

О ДВИЖЕНИИ ПОЛИДИСПЕРСНОГО МАТЕРИАЛА В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Г. Л. Бабуха, А. А. Шрайбер

(Киев)

Изложенный в работе [1] метод решения задачи о движении полидисперсного материала в двухфазном потоке основывается на замене дискретного взаимодействия между коллективами частиц некоторыми непрерывно действующими силами. Ниже излагается более строгий метод решения поставленной задачи, основанный на анализе закономерностей соударений между многочисленными группами частиц. Для упрощения рассматриваются только стационарные потоки в изотермических условиях.

§ 1. Рассмотрим случай двухфракционного материала. Так как при наличии соударений скорости частиц любого размера в каждом сечении потока принимают значения в некотором диапазоне [1], введем функции распределения частиц каждой из двух фракций по скоростям

$$d\beta_i' = f_i(u, L) du \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Здесь β_i' — объемная расходная концентрация i -ой фракции материала, u — скорость частиц, L — длина потока, индекс 1 относится к крупным частицам, 2 — к мелким.

Будем полагать, что частицы имеют сферическую форму и движутся по траекториям, параллельным оси канала [1]. Далее, не будем принимать во внимание турбулентных пульсаций газового потока.

Пусть группа мелких частиц в момент τ находится в сечении L и обладает скоростями в интервале $(u_2, u_2 + du_2)$ ¹.

Если ни одна частица из группы за промежуток $d\tau$ не испытает соударения, то к моменту $\tau + d\tau$ эти частицы образуют группу, находящуюся в сечении $L + u_2 d\tau$ и движущуюся со скоростями

$$u_2 + a_2 d\tau, \quad \left[1 + u_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) d\tau \right] du_2$$

Здесь a — ускорение, действующее на частицу.

Однако вследствие столкновений некоторые частицы за время $d\tau$ покинут группу, а другие, наоборот, войдут в нее. Поэтому концентрация частиц в группе в момент $\tau + d\tau$ будет отличаться от $f_2(u_2, L) du_2$. Полагая, что при достаточно малых du_2 и $d\tau$ чистый прирост концентрации частиц в группе пропорционален $du_2 d\tau$ [2] и обозначив коэффициент пропорциональности через $\partial_e f_2 / \partial \tau$, получим

$$\left\{ f_2(u_2 + a_2 d\tau, L + u_2 d\tau) \left[1 + u_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) d\tau \right] - f_2(u_2, L) \right\} du_2 = \frac{\partial_e f_2}{\partial \tau} du_2 d\tau$$

или

$$u_2 \frac{\partial f_2}{\partial L} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + u_2 f_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) = \frac{\partial_e f_2}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

¹ Ниже для краткости будем писать: u_2, du_2 .

Скорость изменения функции f_2 за счет столкновений можно разделить на слагаемые, обусловленные соударениями мелких частиц между собой и с крупными частицами

$$\partial_e f_2 / \partial \tau = (\partial_e f_2 / \partial \tau)_2 + (\partial_e f_2 / \partial \tau)_1 \quad (1.3)$$

Рассмотрим группы A и B мелких частиц, которые в сечении L движутся со скоростями u_2 , du_2 и u_3 , du_3 соответственно. Концентрация частиц группы A , которые за время $d\tau$ претерпевают соударения с частицами B и, следовательно, покидают группу, очевидно, составляет ¹

$$\int f_2(u_2) du_2 \frac{d\tau}{\Delta\tau_{23}}, \quad \Delta\tau_{23} = \frac{\delta_2 u_3}{6 |u_3 - u_2| w f_2(u_3) du_3} \quad (1.4)$$

Здесь $\Delta\tau_{23}$ — среднее время свободного пробега частиц группы A между последовательными соударениями с частицами группы B [1], δ — размер частиц, w — скорость газа.

Из (1.4) следует, что полная потеря частиц группой A за счет их соударений со всеми мелкими частицами составляет

$$\frac{6}{\delta_2} w f_2(u_2) du_2 d\tau \int_{u_{2\min}}^{u_{2\max}} f_2(u_3) \frac{|u_3 - u_2|}{u_3} du_3 \quad (1.5)$$

Пусть группа C малых частиц движется со скоростями u_4 , du_4 , причем этот интервал выбран таким образом, что частица из группы C после соударения с частицей группы B приобретает скорость в интервале u_2 , du_2 и поступает в группу A .

Концентрация частиц группы C , которые за время $d\tau$ соударяются с частицами B , равна

$$f_2(u_4) du_4 d\tau / \Delta\tau_{43} \quad (1.6)$$

Скорость частиц группы C определяется из выражений [1]

$$u_4 = \frac{4u_2 - (1+k)u_3}{3-k}, \quad du_4 = \frac{4}{3-k} du_2 \quad (1.7)$$

Здесь k — коэффициент восстановления при ударе. Из (1.4), (1.6) и (1.7) определяется концентрация частиц, поступивших за $d\tau$ в группу A за счет соударений с мелкими частицами

$$\frac{96}{(3-k)^2 \delta_2} du_2 d\tau \int_{u_{2\min}}^{u_{2\max}} f_2(u_3) f_2\left(\frac{4u_2 - (1+k)u_3}{3-k}\right) \frac{|u_3 - u_2|}{u_3} du_3. \quad (1.8)$$

Из (1.5) и (1.8) следует (1.9)

$$\left(\frac{\partial_e f_2}{\partial \tau}\right)_2 = \frac{6}{\delta_2} w \int_{u_{2\min}}^{u_{2\max}} \left[\frac{16}{(3-k)^2} f_2\left(\frac{4u_2 - (1+k)u_3}{3-k}\right) - f_2(u_2) \right] f_2(u_3) \frac{|u_3 - u_2|}{u_3} du_3$$

Подобным же образом может быть определена скорость изменения функции f_2 за счет соударений с крупными частицами.

¹ Для краткости вместо $f(u, L)$ будем писать $f(u)$.

С учетом полученных выражений уравнение (1.2) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
 u_2 \frac{\partial f_2}{\partial L} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + u_2 f_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) = \frac{6}{\delta_2} w \int_{u_{2\min}}^{u_{2\max}} \left[\frac{16}{(3-k)^2} f_2 \left(\frac{4u_2 - (1+k)u_3}{3-k} \right) - \right. \\
 \left. - f_2(u_2) \right] f_2(u_3) \frac{|u_3 - u_2|}{u_3} du_3 + \frac{3}{2} w \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_1^3} \int_{u_{1\min}}^{u_{1\max}} [\sigma_1^2 f_2(\sigma_1 u_2 - \\
 - \sigma_2 u_1) - f_2(u_2)] f_1(u_1) \frac{|u_1 - u_2|}{u_1} du_1 \\
 \left(\sigma_1 = \frac{2(\delta_1^3 + \delta_2^3)}{(1-k)\delta_1^3 + 2\delta_2^3}, \sigma_2 = \frac{(1+k)\delta_1^3}{(1-k)\delta_1^3 + 2\delta_2^3} \right)
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение для функции распределения крупных частиц f_1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_1 \frac{\partial f_1}{\partial L} + a_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + u_1 f_1 \frac{d}{du_1} \left(\frac{a_1}{u_1} \right) = \frac{6}{\delta_1} w \int_{u_{1\min}}^{u_{1\max}} \left[\frac{16}{(3-k)^2} f_1 \left(\frac{4u_1 - (1+k)u_3}{3-k} \right) - \right. \\
 \left. - f_1(u_1) \right] f_1(u_3) \frac{|u_3 - u_1|}{u_3} du_3 + \frac{3}{2} w \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_2^3} \int_{u_{2\min}}^{u_{2\max}} [\sigma_3^2 f_1(\sigma_3 u_1 - \\
 - \sigma_4 u_2) - f_1(u_1)] f_2(u_2) \frac{|u_2 - u_1|}{u_2} du_2 \\
 \left(\sigma_3 = \frac{2(\delta_1^3 + \delta_2^3)}{(1-k)\delta_2^3 + 2\delta_1^3}, \sigma_4 = \frac{(1+k)\delta_2^3}{(1-k)\delta_2^3 + 2\delta_1^3} \right)
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.1) следует, что решения (1.10) и (1.11) должны подчиняться условиям нормировки

$$\int_{u_{i\min}}^{u_{i\max}} f_i(u, L) du = \beta_i' \quad (1.12)$$

Функции $f_i(u, L)$ предполагаются отличными от нуля в интервалах $(u_{i\min}, u_{i\max})$ и тождественно равными нулю вне этих интервалов.

Для численного решения системы (1.10), (1.11) необходимо определить указанные интервалы.

На стабилизированном участке потока мелкие частицы не могут двигаться быстрее, чем они двигались бы при отсутствии крупной фракции, т. е. $u_{2\max}^{(\infty)} = w - v_2$, где v — скорость витания частиц (индекс ∞ указывает, что величина относится к стабилизированному участку). Из аналогичных соображений следует, что $u_{1\min}^{(\infty)} = w - v_1$. При этом будут справедливы равенства

$$u_{2\min}^{(\infty)} = u_{1\min}^{(\infty)}, \quad u_{1\max}^{(\infty)} = u_{2\max}^{(\infty)} \quad (1.13)$$

Действительно, пусть, например, $u_{2\min}^{(\infty)} < u_{1\min}^{(\infty)}$. Тогда на некотором участке потока действие силы аэродинамического сопротивления и соударения с крупными частицами приведут к тому, что скорость всех мелких частиц, которые двигались со скоростью менее $u_{1\min}^{(\infty)}$, возрастет, по крайней мере, до $u_{1\min}^{(\infty)}$. Если же $u_{2\min}^{(\infty)} > u_{1\min}^{(\infty)}$, то малая частица, обладающая минимальной скоростью, в результате соударения с какой-либо более

медленной крупной частицей приобретает скорость менее $u_{2\min}^{(\infty)}$, в результате следующего соударения ее скорость еще снизится и т. д. Следовательно, в потоке должны быть мелкие частицы, скорость которых как угодно мало отличается от $u_{1\min}^{(\infty)}$. Таким же образом может быть доказана справедливость второго из равенств (1.13).

Применительно к разгонному участку рассмотрим случай, когда во входном сечении потока функции f_1 и f_2 отличны от нуля в некотором интервале $(u_{\min}^{(0)}, u_{\max}^{(0)})$, причем для определенности положим, что $u_{\min}^{(0)} < u_{\min}^{(\infty)}$ и $u_{\max}^{(0)} < u_{\max}^{(\infty)}$ (здесь индекс 0 указывает, что величины относятся ко входному сечению).

При этом справедливость равенств вида (1.13) для всех сечений разгонного участка может быть доказана по индукции.

Пусть в некотором сечении A разгонного участка скорости частиц обеих фракций принимают значения в интервале $(u_{\min}^{(A)}, u_{\max}^{(A)})$. Для произвольного сечения B , расположенного дальше от входного сечения, чем A , справедливы неравенства

$$u_{1\min}^{(B)} > u_{\min}^{(A)}, \quad u_{2\max}^{(B)} > u_{\max}^{(A)} \quad (1.14)$$

причем величины в левых частях (1.14) могут быть определены из уравнений движения монодисперсного материала [3]. Какая-либо крупная частица, которая в сечении A обладает максимальной скоростью, при отсутствии соударений в сечении B будет двигаться со скоростью $u_{1\max}^{(A)} < u_{2\max}^{(B)}$ [3]. Если же за время движения на участке AB эта частица испытает достаточно большое число соударений с мелкими частицами, в сечении B она может приобрести скорость, как угодно мало отличающуюся от $u_{2\max}^{(B)}$ (но не превосходящую $u_{2\max}^{(B)}$). Таким же образом можно показать, что $u_{2\min}^{(B)} = u_{1\min}^{(B)}$.

Система (1.10), (1.11) может быть решена методом сеток. На фиг. 1 изображены область определения искомых функций и сетка $u = \text{const}$, $L = \text{const}$. Кривые $u_{\max}$ и $u_{\min}$ определяются из упоминавшихся выше уравнений движения монодисперсного материала [3] соответственно для мелких и крупных частиц. Обозначая правые части (1.10) и (1.11) соответственно через I_1 и I_2 и заменяя частные производные в этих уравнениях разностными соотношениями

$$\frac{\partial f_i}{\partial L} = \frac{f_i(A) - f_i(B)}{\Delta L_k}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_i} = \frac{f_i(C) - f_i(A)}{\Delta u_m} \quad (i = 1, 2) \quad (1.15)$$

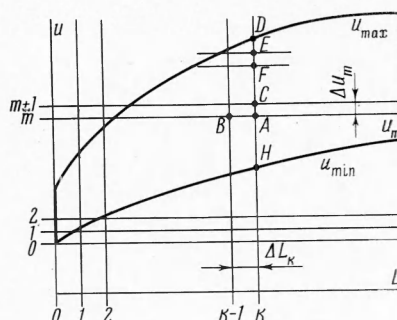
получим

$$f_i(A) = \left(I_i + \frac{u_m}{\Delta L_k} f_i(B) - \frac{a_{im}}{\Delta u_m} f_i(C) \right) \left(\frac{u_m}{\Delta L_k} - \frac{a_{im}}{\Delta u_m} + u_m \frac{d}{du} \frac{a_{im}}{u_m} \right)^{-1} \quad (i = 1, 2) \quad (1.16)$$

Пусть функции f_1 и f_2 известны в сечении $k-1$. Значения искомых функций в крайних точках (D и H) неизвестны, так как в качестве граничных условий служат условия нормировки (1.12). Введем обозначения $f_1(D) \equiv \Phi_1$, $f_2(D) \equiv \Phi_2$ и по формуле (1.16) вычислим последовательно $f_i(E)$, $f_i(F)$, ..., $f_i(H)$, которые будут линейными функциями Φ_1 и Φ_2 . Следовательно, Φ_1 и Φ_2 однозначно определяются из (1.12).

Очевидно, искомые функции должны быть известны во входном сечении потока.

Изложенный метод решения связан с большим объемом вычислений, которые должны выполняться на электронной машине.



Фиг. 1

§ 2. Рассмотрим один частный случай, в котором может быть получено приближенное решение поставленной задачи. Пусть $\delta_1 \gg \delta_2$. Так как при этом масса мелкой частицы ничтожно мала по сравнению с массой крупной, изменение скорости крупной частицы за счет одиночного соударения с мелкой весьма незначительно, но частота соударений должна быть очень велика [1]. Заменим воздействие малых частиц на крупные при соударениях непрерывно действующей силой. При этом все крупные частицы в каждом сечении потока должны двигаться с одинаковой скоростью (обозначим ее U_1). По-прежнему будем полагать, что скорость малых частиц принимает значения в некотором диапазоне, и рассматривать функцию распределения мелких частиц по скоростям f_2 . Однако для упрощения не будем учитывать соударений мелких частиц между собой.

Пусть $k \neq 1$. Пренебрегая массой мелкой частицы по сравнению с крупной, вместо выражения σ_1 и σ_2 в (1.10) получим

$$\sigma_1 \approx \frac{2}{1-k}, \quad \sigma_2 \approx \frac{1+k}{1-k} \quad (2.1)$$

Так как все крупные частицы обладают одинаковой скоростью, очевидно соотношение

$$f_1(u_1) = \beta_1' \delta(u_1 - U_1) \quad (2.2)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция. Учитывая (2.1) и (2.2) и вводя для краткости обозначение

$$\psi = \frac{3}{2} w \beta_1' (\delta_1 + \delta_2)^2 / \delta_1^3 \quad (2.3)$$

вместо (1.10) получим

$$u_2 \frac{\partial f_2}{\partial L} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + u_2 f_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) = \psi \left(\frac{u_2}{U_1} - 1 \right) \left[\frac{4}{(1-k)^2} f_2 \left(\frac{2}{1-k} u_2 - \frac{1+k}{1-k} U_1 \right) - f_2(u_2) \right] \quad (k \neq 1) \quad (2.4)$$

В случае $k = 1$ при принятых допущениях скорость малой частицы после соударения всегда становится равной U_1 [1], и в потоке нет мелких частиц, которые после соударения с крупной частицей приобретали бы скорость в интервале u_2, du_2 . Следовательно, первый член выражения в квадратных скобках (2.4), который равен (с точностью до множителя) скорости изменения f_2 за счет поступления новых частиц в группу u_2, du_2 , при $k = 1$ тождественно равен нулю, и вместо (2.4) получим

$$u_2 \frac{\partial f_2}{\partial L} + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + u_2 f_2 \frac{d}{du_2} \left(\frac{a_2}{u_2} \right) = -\psi \left(\frac{u_2}{U_1} - 1 \right) f_2 \quad (k = 1) \quad (2.5)$$

Для стабилизированного участка потока $\partial f_2 / \partial L = 0$

В этом случае уравнение (2.5) легко интегрируется.

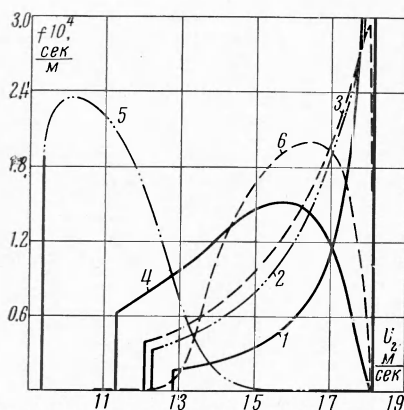
Вид решения зависит от вида выражения для a_2 , т. е. от области значений критерия Рейнольдса R_2 , в которой происходит движение мелких частиц [3]. Например, решением (2.5) будет для области $R_2 = 13 \div 800$

$$f_2 = C u_2 \frac{(t - \sqrt{v_2})^{2\varepsilon-1}}{(t^2 + t \sqrt{v_2} + v_2)^{\varepsilon+1}} \exp \left(\zeta \arctg \frac{2t + \sqrt{v_2}}{\sqrt{3v_2}} - 2 \frac{\psi v_2^{1.5}}{g U_{1\infty}} t \right) \quad (2.6)$$

для области $R_2 < 1$

$$f_2 = C u_2 \left(\frac{w - u_2}{v_2} - 1 \right)^{3\varepsilon-1} \exp \left(\frac{\psi v_2}{g U_{1\infty}} u_2 \right) \quad (2.7)$$

$$t^2 = w - u_2, \quad \varepsilon = \frac{\psi v_2}{3g U_{1\infty}} (w - U_{1\infty} - v_2), \quad \zeta = \frac{2\psi v_2}{\sqrt{3} g U_{1\infty}} (w - U_{1\infty} + v_2)$$



Фиг. 2

Анализ показывает, что областью существования решений (2.5) будет интервал $(-\infty, u_{2\max}^{(\infty)})$, где $u_{2\max}^{(\infty)} = w - v_2$. Однако на основании рассуждений, аналогичных приведенным в § 1, можно показать, что скорость мелких частиц на стабилизированном участке потока не может быть ниже $U_{1\infty}$. Следовательно, функция f_2 отлична от нуля в интервале $(U_{1\infty}, u_{2\max}^{(\infty)})$ и тождественно равна нулю при других значениях u_2 .

Как следует из (2.6) и (2.7), вид функции f_2 зависит от величины ε . При $\varepsilon > 1/3$ (для области $R_2 < 1$) и $\varepsilon > 1/2$ (для области R_2 от 13 до 800) $f_2(u_{2\max}^{(\infty)}) = 0$; если же величина ε ниже указанных критических значений, то $f_2(u_{2\max}^{(\infty)}) = \infty$ (фиг. 2).

После преобразований выражение для ε при значениях $R_2 < 1$ может быть приведено к виду

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_1^3} \frac{w\beta_1'}{U_{1\infty}} (u_{2\max}^{(\infty)} - U_{1\infty})^2 \right] \frac{1}{(a_2)_{u_2=U_{1\infty}}} \quad (2.8)$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой среднее значение ускорения, эквивалентного воздействию крупных частиц на мелкие, движущиеся со скоростью $u_{2\max}^{(\infty)}$, при соударениях [1]. Следовательно, в области $R_2 < 1$ безразмерный параметр ε приобретает очевидный физический смысл: он пропорционален отношению полных ускорений, действующих на мелкие частицы, обладающие соответственно максимальной и минимальной скоростями. Для других областей значений R_2 параметр ε однозначно определяется указанным отношением. Из (2.3) следует, что при фиксированных δ_1 , δ_2 и β_2' величина ε возрастает с ростом концентрации крупных частиц в потоке.

Уравнение (2.4) для стабилизированного участка потока представляет собой дифференциальное уравнение с опережающим аргументом. Нетрудно убедиться, что при

$$u_2 > u_2^* = 1/2 [(1 - k) u_{2\max}^{(\infty)} + (1 + k) U_{1\infty}] \quad (2.9)$$

опережающий аргумент превышает $u_{2\max}^{(\infty)}$; следовательно, в интервале $(u_2^*, u_{2\max}^{(\infty)})$ уравнение (2.4) сводится к (2.5). Указанный интервал есть начальное множество уравнения (2.4), а значения f_2 в этом интервале (т. е. начальная функция) определяются, как указано выше.

В интервале $(U_{1\infty}, u_2^*)$ значения f_2 могут быть получены методом последовательного интегрирования. Подставляя значения начальной функции в (2.4), получим некоторое дифференциальное уравнение в интервале (u_2^{**}, u_2^*) , где

$$u_2^{**} = 1/2 [(1 - k) u_2^* + (1 + k) U_{1\infty}]$$

Подставляя решение этого уравнения в (2.4), получим уравнение для следующего интервала и т. д.

При $k \neq 1$ функция f_2 также отлична от нуля в интервале $(U_{1\infty}, u_{2\max}^{(\infty)})$.

Значение скорости крупных частиц $U_{1\infty}$ может быть определено следующим образом. Уравнение движения крупных частиц на стабилизированном участке потока при принятых допущениях имеет вид [1, 3]:

$$g \left[\left(\frac{w - \bar{U}_{1\infty}}{v_1} \right)^{n_1} - 1 \right] + a_{1c} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь n_1 — показатель степени, величина которого определяется областью значений R_1 [3]; a_{1c} — непрерывно действующая сила (отнесенная к единице массы частицы), эквивалентная воздействию малых частиц на крупные при соударениях. Для a_{1c} может быть получено выражение [1]

$$a_{1c} = \frac{3}{4} (1 + k) w \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_1^3} \int_{U_{1\infty}}^{u_{2\max}^{(\infty)}} \frac{(u_2 - \bar{U}_{1\infty})^2}{u_2} f_2 du_2 \quad (2.11)$$

Для нескольких значений $U_{1\infty}$ по изложенному способу определяются функции распределения мелких частиц f_2 . Затем строятся графики зависимостей $a_{1c} = a_{1c}(U_{1\infty})$ согласно (2.10) и (2.11). Очевидно, абсцисса точки пересечения этих кривых и представляет собой искомое значение $U_{1\infty}$.

Уравнения (2.4) и (2.5) для разгонного участка потока также решаются методом сеток. При этом изменение U_1 по длине потока определяется из соотношения [1,3]

$$U_1 \frac{dU_1}{dL} = g \left[\left(\frac{w - U_1}{v_1} \right)^{n_1} - 1 \right] + a_{1c} \quad (2.12)$$

В качестве примера был выполнен расчет скоростей движения двухфракционного материала на стабилизированном участке потока при

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 5 \text{ мм}, \delta_2 = 0,5 \text{ мм}, w = 20 \text{ м/сек} \\ \beta_1' &= (0.738 \div 31.2) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{м}^3, v_1 = 12.48 \text{ м/сек} \\ v_2 &= 1.86 \text{ м/сек}, \beta_2' = 0.738 \text{ м}^3/\text{м}^3 \end{aligned}$$

полученных функций распределения приведены на фиг. 2, на которой

кривые	1	2	3	4	5	6
k	1	1	1	1	1	0
ε	0.144	0.397	0.513	1.284	13.45	0.968

Средние скорости мелких частиц определялись из условий усреднения по истинной объемной концентрации

$$\langle u_2 \rangle = \beta_2' \left(\int_{u_{1\infty}}^{u_{2\max}^{(\infty)}} \frac{f_2}{u_2} du_2 \right)^{-1} \quad (2.13)$$

Полученные результаты показали, что приближенный метод решения задачи о движении двухфракционного материала, изложенный в работе [1], приводит к заниженным значениям скоростей обеих фракций. Однако в рассмотренных примерах погрешность метода не превышает 8—10%.

§ 3. Рассмотрим случай дисперсного вещества с непрерывным распределением частиц по размерам, состав которого характеризуется функцией x

$$d\beta' = x(\delta) d\delta \quad (3.1)$$

Введем функцию распределения частиц по скоростям и размерам F

$$d^2\beta' = F(\delta, u, L) d\delta du \quad (3.2)$$

Общий вид уравнения относительно функции F не отличается от (1.2). Для вычисления $\partial_e F / \partial \tau$ рассмотрим две группы (A и B) частиц размером $\delta_1, d\delta_1$ и $\delta_2, d\delta_2$, обладающих в сечении L скоростями u_1, du_1 и u_2, du_2 соответственно. Концентрация частиц группы A , которые за $d\tau$ испытывают соударения с частицами B , равна¹

$$F(\delta_1, u_1) d\delta_1 du_1 d\tau / \Delta\tau_{12} \quad (3.3)$$

Здесь $\Delta\tau_{12}$ определяется, как указано в § 1. После очевидных преобразований и интегрирования (3.3) получим выражение для полной потери частиц группой A за счет их соударений со всеми частицами, находящимися в потоке:

$$\frac{3}{2} w F(\delta_1, u_1) d\delta_1 du_1 d\tau \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_2^3} \frac{|u_2 - u_1|}{u_2} F(\delta_2, u_2) du_2 d\delta_2 \quad (3.4)$$

¹ Вместо $F(\delta, u, L)$ будем писать для краткости $F(\delta, u)$.

Таким же образом определяется и полный прирост концентрации частиц в группе A за счет соударений

$$\frac{3}{2} w d\delta_1 du_1 d\tau \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_2^3} \sigma_3^2 \frac{|u_2 - u_1|}{u_2} F(\delta_1, \sigma_3 u_1 - \sigma_4 u_2) F(\delta_2, u_2) du_2 d\delta_2 \quad (3.5)$$

Из (1.2), (3.4) и (3.5) после преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned} & u_1 \frac{\partial F(\delta_1, u_1)}{\partial L} + a_1 \frac{\partial F(\delta_1, u_1)}{\partial u_1} + u_1 F(\delta_1, u_1) \frac{d}{du_1} \left(\frac{a_1}{u_1} \right) = \\ & = \frac{3}{2} w \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_2^3} \frac{|u_2 - u_1|}{u_2} [\sigma_3^2 F(\delta_1, \sigma_3 u_1 - \sigma_4 u_2) - \\ & - F(\delta_1, u_1)] F(\delta_2, u_2) du_2 d\delta_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что решение уравнения (3.6) должно подчиняться условию нормировки

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} F(\delta, u) du = x(\delta) \quad (3.7)$$

На стабилизированном участке потока максимальная скорость частиц минимального размера, очевидно, равна $u_{\max}^{(\infty)} = w - v_{\min}$, а минимальная скорость наиболее крупных частиц составляет $u_{\min}^{(\infty)} = w - v_{\max}$. Аналогично изложенному в § 1, можно показать, что:

(1) на стабилизированном участке потока функция F отлична от нуля в прямоугольнике, вершины которого имеют координаты

$$(\delta_{\min}, u_{\min}^{(\infty)}), (\delta_{\min}, u_{\max}^{(\infty)}), (\delta_{\max}, u_{\min}^{(\infty)}), (\delta_{\max}, u_{\max}^{(\infty)})$$

(2) если во входном сечении потока скорости частиц принимают значения в некотором прямоугольнике, стороны которого параллельны осям δ и u , такая же форма области $F \neq 0$ сохраняется во всех сечениях разгонного участка, причем зависимости $u_{\max} = u_{\max}(L)$ и $u_{\min} = u_{\min}(L)$ определяются из уравнений движения монодисперсного материала [3] соответственно для частиц минимального и максимального размеров.

Уравнение (3.6) также решается методом сеток.

Поступила 20 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабуха Г. Л., Шрайбер А. А. Влияние соударений частиц полидисперсного материала на движение и межфазовый теплообмен в вертикальном двухфазном потоке. ПМТФ, 1966, № 4.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
3. Бабуха Г. Л., Шрайбер А. А. Изменение концентрации дисперсного материала по длине двухфазного потока. Сб. «Течения жидкостей и газов», Изд. «Наукова думка», 1965.