УДК 632.5

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И КОНВЕКТИВНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ВИЛЬЯМСОНА ВБЛИЗИ СЖИМАЮЩЕЙСЯ ПО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ ПЛЕНКИ

А. Заиб, К. Бхаттачарийа*, М. Халид, С. Шафи**

Федеральный университет искусств, наук и технологий Урду, Карачи, Пакистан
* Инженерный институт Бенаресского индуистского университета, 221005 Варанаси, Индия
** Технологический университет, Джохор, Малайзия
E-mails: zaib20042002@yahoo.com, krish.math@yahoo.com, integralkhalid@yahoo.com, sharidan@utm.my

Численно решена задача об установившейся смешанной конвекции и теплопереносе с учетом теплового излучения в нелинейной (неньютоновской) жидкости Вильямсона вблизи пористой сжимающейся по экспоненциальному закону пленки. Рассматриваются случаи конвекции, ускоряющей течение и замедляющей его. Уравнения задачи сводятся к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием пакета Matlab получено численное решение задачи при различных значениях параметров. Показано, что в случае конвекции, замедляющей поток, существует два неавтомодельных решения, в случае конвекции, ускоряющей поток, — единственное решение. Два неавтомодельных решения существует только в том случае, если через пористую пленку всасывается жидкость определенной массы, которая зависит от параметра Вильямсона, параметра конвекции и параметра излучения.

Ключевые слова: излучение, смешанная конвекция, жидкость Вильямсона, экспоненциальный закон сжатия пленки, конвективные граничные условия.

DOI: 10.15372/PMTF20170306

Введение. Большинство жидкостей являются псевдопластическими, т. е. жидкостями, вязкость которых уменьшается при увеличении скорости напряжений сдвига. Поэтому результаты исследований течений таких жидкостей представляют большой интерес. Поскольку с использованием линейной зависимости между напряжением сдвига и деформацией сдвига невозможно описать все реологические свойства псевдопластических жидкостей, были разработаны различные нелинейные модели (модель Карро, степенная модель жидкости, модель Сиско, модель Джефри, модель Вильямсона). В данной работе используется модель Вильямсона псевдопластической жидкости, так как эта модель может быть построена на основе кинетической теории жидкости, а не на основе эмпирических соотношений, как, например, степенная модель. Кроме того, при использовании этой модели

© Заиб А., Бхаттачарийа К., Халид М., Шафи С., 2017

можно выполнить переход к модели ньютоновской жидкости в случае как малых скоростей напряжений сдвига, так и больших. Модель Вильямсона имеет преимущества по сравнению с другими нелинейными моделями жидкости, поскольку в ней вязкость имеет как минимальное, так и максимальное значение (кажущаяся вязкость на бесконечности не стремится к нулю). Модель Вильямсона предложена в работе [1] для описания течения вязкой псевдопластической жидкости. Там же приведены результаты экспериментов по ее проверке. С использованием модели Вильямсона в работе [2] получено в виде ряда решение задачи о течении жидкости вдоль растягиваемой пленки. В [3] исследовано установившееся течение вязкой жидкости Вильямсона, в [4] — течение в пограничном слое и теплоперенос в жидкости Вильямсона в окрестности пленки, скорость растяжения которой изменяется по экспоненциальному закону. В работе [5] получено численное решение задачи о течении магнитогидродинамической (МГД) жидкости вдоль растягиваемой цилиндрической поверхности и исследовано течение в окрестности точки торможения. Течение МГД-жидкости Вильямсона с учетом теплопереноса в окрестности растягиваемой пленки, помещенной в химически активную наножидкость, изучено в [6]. В настоящее время интенсивно исследуются течение в пограничном слое и теплоперенос в окрестности растягивающейся (сжимающейся) пленки, поскольку такое течение встречается во многих технологических процессах (выдувание стекла, изготовление оптических волокон и полимеров, непрерывная отливка металлов, горячая прокатка пластмасс, бурение скважин и др.). В работе [7] предложена модель вязкого пограничного слоя вблизи сжимающейся (растягивающейся) пленки. В [8] получены условия существования и единственности автомодельного решения задачи об обтекании вязкой жидкостью сжимающейся пленки.

В [9] получены неединственные решения задачи о течении степенной вязкой жидкости в направлении сжатия пленки. В [10] с учетом переносов тепла и массы и с учетом химических реакций изучено течение в пограничном слое в направлении сжатия пленки в окрестности точки торможения потока. Течение в пограничном слое в направлении растяжения (сжатия) пленки по экспоненциальному закону изучено недостаточно, несмотря на то что такое течение встречается во многих технологических процессах. Впервые течение вязкой жидкости с учетом теплопереноса в направлении растяжения пленки по экспоненциальному закону изучалось в работе [11]. В [12] с учетом теплопереноса выполнено численное моделирование течения вязкой жидкости в направлении растяжения по экспоненциальному закону пористой пленки. В [13] с учетом теплопереноса и теплового излучения изучено течение в пограничном слое вязкой жидкости в направлении растяжения пленки по экспоненциальному закону. В [14] с учетом теплопереноса получено три решения задачи о смешанной конвекции в потоке МГД-жидкости, движущемся в направлении сжатия по экспоненциальному закону вертикальной пористой пленки.

Смешанная конвекция в потоке вязкой жидкости Вильямсона вблизи пористой сжимающейся по экспоненциальному закону пленки исследована недостаточно. Смешанная конвекция в окрестности точки торможения потока на растягивающейся пористой поверхности изучена в [15].

В данной работе решается задача о смешанной конвекции с учетом теплового излучения и при наличии теплопереноса в потоке жидкости Вильямсона, движущемся в направлении сжатия по экспоненциальному закону проницаемой пленки. С использованием пакета Matlab получены два неавтомодельных решения.

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается двумерное установившееся течение жидкости Вильямсона вблизи пористой сжимающейся пленки с учетом теплового излучения и конвективных граничных условий (рис. 1). Скорость сжатия пленки и температура ее поверхности изменяются по экспоненциальному закону. Скорость сжатия пленки изменяется по закону $u_w(x) = a\,\mathrm{e}^{x/L}$, где $a > 0$ — константа, скорость всасывания

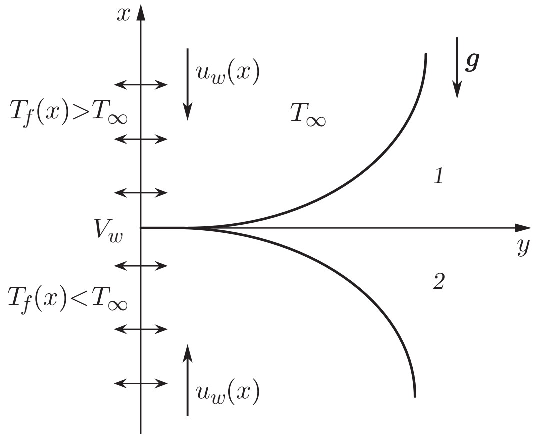

Рис. 1. Физическая модель задачи и система координат:
1 — область с конвекцией, ускоряющей течение, *2* — область с конвекцией, замедляющей течение

жидкости на поверхности пленки — по закону $V_w(x) = v_0\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$, где $v_0 > 0$ — константа, температура поверхности пленки — по закону $T_f = T_\infty + b\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$, где T_∞ — температура окружающей среды ($T_f > T_\infty$ в случае конвекции, ускоряющей течение, $T_f < T_\infty$ в случае конвекции, замедляющей течение).

Тензор напряжений для жидкости Вильямсона задается в виде [4]

$$S = -pI + \tau,$$

где $\tau = (\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)/(1 - \Gamma\dot\alpha))A_1$ — тензор экстра-напряжений; μ_0, μ_∞ — минимальное и максимальное значения молекулярной вязкости, соответствующие нулевым и бесконечно большим напряжениям сдвига; $\Gamma > 0$ — константа, имеющая размерность времени; A_1 — первый тензор Ривлина — Эриксона; $\dot\alpha = \sqrt{\pi/2}$; $\pi = \mathrm{tr}\,(A_1^2)$.

Ниже рассматривается случай $\mu_\infty = 0$, $\Gamma\dot\alpha < 1$. В этом случае

$$\tau = \frac{\mu_0}{1 - \Gamma\dot\alpha}\,A_1.$$

Используя разложение по степеням $\Gamma\dot\alpha$ и сохраняя в разложении только линейные члены, получаем

$$\tau = \mu_0(1 + \Gamma\dot\alpha)A_1.$$

С учетом указанных выше предположений система дифференциальных уравнений задачи в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{2}\,\nu\Gamma\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T(T - T_\infty); \tag{2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varkappa}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p}\,\frac{\partial q_r}{\partial y}. \tag{3}$$

Для системы (1)–(3) ставятся краевые условия

$$\begin{gathered} y = 0\colon \qquad u = -u_w(x), \quad v = -V_w, \quad -\varkappa\,\frac{\partial T}{\partial y} = h_f(T_f - T), \\ y \to \infty\colon \qquad u \to 0, \quad T \to T_\infty. \end{gathered} \tag{4}$$

В (1)–(4) u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x и y соответственно; ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность; T — температура; β_T — коэффициент температурного расширения; g — ускорение свободного падения; $\varkappa$ — коэффициент термодиффузии; c_p — удельная теплоемкость; T_f — температура на поверхности пленки; T_∞ — постоянная температура потока на бесконечности. Коэффициент теплопереноса изменяется по закону $h_f = h\,\mathrm{e}^{x/(2L)}$.

Для описания теплового излучения используется аппроксимация Росселанда [16]

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*}\,\frac{\partial T^4}{\partial y},$$

где σ^* — константа Стефана — Больцмана; k^* — коэффициент поглощения. Предполагается, что коэффициент поглощения изменяется в диапазоне $k^* = 0{,}02 \div 0{,}35$. Для значений коэффициента излучения в этом диапазоне справедлива аппроксимация Росселанда. Температура потока такова, что величину T^4 можно разложить в ряд Тейлора в окрестности значения T_∞. Разлагая T^4 в ряд Тейлора и отбрасывая величины более высокого порядка малости, получаем $T^4 \simeq 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varkappa}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad (5)$$

Введем следующие переменные:

$$\begin{gathered} u = a\,\mathrm{e}^{x/L}\,f'(\eta), \qquad v = -\sqrt{a\nu/(2L)}\;\mathrm{e}^{x/(2L)}[f(\eta) + \eta f'(\eta)], \\ \eta = y\sqrt{a/(2L\nu)}\;\mathrm{e}^{x/(2L)}, \qquad T = T_\infty + b\,\mathrm{e}^{x/(2L)}\,\theta(\eta). \end{gathered} \qquad (6)$$

В переменных (6) уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно, уравнения (2), (5) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''' + ff'' - 2f'^2 + \delta f'' f''' + 2\lambda\theta = 0, \qquad \theta'' + \mathrm{Pr}\,\frac{3N}{3N+4}\,(f\theta' - f'\theta) = 0, \qquad (7)$$

а краевые условия (4) записываются в виде

$$f(0) = S, \quad f'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -\gamma(1 - \theta(0)), \qquad f'(\infty) \to 0, \quad \theta(\infty) \to 0. \qquad (8)$$

В (7), (8) штрих обозначает дифференцирование по переменной η; $\delta = a\Gamma\sqrt{a/(L\nu)}\,\times$ $\mathrm{e}^{3x/(2L)}$ — параметр, характеризующий свойства жидкости Вильямсона; $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\varkappa$ — число Прандтля; $\lambda = g\beta_T L(T_f - T_\infty)/u_w^2$ — параметр смешанной конвекции; $\gamma = h/(\varkappa\sqrt{2\nu L/a}\,)$ — параметр конвекции; $N = k^*\varkappa/(4\sigma^* T_\infty^3)$ — параметр теплового излучения; $S = v_0\sqrt{2L/(a\nu)} > 0$ — параметр всасывания. Коэффициент поверхностного трения и локальное число Нуссельта определяются соотношениями

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_w^2}, \qquad \mathrm{Nu}_x = \frac{x q_w}{\varkappa(T_f - T_\infty)}, \qquad (9)$$

где τ_w — напряжение сдвига; q_w — поток тепла:

$$\tau_w = \mu_0\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\Big|_{y=0}, \qquad q_w = -\varkappa\Big(\Big(1 + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3\varkappa k^*}\Big)\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$C_f\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = f''(0) + \frac{\delta}{2}\,f''^2(0), \qquad \mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}\sqrt{\frac{2L}{x}} = -\frac{3N+4}{3N}\,\theta'(0),$$

где $\mathrm{Re}_x = x u_w/\nu$ — локальное число Рейнольдса.

2. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже проводится анализ полученных в результате численного решения зависимостей коэффициента поверхностного трения, локального числа Нуссельта, скорости и температуры потока от различных параметров задачи: числа Вильямсона δ, параметра смешанной конвекции λ, параметра теплового излучения N и параметра конвекции γ (рис. 2–5). В работе [8] показано, что установившееся двумерное течение ньютоновской жидкости вблизи пористой сжимающейся пленки возможно только в том случае, если параметр всасывания удовлетворяет неравенству $S \geqslant 2$. Однако в случае неньютоновской жидкости Вильямсона из результатов вычислений следует, что при $\delta = 0{,}2$ неавтомодельное решение существует, если параметр всасывания удовлетворяет неравенству $S \geqslant 2{,}4230$, при $\delta = 0{,}4$ — если $S \geqslant 2{,}4782$, при $\delta = 0{,}6$ — если $S \geqslant 2{,}5290$. Следовательно, с увеличением параметра Вильямсона увеличивается значение параметра всасывания, при котором существует установившееся течение.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента поверхностного трения C_f и локального числа Нуссельта Nu_x от параметра всасывания S при различных значениях параметра Вильямсона δ. Видно, что коэффициент поверхностного трения и локальное число Нуссельта уменьшаются для первого решения и увеличиваются для второго. С увеличением параметра λ параметры C_f и Nu_x уменьшаются для первого решения и увеличиваются для второго (рис. 3). Такой характер зависимостей очевиден, поскольку при наличии свободной конвекции, ускоряющей течение, возникает градиент давления, увеличивающий интенсивность потока, в результате чего увеличиваются напряжение сдвига и скорость переноса тепла с поверхности пленки. При наличии свободной конвекции, замедляющей течение, возникает градиент давления, также замедляющий движение потока, в результате чего уменьшаются поверхностное трение и локальное число Нуссельта [15]. Из приведенных зависимостей следует, что в случае конвекции, замедляющей течение ($\lambda < 0$), существует два решения, в случае конвекции, ускоряющей течение ($\lambda > 0$), — единственное решение. Локальное число Нуссельта на поверхности пленки всегда является положительным (см. рис. 3,*б*). Следовательно, тепло переносится с нагретой поверхности пленки в холодную жидкость.

На рис. 4, 5 показаны распределения температуры по толщине пограничного слоя при различных значениях параметров γ, N. Из рис. 4 следует, что с увеличением параметра γ градиент температуры на поверхности пленки увеличивается и для первого

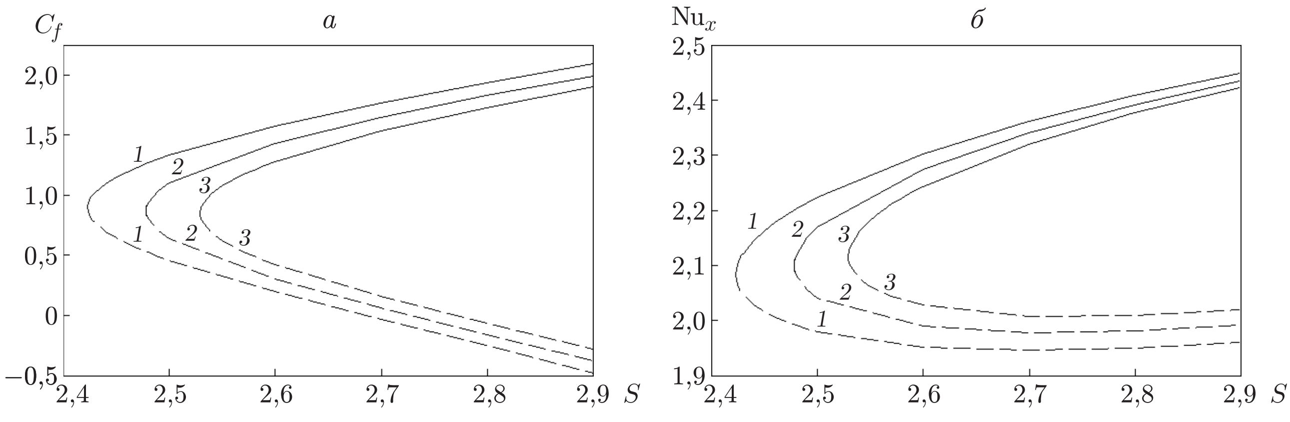

Рис. 2. Зависимости коэффициента поверхностного трения (*а*) и локального числа Нуссельта (*б*) от параметра S при $N = 2$, $\lambda = -0{,}1$, $\gamma = 0{,}5$, $\mathrm{Pr} = 1$ и различных значениях параметра δ:
1 — $\delta = 0{,}2$, *2* — $\delta = 0{,}4$, *3* — $\delta = 0{,}6$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

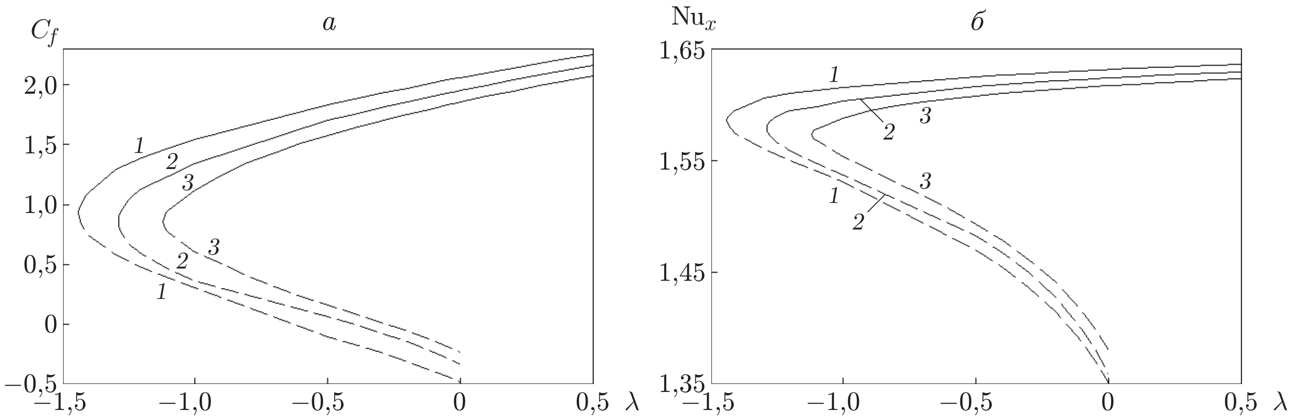

Рис. 3. Зависимости коэффициента поверхностного трения (a) и локального числа Нуссельта ($б$) от параметра λ при $S = 2{,}8$, $N = 2$, $\gamma = 0{,}3$, $\mathrm{Pr} = 1$ и различных значениях параметра δ:
1 — $\delta = 0{,}1$, *2* — $\delta = 0{,}3$, *3* — $\delta = 0{,}5$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

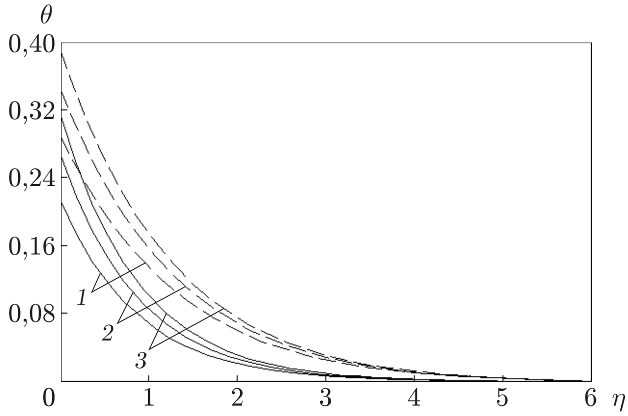

Рис. 4

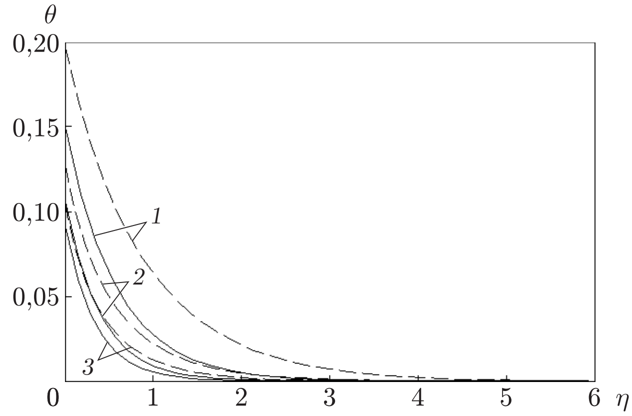

Рис. 5

Рис. 4. Распределение температуры по толщине пограничного слоя при $\delta = 0{,}2$, $\lambda = -0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $N = 2$, $S = 2{,}6$ и различных значениях параметра γ:
1 — $\gamma = 0{,}3$, *2* — $\gamma = 0{,}4$, *3* — $\gamma = 0{,}5$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

Рис. 5. Распределение температуры по толщине пограничного слоя при $\delta = 0{,}2$, $\lambda = -0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 2$, $\gamma = 0{,}3$, $S = 2{,}6$ и различных значениях параметра N:
1 — $N = 1$, *2* — $N = 2$, *3* — $N = 3$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

решения, и для второго. В результате температура и толщина теплового пограничного слоя увеличиваются с увеличением параметра γ. Заметим, что температуру поверхности пленки можно принять равной единице ($\theta(0) = 1$), выбрав достаточно большое значение параметра конвекции γ. Значение $\gamma = 0$ соответствует случаю изолированной поверхности пленки. С увеличением параметра теплового излучения N температура жидкости, а следовательно, и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются и для первого решения, и для второго (см. рис. 5). Следует отметить, что параметры γ, N оказывают несущественное влияние на скорость потока.

Заключение. В работе приведены результаты численного решения задачи о смешанной конвекции с учетом теплового излучения для течения жидкости вдоль пленки, сжимающейся по экспоненциальному закону. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Два решения задачи можно получить при различных значениях параметра всасывания только в случае свободной конвекции, замедляющей течение.

С увеличением параметра Вильямсона коэффициент поверхностного трения и локальное число Нуссельта уменьшаются для первого решения и увеличиваются для второго.

Как для первого решения, так и для второго при увеличении параметра конвекции толщина теплового пограничного слоя увеличивается, при увеличении параметра излучения — уменьшается.

С увеличением параметра Вильямсона увеличивается диапазон значений параметра всасывания, в котором существует установившееся течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Williamson W. W.** The flow of pseudoplastic materials // Indust. Engng Chem. 1929. V. 21. P. 1108–1111.
2. **Nadeem S., Hussain S. T., Lee C.** Flow of a Williamson fluid over a stretching sheet // Brazilian J. Chem. Engng. 2013. V. 30. P. 619–625.
3. **Khan N. A., Khan H. A.** A boundary layer flows of non-Newtonian Williamson fluid // Nonlinear Engng. 2014. V. 3. P. 107–115.
4. **Nadeem S., Hussain S. T.** Flow and heat transfer analysis of Williamson nanofluid // Appl. Nanosci. 2014. V. 4. P. 1005–1012.
5. **Malik M. Y., Salahuddin T.** Numerical solution of MHD stagnation point flow of Williamson fluid model over a stretching cylinder // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. V. 16. P. 161–164.
6. **Krishnamurthy M. R., Prasannakumara B. C., Gireesha B. J., Gorla R. S. R.** Effect of chemical reaction on MHD boundary layer flow and melting heat transfer of Williamson nanofluid in porous medium // Engng Sci. Technol. Intern. J. 2016. V. 19. P. 53–61.
7. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching sheet // Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. P. 601–610.
8. **Miklavčič M., Wang C. Y.** Viscous flow due a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64. P. 283–290.
9. **Fang T.** Boundary layer flow over a shrinking sheet with power-law velocity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 5838–5843.
10. **Bhattacharyya K.** Reactive solute transfer in a stagnation-point flow over a shrinking sheet with a diffusive mass flux // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2015. V. 56. P. 464–470.
11. **Magyari E., Keller B.** Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface // J. Phys. D: Appl. Phys. 1999. V. 32. P. 577–585.

12. **Elbashbeshy E. M. A.** Heat transfer over an exponentially stretching continuous surface with suction // Arch. Mech. 2001. V. 53. P. 643–651.
13. **Ishak A.** MHD boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet with radiation effect // Sains Malaysiana. 2011. V. 40. P. 391–395.
14. **Isa S. S. P. M., Arifin N. M., Nazar R., et al.** Effect of magnetic field on mixed convection boundary layer flow over an exponentially shrinking vertical sheet with suction // World Acad. Sci., Engng Technol. 2014. V. 8. P. 1539–1544.
15. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Mixed convection stagnation point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet // Meccanica. 2008. V. 43. P. 411–418.
16. **Brewster S.** Thermal radiative transfer properties. N. Y.: John Wiley and Sons, 1972.

Поступила в редакцию 28/XII 2015 г.,
в окончательном варианте — 29/III 2016 г.