществляется регуляризация получаемых коэффициентов Фурье. Для повышения точности оценки в статье рассматривается применение многопараметрической регуляризации. Представлены результаты численных экспериментов.

DOI: 10.15372/SJNM20220205

Ключевые слова: угловые измерения, фаза, плотность распределения фаз, ряд Фурье, регуляризация, многопараметрическая регуляризация.

Maslakov M.L., Egorov V.V. Regularization of Fourier series with approximate coefficients for the problem of phase probability density function estimation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 2. — P. 157–171.

This paper considers the problem of phases probability distribution function estimation for phase-shift-keying signals. The modulating sequence, and, accordingly, the values of the symbols phases, as well as the statistical characteristics of this sequence are unknown. The Fourier coefficients are calculated based on a limited sample for estimation of phases probability distribution function. In this case, the obtained Fourier coefficients are regularized. Application of multiparameter regularization for increasing the estimation accuracy are considered. The numerical simulation results are presented.

Keywords: angle estimation, phase, phase probability distribution function, Fourier series, regularization, multiparameter regularization.

Введение

Одной из задач анализа сигналов с фазовой манипуляцией (ФМ), принятых на фоне аддитивного шума, является оценка плотности распределения вероятности фаз символов. При этом случайная величина представляет собой углы фазы в диапазоне $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$. Такое распределение называют круговым или полярным распределением [1, 2].

Измеренные значения фаз, являющиеся оценками начальных фаз комплексных огибающих, соответствующих элементарным символам принимаемого ФМ-сигнала, можно рассматривать как точки на единичной окружности. При этом значение фазы n -го символа в общем случае можно представить в форме

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n + \psi_s + n\omega_d T_{\text{sym}}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где φ_n — истинные значения фаз передаваемого символа, ζ_n — ошибка измерения, связанная с аддитивным шумом, ψ_s — постоянное смещение фазы, ω_d — доплеровское смещение частоты, T_{sym} — длительность символа.

При этом, как указано выше, $\psi_n \in [-\pi; \pi]$ или $\psi_n \in [0; 2\pi]$.

Значения фаз символов φ_n в зависимости от порядка ФМ, обозначаемого M , могут принимать значения: $\{0; \pi\}$ для двоичной ФМ (BPSK — Binary Phase-Shift-Keying), т. е. при $M = 2$; $\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\} \equiv -\frac{\pi}{2}$ для квадратурной ФМ (QPSK — Quadrature Phase-Shift-Keying), т. е. при $M = 4$; и т. д., и соответствуют определенной последовательности бит (см. [3]). В данной работе полагаем, что эта последовательность является информационной, а значит неизвестна. Также неизвестны соответствующие вероятности возможных значений символов p_m . При этом отметим, что на практике часто значения символов (бит) равновероятны, а значит

$$p_m = \frac{1}{M}, \quad m = 0, \dots, M - 1. \quad (2)$$

Однако в ряде практических случаев в информационных последовательностях встречаются длительные сегменты одинаковых (обычно $\{0\}$) символов. Кроме того, в условиях ограниченной (и относительно небольшой) выборки очевидно, что условие (2) далеко не всегда выполнено.

Целью данной работы является оценка плотности распределения вероятностей фаз по выборке фаз символов принятого информационного неизвестного ФМ-сигнала. При этом при передаче таких сигналов по каналам с быстро изменяющимися характеристиками искомая оценка должна быть получена достаточно оперативно, т. е. на длительности сигнала, содержащего небольшое количество символов. Таким образом, объем анализируемой выборки в этом случае невелик.

Обозначим плотность распределения вероятностей фаз как $W(\theta)$, а ее оценку как $\hat{W}(\theta)$. Для получения данной оценки в работе осуществляется регуляризация коэффициентов Фурье, рассчитываемых на основе имеющихся измерений фаз символов принимаемого зашумленного сигнала.

Отметим, что так как истинные значения символов (бит) модулируемой последовательности (и, следовательно, значения фаз φ_n) неизвестны, то рассматриваемый метод можно классифицировать как метод слепой оценки плотности распределения вероятностей фаз.

Статья организована следующим образом. В пункте 1 рассмотрена оценка коэффициентов Фурье для построения эмпирической плотности распределения вероятностей фаз

по имеющейся выборке в виде ряда. В п. 2 проанализирован вопрос регуляризации данных коэффициентов. Приведена регуляризация методом Тихонова, а также предложены стабилизирующие множители с учетом специфики данной задачи. Результаты численного эксперимента представлены в п. 3. Выводы по работе сформулированы в п. 4.

1. Метод оценки эмпирической плотности распределения вероятностей фаз

В данной работе ограничимся рассмотрением случая, когда постоянное и доплеровское смещения фазы отсутствуют. Тогда вместо (1) имеем неклассифицированную выборку значений фаз вида

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Некоторые методы параметрического и непараметрического оценивания плотностей распределения вероятностей достаточно полно рассмотрены и проанализированы в [4, 5]. Отсюда следует, что локальные методы требуют достаточно большой объем анализируемой выборки. То же касается и, например, гистограммного метода оценивания. Применение метода максимума правдоподобия требует обоснованного и не всегда очевидного выбора модели искомой плотности распределения, а также значительных вычислительных затрат даже при относительно небольшом объеме анализируемой выборки. Поэтому в условиях малого объема выборки представляется целесообразным применение метода аппроксимации с использованием ортогональных функций. В этом случае искомая плотность распределения вероятностей представляется в виде ряда

$$W(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(\theta),$$

где c_k — коэффициенты ряда, $f_k(\theta)$ — ортогональные базисные функции.

Оцениваемая эмпирическая плотность распределения является априорно периодической функцией, а значит для получения решения естественно использование тригонометрического базиса, что следует из [6, 7].

Как известно [1, 2], плотность кругового распределения вероятности фаз $W(\theta)$ можно записать в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \right]. \quad (4)$$

Оценку коэффициентов a_k, b_k получим на основе выборки (3) методом ортогональных разложений (проекций) [5] следующим образом:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(k\psi_n), \quad \hat{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin(k\psi_n). \quad (5)$$

В результате получим оценку плотности распределения вероятностей фаз:

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K (\hat{a}_k \cos(k\theta) + \hat{b}_k \sin(k\theta)) \right], \quad (6)$$

где K — число коэффициентов Фурье.

Такую оценку называют также ортогональной оценкой плотности распределения вероятности случайной величины [5].

Отметим, что в случае, когда плотность распределения $W(\theta)$ является симметричной, коэффициенты (см. [7, 8])

$$b_k \equiv 0, \quad k \in [0; \infty). \quad (7)$$

Тогда вместо (4) имеем

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta)) \right], \quad (8)$$

а соответствующая оценка есть

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K (\hat{a}_k \cos(k\theta)) \right]. \quad (9)$$

Рассмотрим свойства оценки плотности распределения вероятностей фаз.

Так как на практике имеем лишь оценки коэффициентов $\hat{a}_k$, то сначала рассмотрим их свойства. Ограничиваясь случаем $\omega_d = 0$, а также принимая во внимание [5], приходим к тому, что $\hat{a}_k$ есть несмещенная оценка a_k . Отметим, что при $\omega_d \neq 0$ каждый очередной символ принимаемого сигнала имел бы линейно растущую фазовую добавку, что можно интерпретировать как вращение вектора на плоскости, ограниченной единичной окружностью.

Кроме того, согласно [5, 9], оценка $\hat{a}_k$ также является состоятельной, т.е. устремив $N \rightarrow \infty$ в (5) имеем

$$\forall \chi > 0 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\hat{a}_k - a_k| < \chi) = 1.$$

Однако оценка $\hat{W}(\theta)$ (9) является несмещенной лишь в случае, когда $W(\theta)$ можно точно представить суммой конечного ряда с числом элементов K . При этом смещение будет тем меньше, чем больше число членов ряда K и чем быстрее будут убывать коэффициенты a_k (см. подробнее в [5]). Важно отметить, что скорость убывания коэффициентов a_k связана не с погрешностью оценки фазы, а с ошибкой фазы символа, зависящей от отношения сигнал/шум (ОСШ).

Кроме того в [10, 11] показано, что

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \cos(k\theta)$$

не является “хорошим” приближением суммы ряда (в метрике C)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta),$$

что связано с неустойчивостью ее к малым изменениям коэффициентов $\hat{a}_k$. А значит и оценка (9) в случае несогласованного выбора значения K не может являться состоятельной оценкой $W(\theta)$.

Таким образом, для получения оценки плотности распределения вероятностей фаз естественно воспользоваться методом регуляризации.

2. Регуляризированная оценка $\hat{W}(\theta)$

2.1. Регуляризация методом Тихонова

Задача суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами рассмотрена в работах [12, 13]. В соответствии с этими работами вводят стабилизирующий множитель в форме

$$g(k, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha \lambda_k}, \quad (10)$$

в результате чего оценки коэффициентов (5) преобразуются к виду

$$\hat{a}_k^\alpha = \frac{\hat{a}_k}{1 + \alpha \lambda_k}, \quad \hat{b}_k^\alpha = \frac{\hat{b}_k}{1 + \alpha \lambda_k}, \quad (11)$$

где α — параметр регуляризации, λ_k — последовательность положительных чисел, причем $\alpha \lambda_k \approx 0$ при малых k , а при больших k значение $\alpha \lambda_k$ достаточно быстро возрастает, так что $\alpha \lambda_k \rightarrow \infty$.

В результате регуляризированную оценку плотности распределения вероятностей фаз получим из выражения

$$\hat{W}_\alpha(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \left(\hat{a}_k g(k, \alpha) \cos(k\theta) \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \left(\hat{a}_k^\alpha \cos(k\theta) \right) \right]. \quad (12)$$

Последовательность λ_k может представлять собой, например (см. [14]), ряд чисел вида

$$\lambda_k = k^{2+z},$$

где $z \geq 0$. При этом выбор параметра α должен быть согласован с погрешностью определения коэффициентов Фурье $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$, а значит зависит от значений их дисперсий, т. е. $\alpha = \alpha(\sigma_a^2, \sigma_b^2)$. Заметим, что так как оценка коэффициентов $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ осуществляется по одной и той же выборке фаз, то вполне допустимо, что $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma^2$, и тогда $\alpha = \alpha(\sigma^2)$. Кроме того на выбор значения α также влияет порядок роста последовательности λ_k .

Рассмотрим подробнее погрешность получаемой оценки $\hat{W}(\theta)$. Представим оценки коэффициентов Фурье в форме

$$\hat{a}_k = a_k + \eta_k,$$

где η_k — ошибка полученной оценки. При этом для больших номеров k значения коэффициентов $a_k \rightarrow 0$. Следовательно, можно утверждать, что найдется K^* такое, что

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=K^*+1}^{\infty} \left(\hat{a}_k \cos(k\theta) \right) \cong \frac{1}{\pi} \sum_{k=K^*+1}^{\infty} \left(\eta_k \cos(k\theta) \right) = \varsigma_1(\theta).$$

В свою очередь

$$W(\theta) \cong \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{K^*} \left(a_k \cos(k\theta) \right) \right],$$

и тогда оценка плотности распределения вероятностей фаз есть

$$\begin{aligned}\hat{W}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{K^*} \left(\hat{a}_k \cos(k\theta) \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{K^*} \left((a_k + \eta_k) \cos(k\theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{K^*} \left(a_k \cos(k\theta) \right) + 2 \sum_{k=1}^{K^*} \left(\eta_k \cos(k\theta) \right) \right] \cong W(\theta) + \varsigma_{K^*}(\theta).\end{aligned}$$

Здесь $\varsigma_1(\theta)$ и $\varsigma_{K^*}(\theta)$ — фактически аддитивные шумовые составляющие.

Так как значение K^* несколько условно и зависит, в первую очередь, от значения дисперсии фазы, а точнее от отношения сигнал/шум (ОСШ) на входе приемника (в рамках данной задачи измерителя фазы принимаемых символов), при этом $K > K^*$, то для повышения точности регуляризированной оценки плотности распределения вероятностей фаз можно использовать двухпараметрическую стабилизирующую функцию вида

$$g(k, \alpha, \beta) = \frac{1}{1 + \alpha \lambda_k(\beta)}, \quad (13)$$

обеспечив различную скорость роста при $k < K^*$ и $k > K^*$ (см. [15]) путем выбора параметра β . По сути это можно интерпретировать как частоту среза фильтра нижних частот.

Тогда получим регуляризованную оценку плотности распределения вероятностей фазы в форме

$$\hat{W}_{\alpha, \beta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \left(\hat{a}_k g(k, \alpha, \beta) \cos(k\theta) \right) \right]. \quad (14)$$

Примеры и свойства двухпараметрических стабилизирующих функций рассмотрены в [16, 17].

2.2. Регуляризация коэффициентов Фурье плотности распределения вероятностей фаз ФМ-сигналов

По аналогии с работой [18] представим выражение для плотности распределения вероятностей фаз ФМ-сигнала порядка M в форме

$$W(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m W_0 \left(\theta - m \frac{2\pi}{M} \right), \quad \theta \in [-\pi; \pi], \quad (15)$$

где $W_0(\theta)$ — плотность распределения фазы в случае отсутствия модуляции.

1°. Рассмотрим случай BPSK-сигналов при значениях вероятностей символов

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Зададим функцию

$$h(\theta) = \frac{1}{2} \delta(\theta) + \frac{1}{2} \delta(\theta - \pi), \quad \theta \in [-\pi; \pi], \quad (17)$$

где $\delta(\theta)$ — дельта-функция вида

$$\delta(\theta) = \begin{cases} \infty, & \theta = 0, \\ 0, & \theta \neq 0. \end{cases}$$

Тогда (15) можно переписать в виде

$$W(\theta) = h(\theta) * W_0(\theta),$$

где знаком $*$ обозначена операция циклической свертки. Преобразование Фурье функции (17) имеет вид

$$\begin{aligned} H(\Theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \exp(-j\theta\Theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)) \exp(-j\theta\Theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (1 + \exp(-j\Theta\pi)). \end{aligned} \quad (18)$$

Квадрат модуля (18) есть

$$|H(\Theta)|^2 = H(\Theta) H(-\Theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\Theta\pi)). \quad (19)$$

Разложение в ряд Фурье функции (17) есть

$$h(\theta) = \pi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(k\theta) + \cos(k\theta) \cos(k\pi)).$$

Из функции (19) следует, что при нечетных k имеем нулевые значения коэффициентов a_k при разложении функции $W(\theta)$. Однако оценки этих коэффициентов $\hat{a}_k$, полученные из (5) на основе выборки ограниченного объема, очевидно, будут отличны от нуля. Поэтому введем стабилизирующую функцию вида

$$g(\alpha) = \frac{1 + \cos(k\pi)}{2(1 + \alpha\lambda_k)}. \quad (20)$$

После чего получим оценку $\hat{W}_\alpha(\theta)$, подставив (20) в (12).

2°. Рассмотрим случай BPSK-сигналов при значениях вероятностей символов

$$p_0 \neq p_1.$$

При этом отметим, что

$$p_0 + p_1 = 1. \quad (21)$$

В этом случае функция (17) имеет вид

$$h(\theta) = p_0 \delta(\theta) + p_1 \delta(\theta - \pi), \quad \theta \in [-\pi; \pi], \quad (22)$$

а выражение (19) преобразуется к форме

$$|H(\Theta)|^2 = (p_0^2 + p_1^2) + 2p_0p_1 \cos(\Theta\pi). \quad (23)$$

В отличие от случая (16) значения коэффициентов a_k при нечетных k будут отличны от нуля, хотя и малы при близких значениях p_0 и p_1 . Таким образом, требуется учет вклада данных вероятностных коэффициентов, являющихся, в общем случае, неизвестными. Для этого введем параметр ϵ , такой что

$$p_{0,\epsilon} = \frac{1}{2} + \epsilon, \quad p_{1,\epsilon} = \frac{1}{2} - \epsilon.$$

В результате на основе функции (23) получим стабилизирующий множитель вида

$$g(k, \alpha, \epsilon) = \frac{\sqrt{p_{0,\epsilon}^2 + p_{1,\epsilon}^2 + 2p_{0,\epsilon}p_{1,\epsilon} \cos(k\pi)}}{1 + \alpha\lambda_k}. \quad (24)$$

Далее, подставив (24) в (12), получим оценку в форме

$$\hat{W}_{\alpha,\epsilon}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \left(\hat{a}_k g(k, \alpha, \epsilon) \cos(k\theta) \right) \right]. \quad (25)$$

Использование параметра β , по аналогии с (20), также допустимо. Тогда

$$g(k, \alpha, \beta, \epsilon) = \frac{\sqrt{p_{0,\epsilon}^2 + p_{1,\epsilon}^2 + 2p_{0,\epsilon}p_{1,\epsilon} \cos(k\pi)}}{1 + \alpha\lambda_k(\beta)}. \quad (26)$$

2.3. Обобщение результатов для ФМ-сигналов порядка ($M > 2$)

1°. Рассмотрим случай ФМ порядка M . Положим значения вероятностей

$$p_m = \frac{1}{M}, \quad m = 0, \dots, (M-1).$$

Тогда функция $h(\theta)$ примет вид

$$h(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta\left(\theta - m \frac{2\pi}{M}\right), \quad \theta \in [-\pi; \pi]. \quad (27)$$

Разложение в ряд Фурье функции (27) есть

$$h(\theta) = \pi + \frac{2}{\pi M} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos(k\theta) \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left(km \frac{2\pi}{M}\right) \right).$$

Таким образом, в случае, например, сигналов с QPSK-модуляцией ($M = 4$) следует, что лишь каждый 4-й коэффициент является ненулевым; в случае PSK-8 ($M = 8$) — каждый 8-й.

2°. Пусть значения вероятностей p_m не равны. Отметим, что аналогично (21) выполняется тождество

$$\sum_{m=0}^{M-1} p_m = 1.$$

Введем параметры ϵ_m , $m = 0, \dots, (M-1)$, и запишем соответствующие вероятности в форме

$$p_{m,\epsilon} = \frac{1}{M} + \epsilon_m, \quad m = 0, \dots, (M-1).$$

Заменив множитель $\frac{1}{M}$ в (27) на $p_{m,\epsilon}$ и выполнив преобразование Фурье, получим

$$H(\Theta, \epsilon) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{m,\epsilon} \exp\left(-j\Theta m \frac{2\pi}{M}\right). \quad (28)$$

Квадрат модуля (28) есть

$$|H(\Theta, \epsilon)|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} p_{m,\epsilon} p_{l,\epsilon} \cos\left(\Theta(m-l) \frac{2\pi}{M}\right).$$

Тогда соответствующий стабилизирующий множитель есть

$$g(k, \alpha, \epsilon) = \frac{|H(\Theta, \epsilon)|^2}{1 + \alpha \lambda_k}.$$

3. Численный эксперимент

Для оценки точности получаемой регуляризированной эмпирической плотности распределения вероятностей фаз проведен следующий численный эксперимент. Имеется выборка фаз вида (3) объема $N = 10^7$, полученная для BPSK-сигнала, принятого из канала с аддитивным белым шумом при значении ОСШ 10 дБ. Значения вероятностей зададим как в (16). На основе данной выборки получим оценку плотности распределения вероятностей фаз из выражения (6), которую обозначим как $\hat{W}_N$, а также регуляризированные оценки в случае различных видов стабилизирующих множителей, которые обозначим $\hat{W}_{\alpha, N}$, $\hat{W}_{\alpha, \beta, N}$, $\hat{W}_{\alpha, \epsilon, N}$, $\hat{W}_{\alpha, \beta, \epsilon, N}$. Соответствующие значения погрешностей данных оценок приведены в таблице.

Таблица. Погрешности регуляризированных оценок плотности распределения вероятностей фаз для выборки объема $N = 10^7$ при $p_0 = p_1 = 0.5$ и ОСШ 10 дБ

Погрешность	Значение
$\frac{\ \hat{W}_N - \hat{W}_{\alpha, N}\ }{\ \hat{W}_N\ }$	1.47^{-3}
$\frac{\ \hat{W}_N - \hat{W}_{\alpha, \beta, N}\ }{\ \hat{W}_N\ }$	1.67^{-3}
$\frac{\ \hat{W}_N - \hat{W}_{\alpha, \epsilon, N}\ }{\ \hat{W}_N\ }$	1.58^{-3}
$\frac{\ \hat{W}_N - \hat{W}_{\alpha, \beta, \epsilon, N}\ }{\ \hat{W}_N\ }$	1.66^{-3}
$\frac{\ \hat{W}_{\alpha, N} - \hat{W}_{\alpha, \beta, N}\ }{\ \hat{W}_{\alpha, N}\ }$	4.38^{-4}
$\frac{\ \hat{W}_{\alpha, N} - \hat{W}_{\alpha, \epsilon, N}\ }{\ \hat{W}_{\alpha, N}\ }$	6.05^{-4}
$\frac{\ \hat{W}_{\alpha, N} - \hat{W}_{\alpha, \beta, \epsilon, N}\ }{\ \hat{W}_{\alpha, N}\ }$	6.97^{-4}

Далее в рамках эксперимента примем в качестве “эталонной” плотности распределения вероятностей фаз оценку вида $\hat{W}_{\alpha, N}$.

Из той же выборки фаз объема $N = 10^7$ возьмем сегмент длительностью $N_\psi \ll N$. С учетом изложенного в настоящей статье метода получим следующие оценки плотности распределения вероятностей фаз на основе выборки объема N_ψ , которые обозначим следующим образом: $\hat{W}_{\alpha, N_\psi}$, $\hat{W}_{\alpha, \beta, N_\psi}$, $\hat{W}_{\alpha, \epsilon, N_\psi}$, $\hat{W}_{\alpha, \beta, \epsilon, N_\psi}$. Соответствующие примеры оценок плотности распределения вероятностей фаз при $N_\psi = 200$, значениях вероятностей символов $p_0 = p_1 = 0.5$ и ОСШ 10 дБ приведены на рисунке 1. Здесь же приведены оценка $\hat{W}_{\alpha, N}$ (при $N = 10^7$) и оценка плотности распределения вероятностей фаз, полученная без применения регуляризации коэффициентов Фурье, которая обозначена как $\hat{W}_{N_\psi}$.

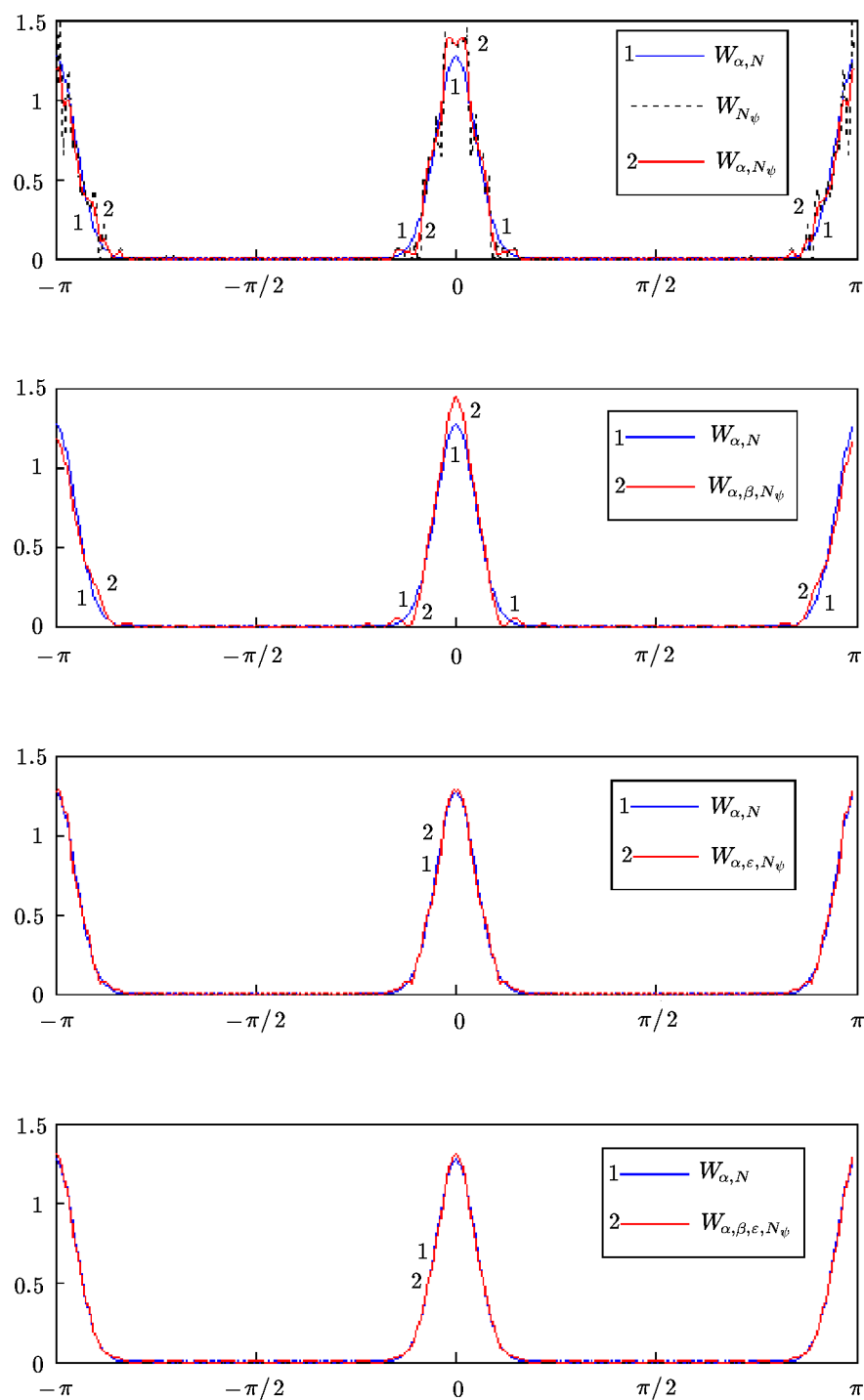


Рис. 1. Пример оценок плотности распределения вероятностей фаз при $N_\psi = 200$, $p_0 = p_1 = 0.5$ и ОСШ 10 дБ

На рис. 2 представлены погрешности получаемой оценки плотности распределения вероятностей фаз в зависимости от объема выборки N_ψ в метрике L_2 , вычисляемые как относительная погрешность из выражений:

$$e_\alpha = \frac{\|\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,N_\psi}\|}{\|\hat{W}_{\alpha,N}\|}, \quad e_{\alpha,\beta} = \frac{\|\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\beta,N_\psi}\|}{\|\hat{W}_{\alpha,N}\|},$$

$$e_{\alpha,\epsilon} = \frac{\|\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\epsilon,N_\psi}\|}{\|\hat{W}_{\alpha,N}\|}, \quad e_{\alpha,\beta,\epsilon} = \frac{\|\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\beta,\epsilon,N_\psi}\|}{\|\hat{W}_{\alpha,N}\|},$$

и в соответствии с критерием Колмогорова (метрика C), определяемого из выражений:

$$d_\alpha = \sup |\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,N_\psi}|, \quad d_{\alpha,\beta} = \sup |\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\beta,N_\psi}|,$$

$$d_{\alpha,\epsilon} = \sup |\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\epsilon,N_\psi}|, \quad d_{\alpha,\beta,\epsilon} = \sup |\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\alpha,\beta,\epsilon,N_\psi}|.$$

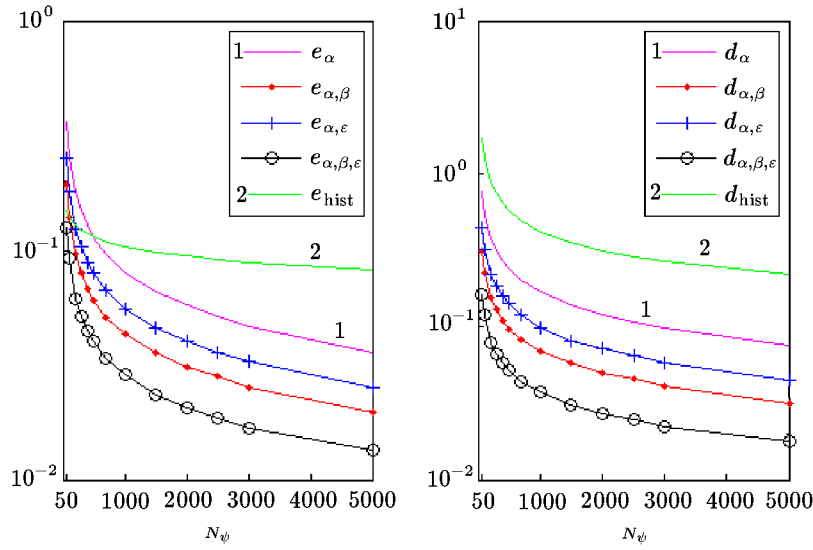


Рис. 2. Зависимости погрешностей оценки плотности распределения вероятностей фаз от объема анализируемой выборки N_ψ при $p_0 = p_1 = 0.5$ и ОСШ 10 дБ в метриках L_2 (слева) и C (справа)

Для сравнения на рис. 2 дополнительно приведены зависимости погрешности оценки плотности распределения вероятностей фаз при использовании гистограммного метода, так же как и рассматриваемый метод относящегося к методам нелокального оценивания плотности распределения вероятностей [4]. Соответствующие погрешности в метриках L_2 и C обозначены как e_{hist} и d_{hist} и вычислены из выражений:

$$e_{\text{hist}} = \frac{\|\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\text{hist},N_\psi}\|}{\|\hat{W}_{\alpha,N}\|}, \quad d_{\text{hist}} = \sup |\hat{W}_{\alpha,N} - \hat{W}_{\text{hist},N_\psi}|, \quad (29)$$

где $\hat{W}_{\text{hist},N_\psi}$ — оценка плотности распределения вероятностей фаз для выборки объема $N_\psi \ll N$, полученная гистограммным методом.

Оценка плотности $\hat{W}_{\text{hist}, N_\psi}$ получена в условиях равного размера ячеек $2\pi/z$ при выборе числа z , обеспечивающего оценку с минимальной ошибкой. Заметим, что при вычислении $\|\hat{W}_{\alpha, N} - \hat{W}_{\text{hist}, N_\psi}\|$ и $|\hat{W}_{\alpha, N} - \hat{W}_{\text{hist}, N_\psi}|$, а также выполнении нормировки к $\hat{W}_{\alpha, N}$ в выражении (29) необходимо учесть, что число отсчетов оценки $\hat{W}_{\text{hist}, N_\psi}$ меньше, чем у регуляризированной оценки $\hat{W}_{\alpha, N}$. Это также можно отметить в качестве недостатка гистограммного метода.

Все представленные здесь и далее оценки погрешностей были усреднены по 10^3 экспериментов.

Аналогичные зависимости в случае значений вероятностей $p_0 = 0.55$, $p_1 = 0.45$ и $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.3$ приведены на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

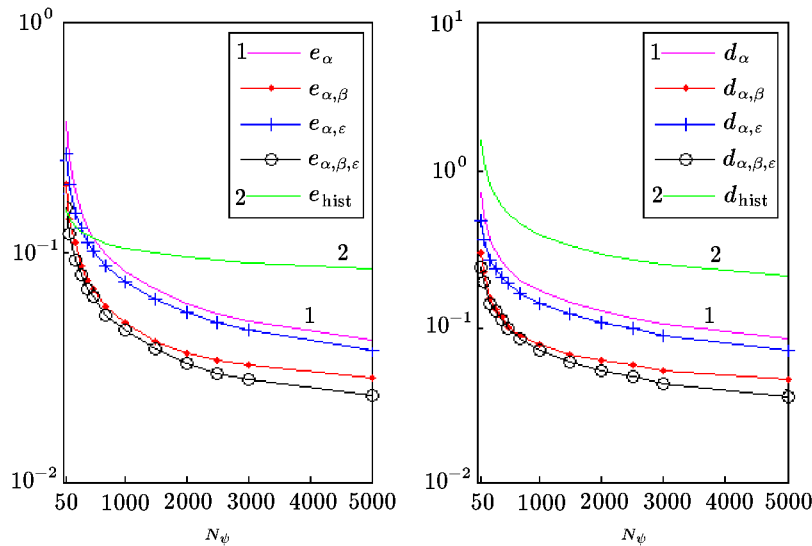


Рис. 3. Зависимости погрешностей оценки плотности распределения вероятностей фаз от объема анализируемой выборки N_ψ при $p_0 = 0.55$, $p_1 = 0.45$ и ОСШ 10 дБ в метриках L_2 (слева) и C (справа)

Из приведенных зависимостей видно, что в случае значительного “перекоса” вероятностей p_0 и p_1 получаемые значения погрешностей $e_{\alpha, \epsilon}(N_\psi)$ и $e_{\alpha, \beta, \epsilon}(N_\psi)$ сходятся к $e_\alpha(N_\psi)$ и $e_{\alpha, \beta}(N_\psi)$ соответственно, так как в этом случае $\epsilon \approx 0.5$, и, как следствие, числители в (24) и (26) становится близким к 1, т. е. приходим к тихоновскому стабилизатору вида (10) или двухпараметрическому стабилизатору вида (13). Также на рис. 4 можно заметить, что $e_{\alpha, \epsilon}(N_\psi)$ для $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.3$ идет несколько ниже зависимости $e_\alpha(N_\psi)$. Это объясняется тем, что при малом объеме выборки фаз значения соответствующих частот

$$\tilde{p}_0 = \frac{n_0}{N_\psi}, \quad \tilde{p}_1 = \frac{n_1}{N_\psi}$$

отличны от заданных значений вероятностей p_0 , p_1 . Здесь n_0 , n_1 количество символов 0 и 1 (соответственно значений передаваемых фаз $\varphi_n = \{0, \pi\}$) в анализируемой выборке объема N_ψ .

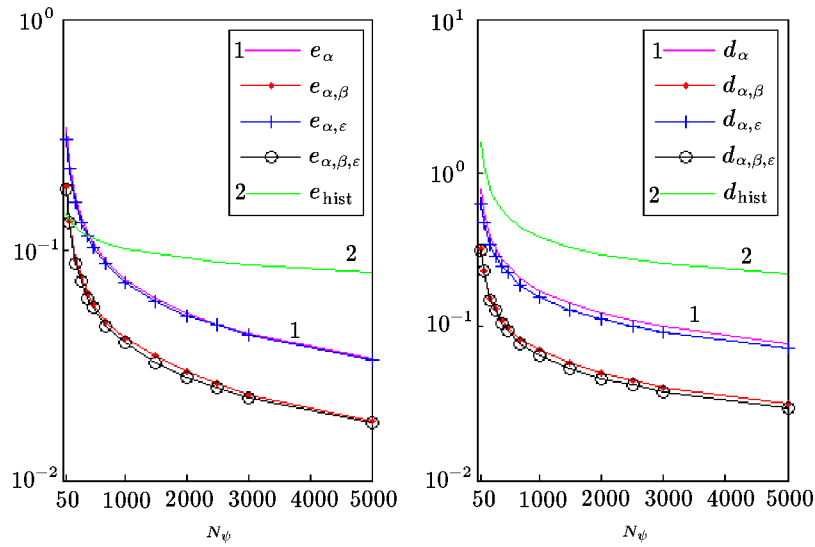


Рис. 4. Зависимости погрешностей оценки плотности распределения вероятностей фаз от объема анализируемой выборки N_ψ при $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.3$ и ОСШ 10 дБ в метриках L_2 (слева) и C (справа)

4. Заключение

В работе рассмотрен метод устойчивого суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами применительно к задаче оценки плотности распределения вероятностей фаз ФМ-сигналов, полученных из канала с аддитивным шумом. В рамках данной задачи показано влияние вероятностей символов исходной выборки фаз, для учета которых введена ϵ -регуляризация. Показано, что введение многопараметрических стабилизирующих множителей обеспечивает наибольшую точность получаемого решения в случае близких значений вероятностей символов, т. е. при $p_0 \approx p_1 \approx 1/2$ (при этом $p_0 + p_1 = 1$), что имеет место в большинстве практических случаев. Вместе с тем при анализе выборок небольшого объема часто возможен случай “перекоса” вероятностей, что учтено выбором параметра ϵ .

Таким образом, для случая анализа зашумленных ФМ-сигналов на основе выборок фаз малого объема рассмотренный метод является достаточно эффективным как по точности, так и в вычислительном плане (по сравнению с гистограммным методом и методом максимума правдоподобия), обеспечивая оперативность получения оценки плотности распределения вероятностей фаз.

Отметим, что при решении данной задачи методом максимума правдоподобия потребуются введение параметра ϵ для учета “перекоса” вероятностей аналогично рассмотренному методу. При этом вычислительная сложность увеличится, а выбор модели должен быть обоснован. При большем объеме анализируемой выборки фаз метод гистограмм потенциально может обеспечить меньшую погрешность оценки, однако это снизит оперативность получения данной оценки, а для каналов с быстроменяющимися параметрами такая оценка может быть неадекватна.

Потенциально применение базисов Эрмита, Лежандра или Чебышева для рассмотренной задачи оценки плотности распределения вероятностей фаз на основе анализа выборки фаз малого объема может дать меньшую погрешность получаемой оценки при некотором увеличении вычислительной сложности.

Вопрос выбора параметров регуляризации не был включен в данную статью, ввиду ограниченности ее объема.

Литература

1. **Mardia K.V., Jupp P.E.** Directional Statistics. — John Wiley & Sons Inc, 2000.
2. **Jammalamadaka S.R., SenGupta A.** Topics in Circular Statistics. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.
3. **Xiong F.** Digital Modulation Techniques. — Boston: Artech House Inc, 2006.
4. **Сирота А.А.** Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
5. **Губарев В.В.** Алгоритмы статистических измерений. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
6. **Жук В.В., Нантон Г.И.** Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1983.
7. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1982.
8. **Толстов Г.П.** Ряды Фурье. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
9. Метод статистических испытаний / Н.П. Бусленко, Д.И. Голенко, И.М. Соболев и др. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962.
10. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
11. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. Перевод: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — Berlin: De Gruyter, 2012.
12. **Тихонов А.Н.** Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 268–271.
13. **Арсенин В.Я.** Об оптимальном суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 183, № 2. — С. 257–260.
14. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов и др. — М.: Наука, 1990.
15. **Жуков А.И.** Метод Фурье в вычислительной математике. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1992.
16. **Маслаков М.Л.** Применение двухпараметрических стабилизирующих функций при решении интегрального уравнения типа свертки методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2018. — Т. 58, № 4. — С. 541–549. Перевод: Maslakov M.L. Application of Two-Parameter Stabilizing Functions in Solving a Convolution-Type Integral Equation by Regularization Method // Comput. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, № 4. — P. 529–536. — DOI: 10.1134/S0965542518040139.
17. **Lu S., Pereverzev S.V.** Regularization Theory for Ill-posed Problems. — Berlin: De Gruyter, 2013.
18. **Маслаков М.Л.** Выбор параметра регуляризации в задачах адаптивной фильтрации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 6. — С. 951–960. Перевод: Maslakov M.L. Choice of Regularization Parameter in Adaptive Filtering Problems // Comput. Math. Math. Phys. — 2019. — Vol. 59, № 6. — P. 894–903. — DOI: 10.1134/S0965542519060101.

Поступила в редакцию 11 ноября 2020 г.

После исправления 30 июля 2021 г.

Принята к печати 27 января 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Mardia K.V., Jupp P.E.** Directional Statistics. — John Wiley & Sons Inc, 2000.
2. **Jammalamadaka S.R., SenGupta A.** Topics in Circular Statistics. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.
3. **Xiong F.** Digital Modulation Techniques. — Boston: Artech House Inc, 2006.
4. **Sirota A.A.** Metody i algoritmy analiza dannykh i ikh modelirovanie v MATLAB. — SPb.: BKHV-Peterburg, 2016.
5. **Gubarev V.V.** Algoritmy statisticheskikh izmerenii. — M.: Energoatomizdat, 1985.
6. **Zhuk V.V., Nanton G.I.** Trigonometricheskie ryady Fur'e i elementy teorii approksimatsii. — L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1983.
7. **Zhuk V.V.** Approksimatsiya periodicheskikh funktsii. — L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1982.
8. **Tolstov G.P.** Ryady Fur'e. — M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1980.
9. Metod statisticheskikh ispytaniy / N.P. Buslenko, D.I. Golenko, I.M. Sobol' i dr. — M.: Gos. izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury, 1962.
10. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.
11. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2009. Perevod: Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — Berlin: De Gruyter, 2012.
12. **Tikhonov A.N.** Ob ustoychivyykh metodakh summirovaniya ryadov Fur'e // Dokl. AN SSSR. — 1964. — T. 156, № 2. — S. 268–271.
13. **Arsenin V.Ya.** Ob optimal'nom summirovanii ryadov Fur'e s priblizhennymi koeffitsientami // Dokl. AN SSSR. — 1968. — T. 183, № 2. — S. 257–260.
14. Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharskii, V.V. Stepanov i dr. — M.: Nauka, 1990.
15. **Zhukov A.I.** Metod Fur'e v vychislitel'noi matematike. — M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1992.
16. **Maslakov M.L.** Primenenie dvukhparametricheskikh stabiliziruyushchikh funktsii pri reshenii integral'nogo uravneniya tipa svertki metodom regularizatsii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2018. — T. 58, № 4. — S. 541–549. Perevod: Maslakov M.L. Application of two-parameter stabilizing functions in solving a convolution-type integral equation by regularization method // Comput. Math. Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, № 4. — P. 529–536. — DOI: 10.1134/S0965542518040139.
17. **Lu S., Pereverzev S.V.** Regularization Theory for Ill-posed Problems. — Berlin: De Gruyter, 2013.
18. **Maslakov M.L.** Vybora parametra regularizatsii v zadachakh adaptivnoi fil'tratsii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2019. — T. 59, № 6. — S. 951–960. Perevod: Maslakov M.L. Choice of regularization parameter in adaptive filtering problems // Comput. Math. Math. Phys. — 2019. — Vol. 59, № 6. — P. 894–903. — DOI: 10.1134/S0965542519060101.

