

УДК 551.509.313

## Стохастический ансамблевый фильтр Калмана с трансформацией ансамбля возмущений

Е.Г. Климова

Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: klimova@ict.nsc.ru

**Климова Е.Г.** Стохастический ансамблевый фильтр Калмана с трансформацией ансамбля возмущений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 27–40.

Алгоритм фильтра Калмана является в настоящее время одним из самых популярных подходов к решению задачи усвоения данных наблюдений. Лидирующим направлением в работах, посвященных применению фильтра Калмана при усвоении данных, является ансамблевый подход. В статье рассматривается вариант стохастического ансамблевого фильтра Калмана. В данном алгоритме ансамбль ошибок анализа получается с помощью трансформации ансамбля ошибок прогноза, шаг анализа осуществляется только для среднего значения. Таким образом, ансамблевый  $\pi$ -алгоритм объединяет в себе преимущества стохастического фильтра и экономичность и локальность фильтров квадратного корня.

Предложен численный метод реализации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, приводится обоснование применимости этого метода. Алгоритм реализован на примере трехмерной тестовой задачи, приводятся результаты численных экспериментов с модельными данными по оценке эффективности предлагаемого численного алгоритма. Проводится сравнительный анализ поведения среднеквадратической ошибки ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и классического ансамблевого фильтра Калмана с помощью численных экспериментов с 1-мерной моделью Лоренца.

**DOI:** 10.15372/SJNM20190103

**Ключевые слова:** усвоение данных, ансамблевый фильтр Калмана.

**Klimova E.G.** The Kalman stochastic ensemble filter with transformation of perturbation ensemble // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 27–40.

The Kalman filter algorithm is currently one of the most popular approaches to solving the data assimilation problem. The major line of the application of the Kalman filter to the data assimilation is the ensemble approach. In this paper, we propose a version of the Kalman stochastic ensemble filter. In the algorithm presented the ensemble perturbations analysis is attained by means of transforming an ensemble of forecast perturbations. The analysis step is made only for a mean value. Thus, the ensemble  $\pi$ -algorithm is based on the advantages of the stochastic filter and the efficiency and locality of the square root filters.

The numeral method of the ensemble  $\pi$ -algorithm realization is proposed, the applicability of this method has been proved. This algorithm is implemented for the problem in the three-dimensional domain. The results of the numeral experiments with the model data for estimating the efficiency of the offered numeral algorithm are presented. The comparative analysis of the root-mean-square error behavior of the ensemble  $\pi$ -algorithm and the Kalman ensemble filter by means of the numeral experiments with a one-dimensional Lorentz model is made.

**Keywords:** data assimilation, Kalman ensemble filter.

## 1. Введение

Алгоритм фильтра Калмана является в настоящее время одним из самых популярных подходов к решению задачи усвоения данных наблюдений [16]. Под усвоением данных (data assimilation) принято понимать совместный учет данных и модели для наиболее точной оценки пространственно-временного распределения исследуемых величин. Лидирующим направлением в работах, посвященных применению фильтра Калмана при усвоении данных, является ансамблевый подход [13]. Ансамблевый фильтр Калмана впервые был предложен в работе [7] и получил дальнейшее развитие в [6, 8, 9, 12]. При реализации ансамблевого алгоритма возникает множество проблем, связанных с ограниченным числом членов ансамбля, а также с необходимостью получения ансамбля с матрицей ковариаций, соответствующей ковариациям ошибок анализа. Для этого, как было показано в [6], необходимо рассматривать алгоритмы ансамблевого фильтра Калмана с генерированием случайных ошибок наблюдений. Варианты ансамблевого фильтра Калмана с генерированием случайных ошибок наблюдений рассматривались в работах [6, 8, 9, 12]. Однако в работе [22] было отмечено, что при таком подходе велико влияние ошибки, связанной с ограниченным количеством элементов ансамбля. Чтобы этого избежать, авторы предложили применять метод квадратного корня, позволяющий реализовать ансамблевый фильтр Калмана без использования возмущенных наблюдений. Такой подход к определению ансамбля ошибок анализа принято называть детерминированным. Ансамблевый фильтр Калмана с генерированием случайных ошибок наблюдений называют стохастическим [13].

Таким образом, в ансамблевом фильтре Калмана можно выделить два подхода: стохастический фильтр и детерминированный фильтр. В настоящее время проводится большое количество исследований по сравнению стохастических и детерминированных ансамблевых фильтров. Этим исследованиям посвящены работы: Lawson, Hansen [18]; Sakov, Oke [21]; Hodyss, Campbell [11]; Lei, Bickel, Shyder [19] и другие. Каждый из этих подходов обладает как преимуществами, так и недостатками.

Одной из проблем ансамблевого фильтра Калмана является слишком малое количество элементов ансамбля по сравнению с размерностью оцениваемого вектора. Известно, что если число собственных векторов оператора динамической системы больше количества элементов ансамбля, то коррекция ошибок прогноза не будет оптимальной [16]. Второй проблемой, связанной с малым числом элементов ансамбля, является появление “ложных ковариаций” на больших расстояниях [12, 14]. Для того чтобы избежать проблем, связанных с ограниченным количеством членов ансамбля, ансамблевый фильтр Калмана может быть применен локально. Вариант локализации, состоящий в ограничении радиуса корреляции, предложен в работе [12]. В статье [14] предлагается алгоритм LETKF (Local Ensemble Transform Kalman Filter) — вариант детерминированного фильтра Калмана, в котором трансформация ансамбля возмущений, а также шаг анализа могут осуществляться для каждого узла сетки независимо. Это делает алгоритм эффективным и позволяет легко проводить его локализацию.

Модифицированный стохастический ансамблевый фильтр Калмана, позволяющий оптимизировать вычисления, предложен в работе [8]. В этой статье рассматривается алгоритм, который позволяет осуществлять операции с матрицами, размерность которых равна числу элементов ансамбля, но при этом требуется обращение плохо обусловленной матрицы. Кроме того, в случае наличия нулевых собственных значений необходимо вычислять псевдообратную матрицу, что понижает точность алгоритма.

В работе [3] был предложен экономичный алгоритм усвоения данных наблюдений для нелинейных моделей, основанный на применении ансамбля прогнозов для оценки кова-

риаций ошибок оценивания (ансамблевый  $\pi$ -алгоритм). Следует отметить, что впервые этот алгоритм был предложен без использования данных с “возмущениями”, т. е. он не являлся полным аналогом классического фильтра Калмана. В статье [17] был предложен более общий вариант ансамблевого  $\pi$ -алгоритма с использованием данных с “возмущениями”. Ансамблевый  $\pi$ -алгоритм использует идею трансформации ковариационных матриц с целью уменьшения размерности массивов при реализации стохастического фильтра Калмана. В ансамблевом  $\pi$ -алгоритме так же, как в алгоритме LETKF, ансамбль ошибок анализа получается с помощью матрицы трансформаций, все операции производятся с матрицами, размерность которых равна размерности ансамбля, трансформации могут производиться для каждого узла сетки независимо. При этом ансамблевый  $\pi$ -алгоритм является стохастическим фильтром и, следовательно, обладает всеми его преимуществами. Следует отметить, что в работе [11] также приводится вид матрицы трансформаций, переводящей ансамбль ошибок прогноза в ансамбль ошибок анализа для стохастического ансамблевого фильтра Калмана. Однако эта матрица гораздо более сложно вычисляется, кроме того, такая трансформация не обладает свойством локальности, присущим матрице трансформации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма.

В данной статье рассматривается обобщение ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, предложенного в работе [17]. В статье предлагается более общий подход, по сравнению с рассмотренным в [17], к численной реализации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, приводится обоснование применимости предлагаемого численного алгоритма. Алгоритм реализован на примере трехмерной тестовой задачи, приводятся результаты численных экспериментов с модельными данными по оценке эффективности предлагаемого численного алгоритма. Кроме того, проводится сравнительный анализ поведения среднеквадратической ошибки ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и классического ансамблевого фильтра Калмана (EnKF) с помощью численных экспериментов с 1-мерной моделью Лоренца.

В пункте 2 статьи приводятся формулы ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, в п. 3 обсуждаются проблемы, связанные с практической реализацией алгоритма, в п. 4 описаны численные эксперименты по оценке эффективности алгоритма. В п. 5 содержатся заключительные выводы.

## 2. Ансамблевый $\pi$ -алгоритм

Вывод формул ансамблевого фильтра Калмана впервые приведен в работе [7]. Запишем нелинейную динамическую систему в виде дискретного по времени уравнения процесса

$$x_k^t = f(x_{k-1}^t) + \eta_{k-1}^t,$$

где  $x_k^t$  —  $L$ -вектор состояния в момент времени  $t_k$ ,  $f$  — оператор модели (нелинейная  $L$ -вектор-функция),  $L$ -вектор “шумов модели”  $\eta_{k-1}^t$  — гауссовская случайная переменная:

$$E \left[ \eta_{k-1}^t (\eta_{k-1}^t)^\top \right] = Q_{k-1}^t.$$

Уравнение наблюдений имеет вид

$$y_k = h(x_k^t) + \varepsilon_k^t,$$

где  $y_k$  —  $M$ -вектор наблюдений в момент времени  $t_k$ ,  $h$  — оператор, переводящий значения в узлах сетки в точки наблюдений (нелинейная  $M$ -вектор-функция),  $M$ -вектор ошибок наблюдений  $\varepsilon_k^t$  — гауссовская случайная переменная:  $E \left[ \varepsilon_k^t (\varepsilon_k^t)^\top \right] = R_k^t$ . Случайные переменные  $\varepsilon_k^t$  и  $\eta_{k-1}^t$  считаются независимыми. Будем считать  $x_k^t$  “истинным” значением.

В классическом фильтре Калмана оптимальной оценкой является теоретико-вероятностное среднее, а ошибкой оценки — отклонение этого значения от “истины”. При этом оптимальной считается оценка, минимизирующая след матрицы ковариаций ошибок оценивания [15]. В ансамблевом фильтре Калмана теоретико-вероятностное осреднение заменяется средним по выборке значением [9]. Соответственно, оптимальной оценкой ансамблевого фильтра Калмана считается среднее по выборке (ансамблю) значение, а ошибкой оценки — отклонение “истины” от этого среднего. Будем считать, что “истина” в начальный момент времени представлена выборкой  $\{x_0 + \delta x_n, n = 1, \dots, N\}$ , где  $x_0$  — известная оценка искомой величины, а выборка  $\{\delta x_n, n = 1, \dots, N\}$  моделирует случайные ошибки этой оценки. Предположим, что среднее по выборке значение этой ошибки равно нулю. Изменение “истины” по времени моделируется с помощью уравнения процесса.

Как показано в [9], ансамблевый фильтр Калмана состоит из ансамбля прогнозов

$$x_{k+1}^{f,n} = f(x_k^{f,n}) + \eta_k^n \quad (1)$$

и ансамбля анализов

$$x_k^{a,n} = x_k^{f,n} + K_k \left( y_k^{o,n} - h(x_k^{f,n}) \right), \quad (2)$$

где  $K_k = P_k^f H_k^\top (H_k P_k^f H_k^\top + R_k)^{-1}$ . На шаге анализа осуществляется линеаризация  $h(x_k^t)$  относительно  $x_k^{f,n}$ :

$$h(x_k^t) \cong h(x_k^{f,n}) + H_k \varepsilon_k^f.$$

В этой формуле  $H_k$  — соответствующий линеаризованный оператор.

В формулах (1) и (2)  $x_k^{f,n}$ ,  $x_k^{a,n}$  — ансамбли полей прогноза и анализа в момент времени  $t_k$ ,  $P_k^f \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \varepsilon_k^{f,n} (\varepsilon_k^{f,n})^\top$ ,  $R_k \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \varepsilon_k^n (\varepsilon_k^n)^\top$ ,  $\left\{ \varepsilon_k^{f,n} = x_k^{f,n} - \overline{x_k^{f,n}}, n = 1, \dots, N \right\}$  — ансамбль ошибок прогноза,  $\overline{x_k^{f,n}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_{k-1}^n)$ ,  $y_k^{o,n} = y_k - \varepsilon_k^n$  — ансамбль наблюдений с возмущениями (perturbed observations),  $\varepsilon_k^n$  — случайные ошибки наблюдений с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций  $R_k$ ,  $y_k$  — вектор наблюдений в момент времени  $t_k$ . Формулы (1) и (2) представляют собой стохастический ансамблевый фильтр Калмана. В детерминированном фильтре шаг анализа осуществляется только для среднего по ансамблю значения, а ансамбль ошибок анализа получается с помощью преобразования ансамбля ошибок прогноза так, чтобы выполнялось следующее соотношение между матрицами ковариаций:  $P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f$ . В этой формуле  $P_k^a$  и  $P_k^f$  — матрицы ковариаций ошибок анализа и прогноза соответственно.

В ансамблевом  $\pi$ -алгоритме в формуле (2) матрица  $K_k$  имеет вид  $\tilde{K}_k = P_k^a H_k^\top R_k^{-1}$  [17]. В классической теории фильтра Калмана эти записи шага анализа эквивалентны [15]. Наилучшей оценкой является среднее по ансамблю значение. Определим ошибку этой оценки на шаге анализа (отклонение от среднего значения)  $dx_k^n \triangleq x_k^{a,n} - \overline{x_k^{a,n}}$ , где  $\overline{x_k^{a,n}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_k^{a,n}$ . Уравнение для этой ошибки имеет вид

$$dx_k^n = (x_k^{f,n} - \overline{x_k^{f,n}}) - P_k^a H_k^\top R_k^{-1} \left( \varepsilon_k^n + h(x_k^{f,n}) - \overline{h(x_k^{f,n})} \right). \quad (3)$$

Выразим матрицу  $P_k^a$  через  $dx_k^n$ :

$$P_k^a \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N dx_k^n (dx_k^n)^\top. \quad (4)$$

Если подставить выражение (4) в уравнение (3), то получим систему уравнений относительно  $dx_k^n$ , которую можно записать в матричном виде (для удобства выкладок индекс “ $k$ ” будем в дальнейшем опускать)

$$D^\top = F^\top - \Pi^\top D^\top, \quad (5)$$

где  $D$  — матрица размерности  $(L \times N)$ , столбцами которой являются векторы  $\{dx_k^n, n = 1, \dots, N\}$ ,  $L$  — размерность этих векторов, соответствующая числу прогнозируемых переменных,  $\Pi$  —  $(N \times N)$ -матрица,  $\Pi^\top = \frac{1}{N-1} D^\top H^\top R^{-1} (HF + E)$ ,  $F$  — матрица размерности  $(L \times N)$  со столбцами  $\{f_k^n, n = 1, \dots, N\}$ , где  $f_k^n = x_k^{f,n} - \overline{x_k^{f,n}}$  (ансамбль ошибок прогноза). Элементы матрицы  $\Pi$  вычисляются для матриц  $H$  и  $R$  по ансамблю значений  $\{dx_k^n, n = 1, \dots, N\}$  и не зависят от узла сетки.

Из формулы (5) следует, что

$$D^\top = (I + \Pi^\top)^{-1} F^\top, \quad (6)$$

где  $I$  — единичная матрица.

В [17] показано, что матрица  $\Pi$  имеет вид:

$$\Pi^\top = (C + 0.25 I)^{1/2} - 0.5 I, \quad (7)$$

$$C = \frac{1}{N-1} F^\top H^\top R^{-1} (HF + E) = C_1 + C_2. \quad (8)$$

В этих формулах  $E$  — матрица размерности  $(M \times N)$ , столбцы которой равны вектору  $\varepsilon_k^n$ , где  $M$  — размерность вектора наблюдений (ансамбль ошибок наблюдений). Более подробные выкладки приведены в [17]. Один из алгоритмов вычисления корня из несимметричной матрицы для получения матрицы  $\Pi$  по формуле (7) рассмотрен в п. 3 данной статьи.

После вычисления матрицы  $D$  определяется ковариационная матрица  $P_k^a$  и анализ для среднего по ансамблю значения:

$$\overline{x_k^{a,n}} = \overline{x_k^{f,n}} + \frac{1}{N-1} D D^\top H^\top R^{-1} [y_k - \overline{h(x_k^{f,n})}]. \quad (9)$$

Ансамбль соответствующих анализов в матричном виде можно записать как

$$X_k^a = \overline{x_k^{a,n}} + D, \quad (10)$$

где  $X_k^a$  —  $(L \times N)$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $\{x_k^{a,n}, n = 1, \dots, N\}$ .

Таким образом, ансамблевый  $\pi$ -алгоритм состоит в вычислении ансамблей прогнозов (1) и анализов (9), (10). При этом для вычисления анализов находится матрица  $D$ : шаги (7), (8) и (6). Как видно из формул ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, он является стохастическим фильтром, в котором ансамбль ошибок анализа получается с помощью матрицы трансформаций  $(I + \Pi^\top)^{-1}$  (6), не зависящей от узла сетки. Это делает возможным реализацию алгоритма локально так же, как это происходит в алгоритме LETKF [14]. При этом так же, как в алгоритме LETKF, для реализации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма требуются операции с матрицами порядка размерности ансамбля.

### 3. Практическая реализация ансамблевого $\pi$ -алгоритма

Как видно из формул ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, оценка значений на шаге анализа может проводиться для каждого узла сетки независимо. Известно, что из-за ограниченного количества элементов ансамбля возникает проблема ложных ковариаций на больших расстояниях. Ковариационные матрицы ошибок прогноза и ошибок наблюдений в ансамблевом фильтре Калмана состоят из ковариаций ошибок, заданных либо в узлах сетки, либо в точках наблюдений. Для подавления ложных ковариаций на больших расстояниях между узлами сетки (точками наблюдений) принято производить так называемую “локализацию” — поэлементное умножение ковариационных матриц на функцию, убывающую с расстоянием. В популярном методе LETKF предлагается умножать матрицу  $R$  на соответствующую функцию [14]. В этом случае для каждого узла сетки при анализе используются свои матрица наблюдений  $H$  и ковариационная матрица ошибок наблюдений  $R$ . В ансамблевом  $\pi$ -алгоритме локализация может проводиться аналогично.

Как уже отмечалось в п. 2, для реализации алгоритма требуется решить уравнение (7), т. е. вычислить квадратный корень из матрицы  $(C + 0.25 I)$ . В работе [17] предлагается приближенная оценка корня из матрицы. Рассмотрим более общий подход. Как видно из формулы (8), эта матрица несимметричная. Для вычисления квадратного корня из этой матрицы может быть применен алгоритм, основанный на треугольном разложении Шура [1, 5]. Для существования вещественного корня из матрицы требуется, чтобы матрица была невырожденной и не имела отрицательных вещественных собственных чисел [10]. В статье [2] показано, что вещественная часть собственных чисел матрицы  $\text{Re}(\lambda(A))$  удовлетворяет неравенству

$$\min \lambda(B) \leq \text{Re}(\lambda(A)) \leq \max \lambda(B),$$

где  $B = 0.5(A + A^\top)$ . Матрицу  $0.5(A + A^\top)$ , где  $A = C + 0.25 I$ , можно представить в виде

$$C_1 + 0.5(C_2 + C_2^\top) + 0.25 I = (0.5 I + C_2)(0.5 I + C_2^\top) \geq 0.$$

Равенство вытекает из свойств матриц  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{1}{N-1}(F^\top H^\top R^{-1} H F), \quad C_2 = \frac{1}{N-1}(F^\top H^\top R^{-1} E),$$

при этом  $C_2 C_2^\top = C_1$  (здесь использовано то, что  $\frac{1}{N-1} E E^\top = R$ ). Таким образом, вещественная часть собственных чисел матрицы  $(C + 0.25 I)$  положительна [1].

Можно также показать, что матрица  $A = C + 0.25 I$  невырожденная. Представим

$$A = [I + C_2(C_1 + 0.25 I)^{-1}](C_1 + 0.25 I).$$

Кроме того, будем считать, что  $C_2 C_1 = C_2 C_2 = 0$ , так как  $E F^\top H^\top = 0$ , поскольку ошибки наблюдений и прогноза считаются некоррелирующими [15]. В этом случае  $C_2(C_1 + 0.25 I)^{-1} = 4C_2$ , что легко проверить, умножив левую и правую часть на  $(C_1 + 0.25 I)$ . Тогда определитель  $|C| = |I + 4C_2| |C_1 + 0.25 I|$  (см. [4]). Первый определитель в этом произведении  $|I + 4C_2| = |I|$ , поскольку  $C_2 C_2 = 0$  (см. [1, 4]). Второй определитель отличен от нуля, так как  $C_1$  — неотрицательная матрица. Таким образом, к матрице  $A = C + 0.25 I$  может быть применен алгоритм вычисления квадратного корня, предложенный в [5]. В приложении показано, что алгоритм получения квадратного корня из матрицы  $A$  будет устойчивым [5].

Для получения  $D^T = (I + \Pi^T)^{-1}F$  требуется, чтобы матрица  $(I + \Pi^T)$  была невырожденной. Как было показано выше, матрица  $A = C + 0.25I$  невырожденная, откуда следует что матрица  $(I + \Pi^T) = (C + 0.25I)^{1/2} + 0.5I$  также невырожденная [1].

При вычислении  $(I + \Pi^T)^{-1}$  проводится симметризация с помощью стандартного приема умножения на транспонированную матрицу:  $(I + \Pi)(I + \Pi^T)D^T = (I + \Pi)F^T$ . Тогда для решения получившегося уравнения используются собственные числа и собственные векторы симметричной матрицы  $(I + \Pi)(I + \Pi^T)$ .

Таким образом, при вычислении обратной матрицы в  $\pi$ -алгоритме не возникает проблема, связанная с наличием нулевых собственных значений, и не требуется проведение сингулярного разложения, как в алгоритме, предложенном в работе [8].

## 4. Численные эксперименты

Для оценки эффективности ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и сравнения его с ансамблевым фильтром Калмана (EnKF) были проведены две серии экспериментов, в которых рассматривались разные аспекты задачи. В первой серии экспериментов рассматривается шаг анализа для трехмерной модельной области, при этом размерности используемых матриц сопоставимы с размерностями матриц, используемых при усвоении реальных данных. В этих экспериментах сравнивается эффективность ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и ансамблевого фильтра Калмана (EnKF). Во второй серии экспериментов сравнивается поведение этих алгоритмов по времени при проведении усвоения на длительный временной период.

### 4.1. Тестовые расчеты в трехмерной модельной области

В первой серии численных экспериментов проводились тестовые расчеты для шага анализа ансамблевого  $\pi$ -алгоритма в условиях, приближенных к реальным (имеются в виду пространственные масштабы задачи). Рассматривалась трехмерная область размером в  $120 \times 80 \times 20$  узлов сетки по горизонтальным направлениям и по вертикали соответственно. В качестве “истины” бралось поле прогноза температуры по модели WRF-NMM с шагом сетки 18 км. Поле первого приближения моделировалось путем добавления к “истинному” полю случайной ошибки, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, соответствующей ошибке первого приближения (прогноза). Данные наблюдений моделировались путем добавления к “истинному” полю случайной ошибки, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, соответствующей ошибке наблюдений. Кроме того, моделировались ансамбли полей первого приближения (прогноза) и возмущений для данных наблюдений.

Данные наблюдений считались известными равномерно в каждом втором сеточном узле области. Следует отметить, что данные наблюдений задаются в узлах сетки для того, чтобы не рассматривать проблемы, связанные с интерполяцией прогностических значений в точки наблюдений (оператор  $H$  равен единичному).

Целями проводимых экспериментов были: оценка машинного времени, требуемого для реализации шага анализа ансамблевого  $\pi$ -алгоритма в условиях реальной задачи, и сравнительный анализ с классическим алгоритмом фильтра Калмана (EnKF). Ансамблевый  $\pi$ -алгоритм является более эффективным, чем алгоритм EnKF, в случае если размерность вектора наблюдений намного больше размерности ансамбля. Задаваемое в

экспериментах количество данных наблюдений сравнимо с объемом данных современной сети наблюдений, используемой при моделировании атмосферных процессов.

Рассматриваемый регион разбивался на подобъемы, состоящие из  $5 \times 5 \times 5$  узлов сетки. Шаг анализа осуществлялся для всех узлов сетки подобъема с использованием одного и того же набора данных из подобъема и его окрестности на расстоянии в 3 шага сетки по горизонтали и 1 шага по вертикали. Для проведения анализа в подобъеме использовалась одна и та же матрица  $(I + \Pi^T)$ . Для подавления ложных ковариаций на больших расстояниях в ансамблевом  $\pi$ -алгоритме проводилась локализация путем поэлементного умножения матрицы  $R^{-1}$  на функцию расстояния от точки наблюдения до центра подобъема:  $\phi(r) = e^{0.5(r_{xy}/L_{xy})(r_z/L_z)}$ . Горизонтальный масштаб  $L_{xy}$  соответствует 3-м шагам сетки по горизонтали, вертикальный  $L_z$  — одному шагу сетки по вертикали. В численных экспериментах матрица  $R^{-1}$  считалась диагональной. Заметим, что в реальных условиях матрица  $R$  является блочно-диагональной. В модельных экспериментах матрицу  $R$  обычно задают диагональной. Среднеквадратические ошибки наблюдений  $r_0$  задавались равномерно изменяющимися от 1 до 2 (данные считались безразмерными) с 1-го по 20-й уровень по вертикали. Среднеквадратические ошибки прогноза  $\sigma_f = 2r_0$ .

Классический алгоритм фильтра Калмана был реализован согласно описанной в монографии [9] стандартной схеме. Для каждого подобъема вычислялся ансамбль анализов. Используемые в алгоритме ковариационные матрицы поэлементно умножались на функцию от расстояния, аналогичную применявшейся в ансамблевом  $\pi$ -алгоритме.

В ансамблевом  $\pi$ -алгоритме вычисление корня из матрицы проводилось с помощью описанного в п. 3 алгоритма. Алгоритм основан на треугольном разложении Шура, прост в реализации, подавляющая часть машинного времени приходится в этом алгоритме на процедуру треугольного разложения Шура из библиотеки NETLIB (LAPACK). Особенностью алгоритма является то, что он реализован в комплексной арифметике. Поскольку алгоритм не является стандартным, была проведена проверка его точности. Для всех подобъемов относительная ошибка вычисления корня из матрицы имела порядок  $10^{-6}$ . Для вычисления собственных чисел и собственных векторов матрицы была использована процедура из пакета EISPACK библиотеки NETLIB (<http://www.netlib.org>).

Тестирование метода численной реализации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма проводилось для количества элементов ансамбля  $N = 20$  и  $N = 40$ . Оценивалось процессорное время, а также среднеквадратическая ошибка  $rms = \|x_a - x_t\| / \|x_t\|$ , где  $x_a$ ,  $x_t$  — значения анализа и “истины” соответственно,  $\|x\|^2 = \sum_i x_i^2$ .

В таблице отражены результаты этих экспериментов. В первой строке приводятся сравнительные данные о процессорном времени, затраченном на шаг анализа, во второй строке — данные о среднеквадратической ошибке (для первого уровня по вертикали). Рассматривались следующие эксперименты: эксперимент 1 — ансамблевый  $\pi$ -алгоритм при  $N = 20$ ; эксперимент 2 — ансамблевый  $\pi$ -алгоритм при  $N = 40$ ; эксперимент 3 — ансамблевый фильтр Калмана при  $N = 20$ ; эксперимент 4 — ансамблевый фильтр Калмана при  $N = 40$ .

**Таблица.** Результаты тестовых экспериментов в трехмерной модельной области

Сравнительные данные	Экспер. 1	Экспер. 2	Экспер. 3	Экспер. 4
Время	1	1.89	2.58	3.13
Среднеквадратическая ошибка	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$1.84 \cdot 10^{-2}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$

В первой строке таблицы в первой ячейке за 1 принимается процессорное время 1-го эксперимента (время, затраченное на шаг анализа во всей области), во всех других ячей-

как первой строки приводится отношение процессорного времени к времени первого эксперимента. Численные эксперименты проводились на компьютере Intel Pentium 3.07 GHz. Для этого компьютера 1 в первой ячейке таблицы соответствует 30". Среднеквадратическая ошибка приводится для одного уровня. Для остальных уровней поведение аналогичное. Как видно из проведенных экспериментов, алгоритм является экономичным, может быть реализован локально.

## 4.2. Численные эксперименты с моделью Lorenz-96

Поскольку ансамблевый  $\pi$ -алгоритм является альтернативной реализацией тех же формул, что и стохастический ансамблевый фильтр Калмана, важно оценить, насколько эти методы близки друг к другу. Вторая серия численных экспериментов проводилась с целью сравнения поведения по времени среднеквадратической ошибки ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и ансамблевого фильтра Калмана. Численные эксперименты проводились с моделью Lorenz-96 [20]:

$$\frac{dx_j}{dt} = (x_{j+1} - x_{j-2})x_{j-1} - x_j + F_0, \quad j = 1, \dots, J,$$

$$x_{-1} = x_{J-1}, \quad x_{J+1} = x_1,$$

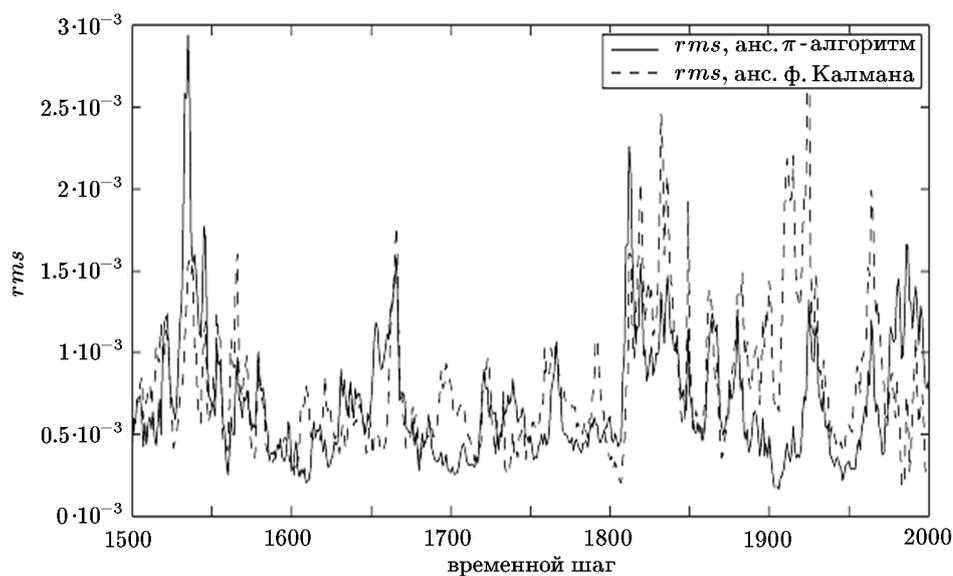
где  $x_1, \dots, x_J$  ( $J = 40$ ) — прогнозируемые переменные. Для решения системы уравнений используется конечно-разностная схема Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Шаг по времени  $\Delta t = 0.05$ , что соответствует 6 часам ( $t = 1$  принимается за 5 суток),  $F_0 = 8$ . Для моделирования “истины”  $x_t$  в численных экспериментах по усвоению данных так же, как в статье [20], рассматривалось начальное значение  $x_0^t \cong N(F_0/4; F_0/2)$  и проводился расчет на  $N_t$  шагов по времени. Через  $N(a, b)$  обозначена случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным  $a$ , и дисперсией, равной  $b$ .

Для организации численных экспериментов задавались:  $x_d(0) = x_t(0) + \Delta$ ,  $\Delta \sim N(0, s_0)$  — “известное нам” начальное значение, не совпадающее с “истинным”; ансамбль начальных полей  $x^n(0) = x_d(0) + \Delta^n$ ,  $\Delta^n \sim N(0, s_0)$ ,  $n = 1, \dots, N_{\text{ens}}$ ; наблюдения  $y_0 = x_t(0) + \Delta_0$ ,  $\Delta_0 \sim N(0, \varepsilon_0)$ ; ансамбль наблюдений с возмущениями  $y_0^n = y_0 + \Delta_0^n$ ,  $\Delta_0^n \sim N(0, \varepsilon_0)$ ,  $n = 1, \dots, N_{\text{ens}}$ . Во всех экспериментах считалось, что  $s_0 = \varepsilon_0$ . Рассматривался вариант, когда шумы модели отсутствуют. Через  $N_{\text{ens}}$  обозначено число элементов ансамбля. Данные наблюдений считались известными на каждом шаге по времени во всей области интегрирования. Прогноз осуществлялся в течение  $N_t = 2000$  шагов по времени, усвоение проводилось на каждом шаге по времени. Ковариационная матрица ошибок наблюдений считалась диагональной:  $R = \varepsilon_0^2 I$ . При анализе в узле сетки  $k$  брались данные наблюдений из интервала  $(k - id, k + id)$ . При этом при анализе в узле сетки  $k$  в ансамблевом  $\pi$ -алгоритме вместо матрицы  $R^{-1}$  бралась матрица  $\tilde{R}^{-1} = R^{-1} \circ e^{0.5(\rho_{ik}/bc)^2}$ , где  $\rho_{ik}$  — расстояние между узлом сетки и наблюдением, “ $\circ$ ” — знак поэлементного умножения. В проводимых экспериментах брались значения:  $id = 5$ ,  $bc = 5\Delta x$  ( $\Delta x$  — шаг сетки). Численные эксперименты проводились для количества элементов ансамбля  $N_{\text{ens}} = 20$  и 40.

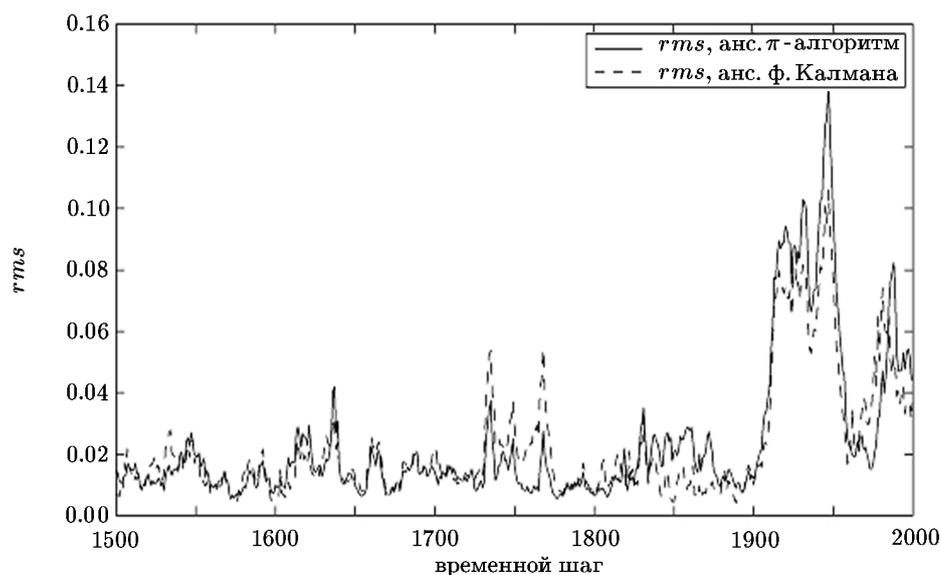
Численные эксперименты по усвоению данных проводились для ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и ансамблевого фильтра Калмана (EnKF). Алгоритмы реализованы для модели Lorenz-96 при одних и тех же значениях параметров и при одинаковых условиях. Принципиальное отличие алгоритмов состоит в вычислении ансамбля анализов. Ансамблевый фильтр Калмана реализован согласно базовому алгоритму [9], единственное вво-

димое дополнительное ограничение состояло в умножении на функцию от расстояния ковариаций ошибок прогноза. Для предотвращения расходимости алгоритма со временем из-за небольшого количества элементов ансамбля использовался “увеличивающий множитель” так называемый “inflation factor”, после каждого шага анализа проводилось умножение  $\tilde{dx} = (infl)^{1/2}dx$ , где  $infl = 1.04$  [16].

Результаты численных экспериментов приведены на рисунках 1 и 2. На этих рисунках приводятся значения среднеквадратической ошибки алгоритмов для временных шагов от 1500 до 2000:  $rms = \|\hat{x} - x_t\|$ , где  $\hat{x}$ ,  $x_t$  — результат усвоения и “истинное” значение соответственно.



**Рис. 1.** Поведение среднеквадратической ошибки по времени при следующих значениях параметров:  $N_{ens} = 20$ ,  $\varepsilon_0 = 0.2$



**Рис. 2.** Поведение среднеквадратической ошибки по времени при следующих значениях параметров:  $N_{ens} = 40$ ,  $\varepsilon_0 = 1.0$

Как видно из рисунков, поведение по времени среднеквадратической ошибки ансамблевого  $\pi$ -алгоритма и ансамблевого фильтра Калмана имеют похожий характер. При этом при увеличении количества элементов ансамбля графики среднеквадратической ошибки становятся более близкими. Это говорит о близости ансамблевого  $\pi$ -алгоритма к стохастическому ансамблевому фильтру Калмана.

Таким образом, результаты численных экспериментов показывают, что ансамблевый  $\pi$ -алгоритм представляет собой эффективную версию стохастического ансамблевого фильтра Калмана.

## 5. Заключительные выводы

В статье рассматривается вариант стохастического ансамблевого фильтра Калмана. В данном алгоритме ансамбль ошибок анализа получается с помощью трансформации ансамбля ошибок прогноза, шаг анализа осуществляется только для среднего значения. Предложен численный метод реализации ансамблевого  $\pi$ -алгоритма, приводится обоснование применимости этого алгоритма. Проведены тестовые расчеты с предложенным численным алгоритмом с целью оценки его эффективности. Исходя из теоретических выкладок и результатов численных экспериментов, можно сделать вывод о том, что ансамблевый  $\pi$ -алгоритм объединяет в себе преимущества стохастического фильтра и экономичность и локальность фильтров квадратного корня. Кроме того, поскольку в ансамблевом  $\pi$ -алгоритме вычисляются анализ для среднего значения и возмущения, добавляемые к этому анализу, то он может использоваться для генерирования ансамбля возмущений в ансамблевом прогнозировании.

## Приложение

Для того, чтобы алгоритм вычисления квадратного корня  $X^2 = A$  был устойчивым, а квадрат полученной в результате матрицы был близок к исходной матрице, требуется, чтобы число  $\delta = \frac{\|X\|^2}{\|A\|}$  было “не очень большим” [5]. Рассмотрим  $A = C_1 + C_2 + 0.25 I$ . Предположим, что

$$\frac{1}{N-1} H F F^T H^T R^{-1} = (H P^f H^T) R^{-1} = \beta I,$$

где  $\beta$  — положительная константа. Матрица  $\frac{1}{N-1} H F F^T H^T = H P^f H^T$ , где  $P^f$  — матрица ковариаций ошибок прогноза,  $H$  — оператор, переводящий значения в узлах сетки в точки наблюдений. В случае если для значения в заданном узле сетки используется одно наблюдение,  $\beta$  представляет собой отношение дисперсии ошибок прогноза к дисперсии ошибок наблюдений. Матрицы  $C_1$  и  $C_2$  состоят из ансамблей ошибок прогноза и ошибок наблюдений, при этом  $C_2 C_1 = C_2 C_2 = 0$ , так как  $E F^T H^T = 0$ , поскольку ошибки наблюдений и прогноза считаются некоррелирующими. При сделанных предположениях  $C_1^2 = \beta C_1$ ,  $C_1 C_2 = \beta C_2$ , следовательно,

$$(C_1 + C_2)(C_1 + C_2) = C_1^2 + C_2 C_1 + C_1 C_2 + C_2 C_2 = \beta(C_1 + C_2).$$

Тогда  $(C_1 + C_2 + 0.25 I)$  можно представить в виде  $[\alpha(C_1 + C_2) + 0.5 I]^2$ , где  $\alpha = \frac{(1 + 4\beta)^{1/2} - 1}{2\beta}$  (положительный корень уравнения  $\alpha^2 \beta + \alpha = 1$ ) и квадратный корень из матрицы  $A$  равен

$$X = \alpha(C_1 + C_2) + 0.5 I.$$

Представим матрицу  $X$  в виде  $X = \alpha A + \gamma I$ , где  $\gamma = 0.5 - 0.25\alpha$ . Будем рассматривать вторую норму матрицы. Тогда  $\|X\| \leq \alpha \|A\| + \gamma$  и  $\|X\|^2 \leq \alpha^2 \|A\|^2 + 2\alpha\gamma \|A\| + \gamma^2$ . Следовательно, оценка  $\delta = \|X\|^2 \|A\|^{-1} \leq \alpha^2 \|A\| + 2\alpha\gamma + \gamma^2 \|A\|^{-1}$ .

Оценим норму матрицы  $A$ . Пусть  $\rho(B)$  обозначает спектральный радиус матрицы  $B$  (максимальное собственное число). Тогда, поскольку  $C_1$  — симметричная матрица,  $\rho(C_1^2) = (\rho(C_1))^2 = \beta\rho(C_1)$  и, следовательно,  $\rho(C_1) = \beta$ . Рассмотрим норму матрицы  $C_2$ :  $\|C_2\|^2 = \rho(C_2 C_2^T)$ . Поскольку  $C_2 C_2^T = C_1$  (см. п. 3), то  $\|C_2\|^2 = \rho(C_2 C_2^T) = \rho(C_1) = \beta$  и  $\|C_2\| = \beta^{1/2}$ . Тогда имеем следующую оценку:

$$\|A\| \leq \|C_1\| + \|C_2\| + 0.25 = \beta + \beta^{1/2} + 0.25.$$

Для оценки  $\|A\|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$  представим  $A = [I + C_2(C_1 + 0.25I)^{-1}](C_1 + 0.25I)$ . Как показано в п. 3,  $C_2(C_1 + 0.25I)^{-1} = 4C_2$ . Также можно показать, что  $(I + 4C_2)^{-1} = (I - 4C_2)$ . Для этого надо умножить правую и левую части равенства на  $(I + 4C_2)$  и воспользоваться свойством  $C_2 C_2 = 0$ . Тогда

$$\|A^{-1}\| \leq \|(C_1 + 0.25I)^{-1}\| \|(I - 4C_2)\| \leq \frac{1 + 4\beta^{1/2}}{\beta + 0.25}.$$

Таким образом, оценка параметра  $\delta$  имеет вид

$$\delta \leq \alpha^2(\beta + \beta^{1/2} + 0.25) + 2\alpha(0.5 - 0.25\alpha) + (0.5 - 0.25\alpha)^2 \frac{1 + 4\beta^{1/2}}{\beta + 0.25}.$$

При значении  $\beta = 1$  имеем  $\delta \leq 1.76$  и, следовательно, матрица  $A$  удовлетворяет условиям получения устойчивого квадратного корня из матрицы [5, 10].

## Литература

1. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969; Перевод: Bellman R. Introduction to matrix analysis. — New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
2. **Зеленков Г.А., Зубов Н.В.** О границах спектра матрицы линейного оператора в унитарном пространстве // Математика. Компьютер. Образование. Сб. тр. XIV Междунар. конф. / Г.Ю. Ризниченко. — Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотичная динамика”, 2007. — Т. 2. — С. 34–41.
3. **Климова Е.Г.** Метод усвоения данных наблюдений, основанный на ансамблевом  $\pi$ -алгоритме // Метеорология и гидрология. — 2008. — № 9. — С. 45–53; Перевод: Klimova E.G. A data assimilation technique based on the pi-algorithm // Russian Meteorology and Hydrology. — 2008. — Vol. 33. — P. 143–150.
4. **Ланкастер П.** Теория матриц. — М.: Наука, 1973; Перевод: Lancaster P. Theory of Matrices. — NY: Academic Press, 1969.
5. **Bjorck A., Hammarling S.** A Schur method for the square root of a matrix // Linear algebra and its applications. — 1983. — Vol. 52/53. — P. 127–140.
6. **Burgers G., Van Leeuwen P.J., and Evensen G.** Analysis scheme in the ensemble Kalman filter // Monthly Weather Review. — 1998. — Vol. 126. — P. 1719–1724.
7. **Evensen G.** Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // J. Geophysical Research. — 1994. — Vol. 99. — P. 10143–10162.

8. **Evensen G.** The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation // Ocean Dynamics.— 2003.— Vol. 53.— P. 343–367.
9. **Evensen G.** Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter.— Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
10. **Higham N.J.** Computing real square roots of real matrix // Linear algebra and its applications.— 1987.— Vol. 88/89.— P. 404–430.
11. **Hodyss D., Campbell W.F.** Square root and perturbed observation ensemble generation techniques in Kalman and quadratic ensemble filtering algorithms // Monthly Weather Review.— 2013.— Vol. 141.— P. 2561–2573.
12. **Houtekamer P.L., Mitchell H.L.** Ensemble Kalman filtering // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society.— 2005.— Vol. 131.— P. 1–23.
13. **Houtekamer H.L., Zhang F.** Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // Monthly Weather Review.— 2016.— Vol. 144.— P. 4489–4532.
14. **Hunt B.R., Kostelich E.J., and Szunyogh I.** Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: a local ensemble transform Kalman filter // Physica D.— 2007.— Vol. 230.— P. 112–126.
15. **Jazwinski A.H.** Stochastic Processes and Filtering Theory.— New York: Academic Press, 1970.
16. **Kalnay E.** Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability.— Cambridge Univ. Press, 2002.
17. **Klimova E.** A suboptimal data assimilation algorithm based on the ensemble Kalman filter // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society.— 2012.— Vol. 138.— P. 2079–2085.
18. **Lawson G.A., Hanson J.A.** Implications of stochastic and deterministic filters as ensemble-based data assimilation methods in varying regimes of error growth // Monthly Weather Review.— 2004.— Vol. 132.— P. 1966–1981.
19. **Lei J., Bickel P., and Shyder C.** Comparison of ensemble Kalman filters under non-gaussianity // Monthly Weather Review.— 2010.— Vol. 138.— P. 1293–1306.
20. **Lorenz E.N., Emanuel K.A.** Optimal sites for supplementary weather observations: simulation with a small model // J. of the Atmospheric Sciences.— 1998.— Vol. 55.— P. 399–414.
21. **Sakov P., Oke P.R.** Implication of the form of the ensemble transformation in the ensemble square root filters // Monthly Weather Review.— 2008.— Vol. 136.— P. 1042–1053.
22. **Whitaker J.S., Hamill T.M.** Ensemble data assimilation without perturbed observations // Monthly Weather Review.— 2002.— Vol. 130.— P. 1913–1924.

*Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.*

*После доработки 22 мая 2018 г.*

*Принята к публикации 5 октября 2018 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Bellman R.** Vvedenie v teoriyu matric.— M.: Nauka, 1969; Perevod: Bellman R. Introduction to matrix analysis.— New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
2. **Zelenkov G.A., Zubov N.V.** O granicakh spektra matricy lineynogo operatora v unitarnom prostranstve // Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie. Sb. tr. XIV Mezhdunar. konf. / G.Yu. Riznichenko.— Izhevsk: Nauchno-izdatel'skiy centr "Regulyarnaya i khaotichnaya dinamika", 2007.— T. 2.— С. 34–41.
3. **Klimova E.G.** Metod usvoeniya dannykh nablyudeniy, osnovanny na ansamblevom  $\pi$ -algoritme // Meteorologiya i gidrologiya.— 2008.— № 9.— S. 45–53; Perevod: Klimova E.G. A data assimilation technique based on the pi-algorithm // Russian Meteorology and Hydrology.— 2008.— Vol. 33.— P. 143–150.

4. **Lankaster P.** Teoriya matric. — M.: Nauka, 1973; Perevod: Lancaster P. Theory of Matrices. — NY: Academic Press, 1969.
5. **Bjorck A., Hammarling S.** A Schur method for the square root of a matrix // Linear algebra and its applications. — 1983. — Vol. 52/53. — P. 127–140.
6. **Burgers G., Van Leeuwen P.J., and Evensen G.** Analysis scheme in the ensemble Kalman filter // Monthly Weather Review. — 1998. — Vol. 126. — P. 1719–1724.
7. **Evensen G.** Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // J. Geophysical Research. — 1994. — Vol. 99. — P. 10143–10162.
8. **Evensen G.** The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation // Ocean Dynamics. — 2003. — Vol. 53. — P. 343–367.
9. **Evensen G.** Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter. — Berlin, Heideberg: Spriger-Verlag, 2009.
10. **Higham N.J.** Computing real square roots of real matrix // Linear algebra and its applications. — 1987. — Vol. 88/89. — P. 404–430.
11. **Hodyss D., Campbell W.F.** Square root and perturbed observation ensemble generation techniques in Kalman and quadratic ensemble filtering algorithms // Monthly Weather Review. — 2013. — Vol. 141. — P. 2561–2573.
12. **Houtekamer P.L., Mitchell H.L.** Ensemble Kalman filtering // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. — 2005. — Vol. 131. — P. 1–23.
13. **Houtekamer H.L. Zhang F.** Review of the ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // Monthly Weather Review. — 2016. — Vol. 144. — P. 4489–4532.
14. **Hunt B.R., Kostelich E.J., and Szunyogh I.** Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: a local ensemble transform Kalman filter // Physica D. — 2007. — Vol. 230. — P. 112–126.
15. **Jazwinski A.H.** Stochastic Processes and Filtering Theory. — New York: Academic Press, 1970.
16. **Kalnay E.** Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. — Cambridge Univ. Press, 2002.
17. **Klimova E.** A suboptimal data assimilation algorithm based on the ensemble Kalman filter // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. — 2012. — Vol. 138. — P. 2079–2085.
18. **Lawson G.A., Hanson J.A.** Implications of stochastic and deterministic filters as ensemble-based data assimilation methods in varying regimes of error growth // Monthly Weather Review. — 2004. — Vol. 132. — P. 1966–1981.
19. **Lei J., Bickel P., and Shyder C.** Comparison of ensemble Kalman filters under non-gaussianity // Monthly Weather Review. — 2010. — Vol. 138. — P. 1293–1306.
20. **Lorenz E.N., Emanuel K.A.** Optimal sites for supplementary weather observations: simulation with a small model // J. of the Atmospheric Sciences. — 1998. — Vol. 55. — P. 399–414.
21. **Sakov P., Oke P.R.** Implication of the form of the ensemble transformation in the ensemble square root filters // Monthly Weather Review. — 2008. — Vol. 136. — P. 1042–1053.
22. **Whitaker J.S., Hamill T.M.** Ensemble data assimilation without perturbed observations // Monthly Weather Review. — 2002. — Vol. 130. — P. 1913–1924.