

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В КРУГЛОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАСТИНКЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

П. И. Баранский, Ю. П. Емец

(Киев)

Теоретически и экспериментально исследовано распределение тока в изотермической изотропно проводящей пластинке круглой формы в отсутствие и при наличии перпендикулярного к ней внешнего магнитного поля. Для этих условий получено общее решение краевой задачи Римана — Гильберта, анализ которого указывает экспериментальные возможности определения таких параметров исследуемого кристалла, как удельная электропроводность (в отсутствие и при наличии внешнего магнитного поля), подвижность носителей тока в нем и др.

В серии опытов, проведенных на однородных монокристаллах *n*-германия (с удельным сопротивлением 1.1 ом см) при комнатной температуре, были экспериментально проверены и количественно подтверждены все основные результаты предпринятых расчетов.

Известно, что исследования гальваномагнитных явлений (продольного и поперечного магнетосопротивления; обычного, планарного и продольного эффектов Холла и др.) представляют собой в настоящее время не столько способ определения характеристических параметров исследуемых кристаллов (концентрации носителей тока, их подвижности и т. п.) [1], сколько служат проверенным и простым средством для получения важной информации о зонной структуре кристаллов [2-5].

Такое расширение круга вопросов, затрагивающих сферу гальваномагнитных исследований, начинает уже не соответствовать установившимся традициям проведения этих исследований на образцах прямоугольной формы (как правило, в виде параллелепипедов). Тем более, что далеко не всегда, по ряду вполне объективных причин, известные требования в части геометрических размеров таких образцов (отношение длины к ширине) [6] могут быть выполнены. Отметим в этой связи, что, например, при изучении гальваномагнитных явлений в импульсных магнитных полях применение образцов круглой формы упрощало бы возможность использования рабочих объемов малого диаметра, что эквивалентно в конечном итоге расширению шкалы используемых магнитных полей.

Замена прямоугольной пластинки круглой шайбой позволяет также упростить измерения параметров полупроводниковых кристаллов, получаемых обычно круглой формы.

Ниже приводятся теоретическое и экспериментальное исследования вопроса об измерении гальваномагнитных эффектов в проводящих кристаллах, имеющих круглую форму.

§ 1. Общее решение задачи о распределении электрического тока в круглой пластинке. Пусть к боковой поверхности пластинки толщиной *h* и радиусом *r* присоединено конечное число электродов, углы раствора и взаимное расположение которых заранее не фиксируются (фиг. 1, а). Внешнее магнитное поле **H** (0, 0, *H*_z) однородно в пластинке и направлено нормально к ней. Разыскиваемые в пластинке токи считаются небольшими, поэтому их собственное магнитное поле мало по сравнению с внешним полем, и им можно пренебречь.

Для изотропной среды в изотермическом случае на основании феноменологической теории имеем следующие соотношения между плотностью электрического тока и электростатическим потенциалом [7]:

$$\begin{aligned} j_r(\rho, \theta) &= -\sigma_{rr}(H) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \sigma_{r\theta}(H) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ j_\theta(\rho, \theta) &= -\sigma_{\theta r}(H) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \sigma_{\theta\theta}(H) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad H \equiv H_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь j_ρ, j_θ — компоненты вектора плотности тока в цилиндрической системе координат; $\Phi(\rho, \theta)$ — потенциал электростатического поля; $\sigma_{\rho\rho}(H), \sigma_{\rho\theta}(H), \dots$ — компоненты тензора проводимости.

Используя уравнение непрерывности тока и условие симметрии коэффициентов в (1.1), можно показать, что при принятых предположениях потенциал $\Phi(\rho, \theta)$ — гармоническая функция и определяется из граничных условий (за положительное направление обхода по окружности диска принимается движение против часовой стрелки)

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(H) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \sigma_{\rho\theta}(H) \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= 0 & \text{на } b_k a_{k+1} \quad (k=1, \dots, p) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= 0 & \text{на } a_k b_k \quad (a_{p+1} = a_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условия (1.2) сформулированы для полевого тока и предполагают несущественность рекомбинации и отсутствие ловушек для носителей тока на поверхности пластинки. Первое условие означает равенство нулю нормальной компоненты тока на участках между электродами, второе — справедливо, если удельная электропроводность электрода во много раз больше $\sigma_{\theta\theta}(H)$ материала пластинки и тогда дуги $a_k b_k$ (фиг. 1, а) будут эквипотенциалами. В большинстве практически важных случаев эти условия хорошо выполняются. В результате решения краевой задачи (1.2) для $\Phi(\rho, \theta)$ можно найти величины суммарных токов I_k , протекающих через электроды и распределение потенциала на границе пластинки по формулам

$$\begin{aligned} I_k &= rh \int_{\theta_k^a}^{\theta_k^b} j_\rho(r, \theta) d\theta = rh \sigma_{\rho\rho}(H) \int_{\theta_k^a}^{\theta_k^b} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} d\theta \\ \Phi_\theta &= \Phi_k^b + \int_{\theta_k^b}^{\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\rho=r} d\theta \\ &\quad (k=1, \dots, p) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение голоморфную в круге функцию

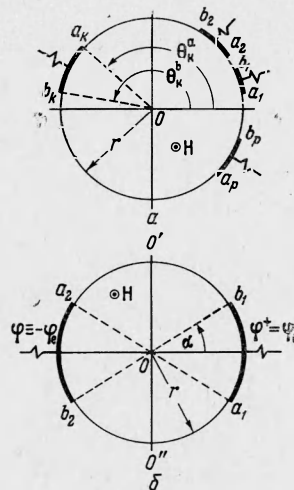
$$W(z) = U(\rho, \theta) + iV(\rho, \theta) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (z = \rho e^{i\theta}) \quad (1.4)$$

Для нахождения $W(z)$ из (1.2) получаем краевую задачу Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(H) U(r, \theta) - \sigma_{\rho\theta}(H) V(r, \theta) &= 0 & \text{при } z = re^{i\theta} \text{ для } \theta_k^b < \theta < \theta_{k+1}^a \\ V(r, \theta) &= 0 & \text{при } z = re^{i\theta} \text{ для } \theta_k^a < \theta < \theta_k^b \\ W(0) &= 0 & (k=1, \dots, p; \theta_{p+1}^a = \theta_1^a) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вместо (1.3) имеем

$$I_k = h \sigma_{\rho\rho}(H) \int_{\theta_k^a}^{\theta_k^b} U(r, \theta) d\theta, \quad \Phi_\theta = \Phi_k^b - \int_{\theta_k^b}^{\theta} V(r, \theta) d\theta \quad (k=1, \dots, p) \quad (1.6)$$



Фиг. 1, а — схема диска с электродами, используемая для решения краевой задачи в общем случае; б — схема диска с одной парой симметрично расположенных электродов, угол раствора которых равен 2α

Из этих формул и условий (1.5) следует, что I_k и φ_θ зависят не от радиуса пластинки r , а от размеров электродов, их взаимного расположения и толщины пластинки h . Учитывая это обстоятельство, примем радиус круга равным 1. Функцию $W(z)$, используя инверсию, аналитически продолжим через дуги $a_k b_k$ ($k = 1, \dots, p$) во внешность единичного круга. Тогда вместо задачи (1.5) придем к более простой для решения обобщенной задаче линейного сопряжения (задача Римана) [8, 9]

$$\Psi^+(t) = - \frac{\sigma_{\rho\rho}(H) - i\sigma_{\rho\theta}(H)}{\sigma_{\rho\rho}(H) + i\sigma_{\rho\theta}(H)} \Psi^-(t) \quad \text{при } t = e^{i\theta} \text{ для } \theta_k^b < \theta < \theta_{k+1}^a \quad (1.7)$$

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t) \quad \text{при } t = e^{i\theta} \text{ для } \theta_k^a < \theta < \theta_k^b$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^+(z) & \text{при } |z| < 1, \\ \Psi^-(z) & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi^+(z) = W(z) = U(\rho, \theta) + iV(\rho, \theta) \\ \Psi^-(z) = \overline{W(1/\bar{z})} = U(1/\rho, -\theta) - iV(1/\rho, -\theta) \end{cases} \quad (1.8)$$

В точках $z = 0$ и $z = \infty$ кусочно-голоморфная функция $\Psi(z)$ характеризуется соответственно разложениями

$$\Psi^+(z) = A_1^0 z + A_2^0 z^2 + \dots, \quad \Psi^-(z) = \frac{B_1^0}{z} + \frac{B_2^0}{z^2} + \dots, \quad (1.9)$$

что следует из третьего условия (1.5) и (1.8).

Решение задачи (1.7)–(1.9) строим в классе функций, которые имеют интегрируемые особенности в точках a_k, b_k ($k = 1, \dots, p$), указывающие на повышенную плотность электрического тока в окрестности концов электродов.

Функция $\Psi(z)$ исчезает на бесконечности, а в точке $z = 0$ принимает нулевое значение

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^p \frac{[z - \exp(i\theta_k^a)]^{-1/2-\varepsilon}}{[z - \exp(i\theta_k^b)]^{1/2-\varepsilon}} \left\{ \prod_{k=1}^p \exp \left[-\frac{i}{2} (\theta_k^a + \theta_k^b) - i\varepsilon (\theta_k^a - \theta_k^b) \right] \right\}^{-1/2} P(z) \quad (1.10)$$

$$P(z) = C_1 z^{p-1} + C_2 z^{p-2} + \dots + C_{p-1} z \quad (1.11)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\sigma_{\rho\theta}(H)}{\sigma_{\rho\rho}(H)} = \frac{1}{\pi} \arctg R_H \sigma(H) H \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2} \right) \quad (1.12)$$

$$R_H = \frac{\sigma_{\rho\theta}(H)}{H [\sigma_{\rho\rho}^2(H) + \sigma_{\rho\theta}^2(H)]}, \quad \sigma(H) = \frac{\sigma_{\rho\rho}^2(H) + \sigma_{\rho\theta}^2(H)}{\sigma_{\rho\theta}(H)}$$

Постоянные $C_k = A_k' + iB_k'$ ($k = 1, \dots, p$) в (1.11) связаны соотношениями

$$A_{p-k-1}' + iB_{p-k-1}' = A_k' - iB_k' \quad (1.13)$$

В формуле (1.10) корень берется с положительным знаком, а под функцией

$$X(z) = \prod_{k=1}^p [z - \exp(i\theta_k^a)]^{-1/2-\varepsilon} [z - \exp(i\theta_k^b)]^{-1/2+\varepsilon}$$

подразумевается такая ветвь, которая при больших $|z|$ имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{z^p} + \frac{\gamma_{p-1}}{z^{p+1}} + \dots \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (1.14)$$

Уравнения (1.4), выражающие обобщенный закон Ома, запишем в комплексной форме

$$j(z) = j_\rho(\rho, \theta) - ij_\theta(\rho, \theta) = -[\sigma_{\rho\rho}(H) - i\sigma_{\rho\theta}(H)] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) \quad (1.15)$$

При получении (1.15) были использованы условия симметрии компонент тензора проводимости в изотропной среде

$$\sigma_{\rho\theta}(H) = -\sigma_{\theta\rho}(H), \quad \sigma_{\rho\rho}(H) = \sigma_{\theta\theta}(H) \quad (1.16)$$

Учитывая формулы (1.4) и (1.8), получаем искомое распределение тока в круглой пластинке

$$j(z) = j_\rho - ij_\theta = -\frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}(H) - i\sigma_{\rho\theta}(H)] \Psi^+(z) \quad (1.17)$$

или

$$\overline{j(\bar{z})} = j_\rho + ij_\theta = -\frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}(H) + i\sigma_{\rho\theta}(H)] \overline{\Psi^+(z)} \quad (1.18)$$

Остается определить постоянные C_k , для чего необходимо привлечь дополнительные граничные условия. Для этого достаточно либо задать потенциалы на электродах, либо значения токов, протекающих через них, либо же задать на одних электродах потенциалы, а на других — токи. Пусть, например, заданы величины токов I_k ($k = 1, \dots, p$). Нормальная компонента тока на электродах дается формулой

$$j_\rho(1, \theta) = -\sigma_{\rho\rho}(H) \Psi^+(\theta) \quad (1.19)$$

Здесь, как легко показать,

$$\Psi^+(\theta) = T [A_1' \cos(1/2p - 1)\theta - B_1' \sin(1/2p - 1)\theta + A_2' \cos \times \\ \times (1/2p - 2)\theta - B_2' \sin(1/2p - 2)\theta + \dots + 1/2 A_{1/2p}']$$

$$T^{-1} = 2 \prod_{k=1}^p \left(\sin \frac{\theta - \theta_k^a}{2} \right)^{1/2+\varepsilon} \left(\sin \frac{\theta - \theta_k^b}{2} \right)^{1/2-\varepsilon} \quad (1.20)$$

Постоянные $A_1', B_1', A_2', B_2', \dots$ определяются из решения системы

$$I_k = h \int_{\theta_k^a}^{\theta_k^b} j_\rho(1, \theta) d\theta = -h\sigma_{\rho\rho}(H) \int_{\theta_k^a}^{\theta_k^b} \Psi^+(\theta) d\theta \quad (k = 1, \dots, p) \quad (1.21)$$

Нахождением неизвестных постоянных общее решение задачи о распределении тока в круглой пластинке заканчивается.

§ 2. Частный случай: пластинка с одной парой электродов. В качестве приложения общей теории рассмотрим гальваномагнитные явления в полупроводниковой пластинке с одной парой симметрично расположенных электродов (фиг. 1, б). Возьмем для определенности невырожденный полупроводник n -типа, обладающий простой зонной структурой и произвольным механизмом рассеяния носителей тока.

Для конкретизации коэффициентов в (1.1) следует обратиться к кинетическому уравнению Больцмана, из которого получаем уравнение для тока [10]

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau}{1 + (\varepsilon\tau H / mc)^2} \right\rangle \mathbf{E} - \frac{ne^3}{m^2c} \left\langle \frac{\tau^2}{1 + (\varepsilon\tau H / mc)^2} \right\rangle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.1)$$

Здесь e , m и n — заряд, масса и концентрация электронов; τ — время релаксации; $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; c — скорость света.

Символ $\langle g \rangle$ обозначает интеграл усреднения

$$\langle g \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty g(x) x^{3/2} e^{-x} dx \quad \left(x = \frac{\varepsilon_0}{K_0 T}\right)$$

численное значение которого зависит от механизмов рассеяния электронов в полупроводнике, где ε_0 , T — энергия и температура электронов, k_0 — постоянная Больцмана. Раскладывая уравнение (2.1) по соответствующим осям цилиндрической системы координат, получаем

$$j_p(\rho, \theta) = -\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \lambda_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad j_\theta(\rho, \theta) = -\lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 = \frac{ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau}{1 + (e\tau H/mc)^2} \right\rangle, \quad \lambda_2 = \frac{ne^2 H}{m^2 c} \left\langle \frac{\tau^2}{1 + (e\tau H/mc)^2} \right\rangle$$

Согласно результатам предыдущего параграфа, для рассматриваемого случая имеем

$$\Psi(z) = \frac{Cz}{\sqrt{\exp(-4i\alpha\varepsilon)}} (z^2 - e^{-i2\alpha})^{-1/2+\varepsilon} (z^2 - e^{i2\alpha})^{-1/2-\varepsilon}$$

$$\Psi^+(z) = W(z) \quad \text{при } |z| < 1$$

$$j(z) = j_p - ij_\theta = -\frac{1}{\rho} (\lambda_1 - i\lambda_2) \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{\rho} (\lambda_1 - i\lambda_2) \Psi^+(z) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{\pi} \arctg R_H \sigma(H) H, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$R_H = \frac{-\lambda_2}{H(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \quad \sigma(H) = -\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1}$$

При помощи формул Сохоцкого — Племяля после ряда преобразований находим разность потенциалов между электродами $2\varphi_e$, суммарный ток I , протекающий через электроды, и сопротивление пластинки Ω . Эти интегральные характеристики пластинки в общем случае зависят от физических параметров λ_1 , λ_2 и геометрических величин α и h

$$2\varphi_e(\lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \frac{\lambda_1 C_1 N(\alpha, \varepsilon)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \quad (2.4)$$

$$I(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, h) = \lambda_1 h C_1 Q(\alpha, \varepsilon) \quad (2.5)$$

$$\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, h) = \frac{2\varphi_e}{I} = \frac{1}{h} \frac{N(\alpha, \varepsilon)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \frac{Q(\alpha, \varepsilon)}{Q(\alpha, \varepsilon)} \quad (2.6)$$

где

$$N(\alpha, \varepsilon) = \int_{\pi-\alpha}^{\alpha} [\sin(\theta + \alpha)]^{-1/2+\varepsilon} [\sin(\theta - \alpha)]^{-1/2-\varepsilon} d\theta \quad (2.7)$$

$$Q(\alpha, \varepsilon) = \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} [\sin(\theta + \alpha - \pi)]^{-1/2+\varepsilon} [\sin(\theta - \alpha)]^{-1/2-\varepsilon} d\theta \quad (2.8)$$

А. 1°. Проанализируем формулу (2.6) в отсутствие магнитного поля

$$\Omega(\sigma, \alpha, h) = \frac{1}{\sigma h} \frac{N(\alpha, 0)}{Q(\alpha, 0)} = \frac{1}{\sigma h} \frac{K(\cos \alpha)}{K(\sin \alpha)} \quad \left(\sigma = \frac{ne^2 \langle \tau \rangle}{m}\right) \quad (2.9)$$

Здесь σ — удельная электропроводность полупроводника, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Установленная связь между сопротивлением пластинки Ω и проводимостью σ принимает особенно простой вид при $\alpha = 1/4\pi$

$$\Omega(\sigma, h) = \Omega(0) = \frac{1}{\sigma h} = \frac{m}{ne^2 \langle \tau \rangle h} \quad (2.10)$$

2°. Однако, если $H \neq 0$, то в случае произвольных значений α возникают трудности при вычислении интегралов в формуле (2.6). Выражение для сопротивления пластинки Ω принимает простой вид при $H \neq 0$, когда $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$

$$\Omega(\lambda_1, \lambda_2, h) = \frac{1}{h \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \frac{B[1/4(1-2\varepsilon), 1/4(1+2\varepsilon)]}{B[1/4(1+2\varepsilon), 1/4(1-2\varepsilon)]} \quad (2.11)$$

Здесь $B(p, q)$ — бета-функция. Учитывая симметрию бета-функции относительно своих параметров ($B(p, q) = B(q, p)$), получаем окончательно

$$\Omega(\lambda_1, \lambda_2, h) = \frac{1}{h \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \frac{\cos \pi \varepsilon}{\lambda_1 h} \quad (2.12)$$



Фиг. 2. Зависимость $h\sigma\Omega(0)$ от угла α . Кругами указаны экспериментальные данные. Расчетные данные, полученные по формуле (2.9), нанесены сплошной линией

Формула (2.12) есть точное решение исходной краевой задачи при $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ и справедлива для любых магнитных полей (не приводящих еще к квантованию). Укажем также две приближенные формулы для слабых ($\mu H / c \ll 1$; в разложении λ_1 и λ_2 по H удерживаются члены порядка H^2) и сильных ($\mu H / c \gg 1$) магнитных полей соответственно

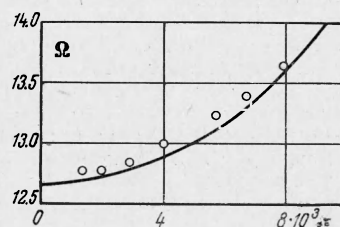
$$\Omega(H, \mu, \dots) = \Omega(H) = \Omega(0) \left[1 - 2 \left(\frac{\mu H}{c} \right)^2 \frac{\langle \tau^3 \rangle}{\langle \tau \rangle^3} + \left(\frac{\mu H}{c} \right)^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^4} \right]^{-1/2} \quad (2.13)$$

$$\left(\mu = \frac{e}{m} \langle \tau \rangle = \frac{\sigma}{ne} \right)$$

$$\Omega(n, e, H, h) = \frac{H}{nech} = R_{H\infty} \frac{H}{h}$$

Хотя сопротивление пластинки возрастает по мере увеличения H , магнетосопротивление полупроводника, как это и должно быть в рамках кинетической теории, в случае $H \rightarrow \infty$ выходит на насыщение.

Фиг. 3. Теоретическая кривая зависимости Ω от H при $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, полученная из первой формулы (2.13) для случая рассеяния носителей тока на колебаниях решетки. Кругами изображены результаты опытной проверки зависимости Ω от H для тех же условий



Б. 1°. Выражение для распределения потенциала на границе пластинки получаем из второго условия (1.6)

$$\varphi_3(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \varphi_e) = \varphi_e + \frac{\lambda_1 C_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \int_{\alpha}^{\theta} [\sin(\theta + \alpha)]^{-1/2+\varepsilon} [\sin(\theta - \alpha)]^{-1/2-\varepsilon} d\theta \quad (2.14)$$

Действительная постоянная C_1 определяется из (2.4) или (2.5)
В отсутствие магнитного поля (2.14) приводится к виду

$$\Phi_0(\alpha, \varphi_e) = \begin{cases} \varphi_e [1 - F(\gamma_1, \cos \alpha) / K(\cos \alpha)] & \text{для } \alpha \leq \theta \leq 1/2\pi \\ \varphi_e F(\gamma_2, \cos \alpha) / K(\cos \alpha) & \text{для } 1/2\pi \leq \theta \leq \pi - \alpha \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\gamma_1 = \arccos \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta}, \quad \gamma_2 = \arctg \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right)^{1/2}$$

Здесь $F(\psi, k)$ — неполный, а $K(k)$ — полный эллиптические интегралы первого рода.

Следует отметить, что при $H = 0$ исходная задача Римана — Гильберта становится смешанной задачей теории голоморфных функций, решение которой известно [8-9, 11]. Поэтому результаты (2.9), (2.10) и (2.15) получаются также непосредственно применением формулы Келдыша — Седова.

2°. Рассмотрим теперь распределение потенциала на границе пластины, когда $H \neq 0$ и $\alpha = 1/4\pi$. Как и при получении формул (2.15), будем считать заданными потенциалы на электродах ($\varphi_{a_1 b_1} = \varphi_e$, $\varphi_{a_2 b_2} = -\varphi_e$; фиг. 1, б), и постоянную C_1 определим из соотношения (2.4). Тогда получим

$$\begin{aligned} \Phi_0(\varepsilon, \varphi_e) &= \varphi_e \left[1 - 2I_t \left(\frac{1-2\varepsilon}{4}, \frac{1+2\varepsilon}{4} \right) \right] = \\ &= \varphi_e \left[1 - \frac{8}{1-2\varepsilon} t^{1/4(1-2\varepsilon)} F \left(\frac{1-2\varepsilon}{4}, \frac{3-2\varepsilon}{4}; \frac{5-2\varepsilon}{4}; t \right) \right] \\ I_t \left(\frac{1-2\varepsilon}{4}, \frac{1+2\varepsilon}{4} \right) &= \frac{B_t [1/4(1-2\varepsilon), 1/4(1+2\varepsilon)]}{B [1/4(1-2\varepsilon), 1/4(1+2\varepsilon)]} \quad \left(\begin{array}{l} t = \sin^2(\theta - 1/4\pi) \\ 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь $B_t(p, q)$, $I_t(p, q)$ — неполные, а $B(p, q)$ — полная бета-функции; $F(p, 1-q; p+1; t)$ — гипергеометрический ряд.

Для слабых и сильных магнитных полей значение параметра ε , определяемое (2.3), дается соответственно формулами

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\mu H}{c} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\mu H}{c} \frac{\langle \tau^{-1} \rangle}{\langle \tau \rangle^{-1}} \quad (2.17)$$

3°. Экспериментальные результаты и сопоставление с теорией. Опыты по проверке некоторых выводов изложенной теории были выполнены на n -германии, имевшем удельное сопротивление 1.1 ом см и обладавшем достаточно высокой степенью однородности. Измерения выполнялись на пластинке диаметром равным 29 мм и толщиной $h = 0.87$ мм с двумя симметрично расположенными электродами. Плоскость диска совпадала с кристаллографической плоскостью (111). Контакты подпаивались к пластинке оловом, содержавшем примесь сурьмы, и в области использованных токов были омичными. Все это надежно обеспечивало выполнение граничных условий, сформулированных при постановке краевой задачи. Эксперименты проводились при комнатной температуре в интервале магнитных полей $1300 < H < 7900$ э методом компенсации при двух направлениях I и H и соблюдении общепринятых мер предосторожностей, исключавших засветку, влияние конвекционных тепловых потоков и другие помехи.

А. 1°. Экспериментально проверялась зависимость общего сопротивления пластины Ω от угла раствора электродов 2α в отсутствие магнитного поля. По данным измерения $\Omega(0) = f(\alpha)$ построена зависимость $\sigma h \Omega(0)$ от угла α , представленная кружками на фиг. 2. При вычислении $\sigma h \Omega(0)$ использовано значение σ , измеренное на прямоугольной пластинке, вырезанной впоследствии из исследуемого нами диска. Расчетные данные этой же зависимости, полученные на основании (2.9), изображены на фиг. 2 сплошной линией. Имеется полное совпадение опытных и теоретических данных почти для всех углов α , что позволяет рекомендовать формулу (2.9) для определения удельной электропроводности σ непосредственно по измерению общего сопро-

тивления пластинки Ω . Удобно для этих целей использовать электроды с углами раствора $\alpha = 10, 45$ и 80° , для которых из (2.9) получаем соответственно

$$\sigma = \frac{2}{h\Omega(\sigma, h, \alpha = 10^\circ)}, \quad \sigma = \frac{1}{h\Omega(\sigma, h, \alpha = 45^\circ)} \quad (3.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{2h\Omega(\sigma, h, \alpha = 80^\circ)}$$

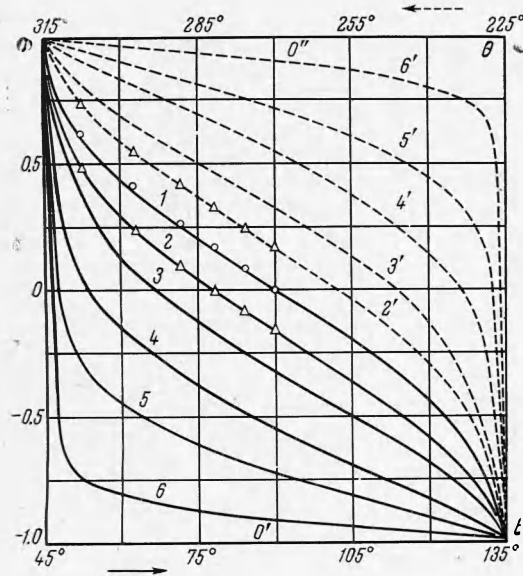


Фиг. 4. Распределение электрических потенциалов по окружности диска при $H=0$, для $\alpha = 10, 30$ и 70° , вычисленные по формулам (2.15), — сплошные линии. Пунктирными линиями изображены результаты соответствующих экспериментов

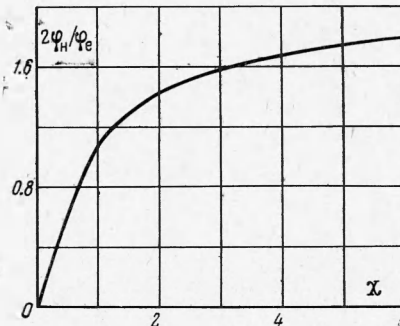
2°. Интерес представляли измерения общего сопротивления Ω от H . Конкретно был проверен случай зависимости Ω от H при $\alpha = 1/4 \pi$. Расчетные данные, полученные для случая решеточного рассеяния из первой формулы (2.13) (при значении $\mu = 3100 \text{ см}^2/\text{в сек}$), изображены на фиг. 3 сплошной кривой, а точками здесь же представлены результаты проведенных опытов. Из фиг. 3 следует, что полученное выражение для Ω (в квадратичном приближении по магнитному полю) хорошо согласуется с опытными данными. Поэтому при работе в области $\mu H / c \ll 1$ первая формула (2.13), в совокупности с холловскими данными, может быть использована для выяснения механизма рассеяния носителей тока, а при известном механизме рассеяния может быть использована для определения значений подвижности.

Интересной для нас представляется и вторая формула (2.13), в смысле практического ее применения. Однако анализом указанного вопроса целесообразно заниматься после экспериментальной проверки этого выражения.

Б. 1°. На фиг. 4 сплошными линиями представлены теоретические распределения потенциала между электродами по окружности диска при $H = 0$, которые были вы-



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Распределение потенциалов по окружности диска при различных значениях параметра χ для $\alpha = 1/4 \pi$: 1 — $\chi = 0$, 2 — $\chi = 0.25$, 3 — $\chi = 0.5$, 4 — $\chi = 1.0$, 5 — $\chi = 2.0$, 6 — $\chi = 6.3$

Фиг. 6. Теоретическая зависимость $2\phi_H/\phi_e = f(\chi)$

числены по (2.15) для трех значений $\alpha = 10, 30$ и 70° . На этой же фигуре экспериментальные данные (для принятых условий) изображены пунктирными линиями.

Распределение потенциала, предсказанное теорией, довольно неплохо согласуется с результатами опытов. Незначительные расхождения наблюдаются только при малых значениях α и связаны они, по-видимому, с влиянием небольших неоднородностей, имеющихся в любом кристалле. Их проявление при больших размерах диска и малых α представляется более вероятным по ряду причин.

2°. Значительно интереснее в теоретическом и более важными в практическом отношении представляются распределения потенциала, получаемые при различных H , которые для $\alpha = 1/4 \pi$ определяются первым выражением (2.16). К сожалению, для значений параметров $p = 1/4 (1 - 2\varepsilon)$ и $q = 1/4 (1 + 2\varepsilon)$, где $0 \leq \varepsilon < 1/2$, неполные бета-функции не затабулированы, а гипергеометрический ряд, через который они выражаются, сходится очень медленно. Поэтому несобственные интегралы, определяющие бета-функции, вычислялись методом выделения особенностей, предложенным Л. В. Канторовичем [12]. Теоретические кривые распределения потенциалов по окружности диска для различных значений параметра $\chi = R_H \sigma(H)H = \mu_H H / c$, а также экспериментальные данные для $\chi = 0.25$ приведены на фиг. 5. Сплошные линии на этой фигуре соответствуют распределению потенциала по дуге $b_1 a_2$ (см. фиг. 1, б), а пунктирные — по дуге $b_2 a_1$. Опытные данные хорошо согласуются с теорией, что обеспечивает возможность экспериментального определения холловской подвижности $\mu_H = \chi c / H$ на образцах, имеющих форму диска.

Для этих целей удобно измерять холловское напряжение между точками $O'O''$ образца (см. фиг. 1, б). По величине этого напряжения при помощи теоретической кривой $2\varphi_H / \varphi_e = f(\chi)$ (фиг. 6) находится χ , из которого (при заданном H) и определяется значение μ_H . В наших опытах было получено $2\varphi_H / \varphi_e = 0.321$, чему соответствует $\chi = 0.25$, $\mu_H = 3180 \text{ см}^2 / \text{в сек.}$ Измерения эффекта Холла на прямоугольной пластинке, вырезанной из этого диска, дали $\mu_H = 3100 \text{ см}^2 / \text{в сек.}$

В заключение отметим, что иной метод расчета полей в полупроводниковых пластинках для некоторых областей и рекомендаций по определению гальваномагнитных параметров обсуждаются в работах [13-15].

Авторы благодарят В. В. Гайдученко за помощь в проведении опытов.

Поступила 27 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Ф. Физика полупроводников. Изд-во АН СССР, 1957.
2. Seitz F. Note on the theory of resistance of a cubic semiconductor in a magnetic field. Phys. Rev., 1950, vol. 79, No. 2.
3. Баранский П. И., Курило П. М. Исследование свойств симметрии изоэнергетических поверхностей в n -германии посредством холловских измерений. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, № 1.
4. Баранский П. И., Даховский И. В., Курило П. М. Анизотропия коэффициента Холла n -Si в области промежуточных магнитных полей. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, № 7.
5. Баранский П. И., Даховский И. В., Курило П. М. Концентрационная зависимость анизотропии коэффициента Холла в n -германии. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, № 10.
6. Isenberg I., Russell B. R., Green R. F. Improved method for measuring Hall coefficients. Rev. Sci. Instr., 1948, vol. 19, No. 10.
7. Beer A. C. Galvanomagnetic effects in semiconductors. Academic Press, New York and London, 1963.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
10. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. Физматгиз, 1962.
11. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 1.
12. Канторович Л. В. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей. Матем. сб., 1934, т. 41, № 2.
13. Wick R. F. Solution of the field problem of the germanium gerator. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 6.
14. Lippmann H. J., Kuhrt F. Der Geometrieinfluss auf den transversalen magnetischen Widerstandseffekt bei rechteckformigen Halbleiterplatten. Z. Naturforsch., 1958, B. 13, S. 462-474.
15. Van der Pauw L. J. A method of measuring specific resistivity and Hall effect of disks of arbitrary shape. Philips Res. Repts, 1958, vol. 13, No. 1.