УДК 532.582.33

ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ СТЕНОК БАССЕЙНА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ БЕЗОТРЫВНОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО ТЕЛА

М. В. Норкин

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Предложен алгоритм построения степенного асимптотического разложения для больших глубин, позволяющий на основе известного решения задачи об ударе твердого тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства, получать приближенное решение задачи об ударе того же тела, плавающего на поверхности жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Рассмотрен случай, когда область, занятая жидкостью, имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. Приводятся асимптотики потенциала скоростей на смоченной поверхности тела и присоединенной массы. Рассматриваются примеры решений.

В работе [1] предложен алгоритм построения степенного асимптотического разложения для больших глубин, позволяющий на основе известного решения задачи об ударе твердого тела, погруженного в жидкое полупространство, получать приближенное решение задачи об ударе того же тела, погруженного в слой жидкости конечной глубины. В настоящей работе этот алгоритм обобщен на случай произвольного ограниченного бассейна. Полученные результаты справедливы также для некоторых неограниченных областей (слой, полубесконечный цилиндр и др.).

В основе предлагаемого асимптотического подхода лежит классический метод последовательных приближений Стокса. В то же время в вычислительной математике известен метод Шварца. В обоих случаях решение исходной задачи для области сложной геометрической конфигурации сводится к последовательному решению задач в областях, имеющих более простую форму границы.

В данной работе излагается алгоритм построения асимптотики для случая центрального удара плавающего тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, плавающее на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн произвольной формы. До удара тело и жидкость покоились. В результате удара тело начинает двигаться в вертикальном направлении без вращения (центральный удар). Форма тела предполагается такой, что при ударе не происходит отрыва жидкости от смоченной поверхности тела (безотрывный удар). Для безотрывности удара достаточно потребовать, чтобы нормальная компонента скоростей точек границы тела была неотрицательной всюду на смоченной поверхности тела. Граница области, занятой жидкостью, считается кусочно-гладкой.

Потенциал скоростей, приобретенных частицами жидкости в результате удара, обозначим $V_0\Phi$, где безразмерный потенциал Φ определяется решением смешанной задачи теории потенциала в области, занятой жидкостью [2, 3]:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_1} = n_z, \qquad \Phi\Big|_{S_2} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_3} = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01023).

Здесь S_1, S_2, S_3 — смоченная поверхность твердого тела, свободная поверхность жидкости и неподвижная твердая стенка бассейна соответственно; V_0 — скорость, приобретенная телом в результате удара; n_z — проекция вектора внешней нормали к поверхности S_1 на ось z. Декартовы координаты x, y, z введены таким образом, что оси x и y лежат в плоскости свободной поверхности, ось z направлена в глубь жидкости, начало координат совпадает с некоторой точкой тела.

Считаем, что при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом h фиксированная поверхность S_3^0 переходит в границу S_3: $S_3 = hS_3^0$ ($x = hx^0$, $y = hy^0$, $z = hz^0$). Плотность жидкости ρ полагаем равной единице.

Приведем ряд обозначений, используемых в дальнейшем: G — бесконечная область, ограниченная смоченной поверхностью тела S_1 и свободной поверхностью жидкости S_2 (случай $h = \infty$); D — область, ограниченная поверхностью S_3 и плоскостью $z = 0$; D^0 — внутренняя область, ограниченная поверхностью S_3^0 и плоскостью $z = 0$; ∂D (∂D^0) — объединение поверхности S_3 (S_3^0) и ее зеркального отражения относительно плоскости $z = 0$.

2. Построение асимптотики для больших значений h. Суть предлагаемого метода состоит в последовательном рассмотрении следующих двух задач: случай $h = \infty$ (краевая задача в области G) и задача в ограниченном бассейне при отсутствии тела (краевая задача в области D). При этом в каждом случае ликвидируются невязки, возникающие на неподвижной границе S_3 и смоченной поверхности тела S_1. После разложения полученных приближений в ряды по степеням h^{-1} и удержания необходимого количества членов приходим к асимптотике для больших значений h.

Рассмотрим задачу более подробно. Потенциал скоростей Φ находим в виде ряда $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$. В качестве первого приближения Φ_1 используем решение задачи об ударе тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства. Для потенциала Φ_1 на больших расстояниях от тела справедливо разложение в гармонический ряд [3, 4]

$$\Phi_1 = -\frac{C_1 z}{2\pi R^3} - \frac{C_2 xz + C_3 yz}{4\pi R^5} - \frac{C_4 z^3 + C_5 x^2 z + C_6 y^2 z + C_7 xyz}{R^7} - \ldots, \tag{2.1}$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_7$ выражаются через интегралы по смоченной поверхности тела, содержащие потенциал скоростей Φ_1, например:

$$C_1 = \iint\limits_{S_1} z \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\, ds - \iint\limits_{S_1} \Phi_1 n_z\, ds, \qquad \frac{C_2}{6} = \iint\limits_{S_1} xz\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\, ds - \iint\limits_{S_1} z n_x \Phi_1\, ds - \iint\limits_{S_1} x n_z \Phi_1\, ds,$$

$$\frac{C_3}{6} = \iint\limits_{S_1} yz\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\, ds - \iint\limits_{S_1} z n_y \Phi_1\, ds - \iint\limits_{S_1} y n_z \Phi_1\, ds.$$

Для ликвидации невязок, создаваемых потенциалом Φ_1 на неподвижной границе S_3, рассмотрим задачу в ограниченном бассейне при отсутствии тела:

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad \Phi_2\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\Big|_{S_3} = \frac{C_1}{2\pi}\, Q_1\big|_{S_3} + Q_2\big|_{S_3},$$
$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n}\, \frac{z}{R^3}, \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n}\, \frac{C_2 xz + C_3 yz}{4\pi R^5}. \tag{2.2}$$

Здесь можно ограничиться первыми двумя членами ряда (2.1). Остальные члены дают вклад в потенциал Φ на смоченной поверхности тела порядка $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$. После нечетного продолжения функции Φ_2 через плоскость $z=0$ решение задачи (2.2) представляется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя

$$\Phi_2(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D}\frac{1}{R_{p_0p}}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\,ds-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D}\Phi_2\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{R_{p_0p}}\,ds,$$
$$P=(x,y,z),\quad P_0=(x_0,y_0,z_0),\quad R_{p_0p}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}. \tag{2.3}$$

В поверхностных интегралах в (2.3) сделаем замену переменных $x\to hx$, $y\to hy$, $z\to hz$, $ds\to h^2ds$. В результате получим следующее представление потенциала Φ_2:

$$\Phi_2(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D^0}\frac{1}{R_h}\Big(\frac{C_1}{2\pi h^2}\,\frac{\partial f}{\partial n}+\frac{1}{h^3}\,\frac{\partial g}{\partial n}\Big)ds-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D^0}\Big(\frac{C_1 f}{2\pi h^2}+\frac{g}{h^3}\Big)\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{R_h}\,ds,$$
$$R_h=\sqrt{(x_0/h-x)^2+(y_0/h-y)^2+(z_0/h-z)^2},$$

где функции f и g определяются решениями следующих краевых задач в области D^0:

$$\Delta f=0,\quad f\big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{S_3^0}=Q_1\big|_{S_3^0},\qquad \Delta g=0,\quad g\big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial n}\Big|_{S_3^0}=Q_2\big|_{S_3^0}. \tag{2.4}$$

Разлагая Φ_2 как функцию параметра $\varepsilon=1/h$ по формуле Тейлора с центром в точке $\varepsilon=0$ $(h=\infty)$, получим асимптотику, справедливую в любой фиксированной (не зависящей от h) окрестности смоченной поверхности тела $(h\to\infty)$:

$$\Phi_2(x_0,y_0,z_0)=-\frac{C_1\xi}{2\pi}\,z_0h^{-3}-(\xi_1z_0x_0+\xi_2z_0y_0+\xi_3z_0)h^{-4}+O(h^{-5}),$$
$$\xi=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_3^0}\Big(f\,\frac{\partial f_1}{\partial n}-f_1\,\frac{\partial f}{\partial n}\Big)ds,\qquad f_1=\frac{z}{R^3},\qquad \xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3=\mathrm{const}. \tag{2.5}$$

Чтобы компенсировать появившиеся нормальные компоненты потенциала Φ_2 на смоченной поверхности тела, вновь рассмотрим случай $h=\infty$. Пренебрегая в формуле (2.5) остаточным членом, для определения Φ_3 получим краевую задачу в области G

$$\Delta\Phi_3=0,\qquad \Phi_3\big|_{S_2}=0,\qquad \Phi_3\big|_{\infty}=0,$$
$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\Big|_{S_1}=\frac{C_1\xi}{2\pi}\,n_zh^{-3}+[z(\xi_1n_x+\xi_2n_y)+(\xi_1x+\xi_2y+\xi_3)n_z]h^{-4}.$$

В соответствии с последним граничным условием функция Φ_3 представляется в виде суммы двух слагаемых, причем первое из них отличается от Φ_1 только постоянным множителем: $\Phi_3=(C_1\xi/(2\pi))h^{-3}\Phi_1+h^{-4}\Phi_*$.

Собирая найденные приближения, получим асимптотику потенциала Φ на смоченной поверхности тела

$$\Phi=\Phi_1+\frac{C_1\xi}{2\pi}\,h^{-3}(\Phi_1-z_0)+O(h^{-4}),\qquad h\to\infty. \tag{2.6}$$

Если при определении потенциала Φ_2 не ограничиваться только первыми двумя членами ряда (2.1), а учесть и другие его члены, то процесс последовательных приближений можно продолжить, рассматривая поочередно задачу в ограниченном бассейне при отсутствии тела и случай $h=\infty$ (на следующем шаге ликвидируются невязки, создаваемые потенциалом Φ_3 на неподвижной границе S_3, затем процедура повторяется). Однако следующие приближения добавляют в асимптотику потенциала Φ (2.6) лишь члены порядка $O(h^{-6})$ при $h\to\infty$. Следовательно, учет первых двух членов гармонического ряда (2.1) позволяет выписать асимптотику потенциала Φ на смоченной поверхности тела до членов порядка $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$. Выражение для третьего члена асимптотики (2.6) не приводится из-за его громоздкости.

Константу ξ можно представить в более простом виде. Применяя формулу Грина к функциям f и f_1 в области, полученной исключением из D^0 полусферы S_ε малого радиуса ε с центром в начале координат, получим выражение

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_\varepsilon} \Big(f \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f}{\partial n} \Big) ds. \tag{2.7}$$

На полусфере S_ε $f_1 = z/\varepsilon^3$, $\partial f_1/\partial n = -2z/\varepsilon^4$. Теперь, переходя в (2.7) к сферическим координатам и устремляя параметр ε к нулю, окончательно получим

$$\xi = -\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}, \qquad M_0 = (0, 0, 0). \tag{2.8}$$

Таким образом, для определения постоянной ξ нужно решить краевую задачу (2.4), а затем вычислить производную (2.8). Постоянная ξ не зависит от геометрии плавающего тела, а зависит только от вида границы S_3.

Следует отметить, что если поверхность S_3^0 (или S_3) обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии xz и yz, то остаточный член в формуле (2.6) имеет порядок $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$. Это объясняется тем, что коэффициенты ξ_1, ξ_2, ξ_3, стоящие при h^{-4}, выражаются через интегралы по S_3^0 от нечетных по x или y функций. В частном случае, когда S_3^0 является поверхностью вращения, удобно ввести в рассмотрение функцию тока ψ, связанную с f соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{2.9}$$

где функция ψ определяется решением следующей краевой задачи в области D^0 ($\psi(0) = 0$):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \psi\big|_{S_3^0} = \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

С помощью формулы (2.6) легко находятся асимптотики полного ударного импульса и его момента относительно начала координат, действующих при ударе на тело ($h \to \infty$):

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\infty + \frac{C_1 \xi}{2\pi h^3} (\boldsymbol{B}_\infty - V_0 \boldsymbol{L}_1) + O(h^{-4}), \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_\infty + \frac{C_1 \xi}{2\pi h^3} (\boldsymbol{M}_\infty - V_0 \boldsymbol{L}_2) + O(h^{-4}),$$

$$\boldsymbol{L}_1 = (0, 0, V), \quad \boldsymbol{L}_2 = (L_{21}, L_{22}, 0), \quad L_{21} = \int\limits_V y \, dV, \quad L_{22} = -\int\limits_V x \, dV,$$

где $\boldsymbol{B}_\infty$, $\boldsymbol{M}_\infty$ — импульс и момент импульса в случае $h = \infty$; V — объем погруженной части тела.

Предположим теперь, что область, занятая жидкостью, имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии xz и yz. В этом случае уравнения изменения импульса и момента импульса твердого тела при центральном ударе приводят к соотношениям

$$(m_{\text{т}} + m) V_0 = P_z, \quad P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad x_0 = \frac{m_{\text{т}} p_0}{m_{\text{т}} + m}, \quad y_0 = \frac{m_{\text{т}} q_0}{m_{\text{т}} + m},$$

где $m_{\text{т}}$ — масса тела; m — присоединенная масса; p_0, q_0 — абсцисса и ордината центра тяжести тела; P_x, P_y, P_z — компоненты внешнего ударного импульса, приложенного к телу в точке с координатами x_0, y_0, z_0.

Следовательно, при наличии указанной симметрии удар по телу должен быть нанесен вертикальной силой, приложенной в точке с абсциссой x_0 и ординатой y_0.

Асимптотики потенциала Φ на смоченной поверхности тела и присоединенной массы m примут вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \frac{(m_\infty + V)\xi}{2\pi h^3}(\Phi_1 - z_0) + O(h^{-5}), \qquad h \to \infty, \\ m &= m_\infty + \frac{(m_\infty + V)^2\xi}{2\pi h^3} + O(h^{-5}), \qquad h \to \infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь m_∞ — присоединенная масса в случае $h = \infty$.

3. Приложения. Приведем значения постоянной ξ для ряда конкретных областей:

— слой жидкости конечной глубины: $\xi = 3\zeta(3)/(8a^3)$ ($\zeta(x)$ — дзета-функция Римана);

— полубесконечный цилиндр:

$$\xi = \frac{2}{\pi a^3} \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2 K_1(\lambda)}{I_1(\lambda)}\, d\lambda$$

($I_1(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода);

— полусфера: $\xi = 2/a^3$;

— полупространство с внешним круговым экраном: $\xi = 2/(3\pi a^3)$.

Здесь a — характерный размер области D^0. В первом примере это глубина фиксированного слоя, во втором — радиус цилиндра, в третьем — радиус полусферы. В последнем случае поверхность S_3^0 представляет собой внешность круга радиуса a на плоскости $z = 0$. В первых двух примерах после подстановки постоянной ξ в формулы (2.10) получаем результаты, совпадающие с результатами [1].

Заключение. В работе получены простые асимптотические формулы, позволяющие в случае умеренных глубин учитывать влияние стенок бассейна различной формы при центральном ударе плавающего тела.

По аналогии может быть решена задача о вертикальном и безотрывном ударе плавающего тела, при котором тело начинает двигаться в вертикальном направлении и вращаться вокруг горизонтальной оси. Если область, занятая жидкостью, имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии xz и yz, то вторые члены асимптотик потенциалов вращательных вокруг осей x и y движений имеют порядок $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$.

Предложенный в работе метод построения асимптотики обобщается на случай, когда на поверхности жидкого полупространства взаимодействуют два произвольных тела.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Норкин М. В.** Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 1. С. 74–81.
2. **Труды** ЦАГИ. М., 1934. Вып. 187: Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости / Л. И. Седов.
3. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2.
4. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.

Поступила в редакцию 26/XI 1999 г.