

**ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ**

УДК 539.3:541

А. О. Ватульян, А. Ю. Кирютенко, А. В. Наседкин

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Поведение диэлектрических сред с учетом явлений пиро- и пьезоэффекта в рамках линейного квазиэлектростатического приближения описывается теорией термоэлектروупругости (термопьезоэлектричества) [1]. Дальнейшее развитие этой теории отражено в [2, 3]. Небольшое число работ посвящено изучению свойств связанных термоэлектроупругих волн. В [4, 5] анализировались дисперсионные соотношения для ряда полуограниченных термоэлектроупругих сред.

В настоящей работе исследована структура плоских волн в безграничной термоэлектроупругой среде класса 6 мм. Выявлены безразмерные параметры, отражающие связанности механических, электрических и тепловых полей. Изучено влияние связанности на скорости и коэффициенты затухания модифицированных электроупругих и тепловых волн. Проанализированы дисперсионные свойства плоских волн в зависимости от частоты колебаний и направления распространения. Численные расчеты выполнены для конкретной термоэлектроупругой среды титаната бария (BaTiO_3). Изучены фундаментальные решения в плоской задаче линейной термоэлектроупругости для среды класса 6 мм. Построены представления в виде однократных интегралов по конечному отрезку, удобные при реализации метода граничных элементов.

1. Анализ плоских волн в неограниченной термоэлектроупругой среде. Рассмотрим уравнения движения термоэлектроупругой среды для пьезокерамики, поляризованной вдоль оси Ox_3 (класс 6 мм) [3]:

$$L_{ij}U_j = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \theta\}$ — вектор неизвестных величин (u_j — компоненты вектора перемещения, φ — потенциал, θ — прирост температуры от естественного состояния); L_{ij} — дифференциальные операторы в частных производных, определяемые формулами

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + 0,5(c_{11} - c_{12})\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, & L_{12} &= L_{21} = 0,5(c_{11} + c_{12})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, & L_{14} &= L_{41} = (e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, & L_{15} &= -\gamma_{11}\partial_1, \\ L_{51} &= T_0\gamma_{11}\partial_1\partial_t, & L_{22} &= 0,5(c_{11} - c_{12})\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, \\ L_{23} &= L_{32} = (c_{13} + c_{44})\partial_2\partial_3, & L_{24} &= L_{42} = (e_{31} + e_{15})\partial_2\partial_3, & & (1.2) \\ L_{25} &= -\gamma_{11}\partial_2, & L_{52} &= T_0\gamma_{11}\partial_2\partial_t, & L_{33} &= c_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, \\ L_{34} &= L_{43} = e_{15}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + e_{33}\partial_3^2, & L_{35} &= -\gamma_{33}\partial_3, & L_{53} &= T_0\gamma_{33}\partial_3\partial_t, \\ L_{44} &= -(\varepsilon_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + \varepsilon_{33}\partial_3^2), & L_{45} &= g_3\partial_3, & L_{54} &= -T_0g_3\partial_3\partial_t, \\ L_{55} &= (\rho c_\varepsilon\partial_t - k_{11}\partial_1^2 - k_{11}\partial_2^2 - k_{33}\partial_3^2), \end{aligned}$$

где c_{ij} — упругие модули; e_{ij} — пьезомодули; ε_{ij} — диэлектрические проницаемости; γ_{ij} — коэффициенты температурных напряжений; g_i — пироккоэффициенты; k_{ij} — коэффициенты теплопроводности; c_ε — теплоемкость; ρ — плотность; T_0 — температура естественного состояния по шкале Кельвина.

Обезразмерим систему (1.1), введя следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &= c_{ij}/c_{33}, & \bar{u}_j &= u_j/h, & \bar{\partial}_j &= h\partial_j, & \bar{x}_j &= x_j/h, & \bar{t} &= t/t_0, & \bar{\partial}_t &= t_0\partial_t, \\ \bar{\varphi} &= \sqrt{\varepsilon_{33}/c_{33}}\varphi/h, & \bar{e}_{ij} &= e_{ij}/\sqrt{\varepsilon_{33}c_{33}}, & \bar{\rho} &= \rho/\rho_0, & \bar{\theta} &= \theta/\theta_0, & \bar{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}/\varepsilon_{33}, \\ \bar{\gamma}_{ij} &= \gamma_{ij}\sqrt{T_0/(c_{33}\rho c_\varepsilon)}, & \bar{g}_3 &= g_3\sqrt{T_0/(\varepsilon_{33}\rho c_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Считая далее $h^2\rho/(t_0^2c_{33}) = 1$, $k_{33}t_0/(\rho c_\varepsilon h^2) = 1$ и полагая $\rho_0 = \rho$, $\varepsilon = k_{33}/(\rho c_\varepsilon)$, $v_0^2 = c_{33}/\rho$, $\theta_0 = \sqrt{T_0 c_{33}/(\rho c_\varepsilon)}$, получим $t_0 = \varepsilon/v_0^2$, $h = \varepsilon/v_0$.

Выбранный способ обезразмеривания позволяет привести систему дифференциальных уравнений (1.1) к виду, удобному для дальнейшего анализа и выявления параметров связанности полей. Так, коэффициенты при $\partial^2 \bar{U}_j/\partial \bar{t}^2$ и $\partial \bar{\theta}/\partial \bar{t}$ оказываются равными единице, а коэффициенты при $\partial^2 \bar{U}_j/\partial \bar{x}_m^2$ — порядка единицы. Величины $\bar{e}_{i\alpha}$ определяют электромеханические связи и имеют порядок $k^2/(1-k^2)$, где k^2 — один из статических коэффициентов электромеханической связи (КЭМС) [6]. А так как для реальных пьезоэлектрических сред $k^2 < 0,5$, то $0 < \bar{e}_{i\alpha}^2 < 1$. Величины $\bar{\gamma}_{ij}$ определяют связанность упругих и тепловых полей, причем $\bar{\gamma}_{jj}^2$ полностью аналогичны коэффициентам связанности в задачах термоупругости [7] и для большинства сред оказываются малыми. Наконец, \bar{g}_3 отражает связанность электрических и тепловых полей. Из положительной определенности внутренней энергии вытекает, что для пьезоэлектрической среды класса б мм выполняется неравенство $\varepsilon_{33}\rho c_\varepsilon/T_0 \geq g_3^2$, и, следовательно, $\bar{g}_3^2 < 1$. Заметим также, что временной и пространственный характерные параметры t_0 и h и величина ε обычны при обезразмеривании уравнений термоупругости [7], а v_0 имеет смысл характерной скорости акустических волн в пьезоэлектрической среде. Далее знак \sim над обезразмеренными величинами будем опускать.

Исследуем плоские волны в неограниченной термоэлектроупругой среде, т. е. будем отыскивать решение обезразмеренных уравнений (1.1) в виде

$$U_j = X_j \exp[i(\omega t - \eta \mathbf{n}x)], \quad (1.3)$$

где ω — безразмерная вещественная частота колебаний, связанная с размерной частотой Ω формулой $\omega = \Omega/\Omega_*$ ($\Omega_* = c_{33}/(\rho \varepsilon)$); \mathbf{n} — единичный вектор, определяющий направление распространения волны; η — обобщенное (вообще говоря, комплексное) безразмерное волновое число.

Подставляя (1.3) в (1.2) и приравнявая определитель получающейся алгебраической системы к нулю, имеем дисперсионное соотношение, связывающее ω , η и \mathbf{n} . Множество корней этого уравнения разбивается на два подмножества. Одно из них характеризует несвязанную чисто упругую SH-волну, поляризованную в плоскости Ox_1x_2 и не подверженную дисперсии и затуханию; ее скорость $v_A = \omega/\eta = \sqrt{0,5(c_{11} - c_{12})(n_1^2 + n_2^2) + c_{44}n_3^2}$, где n_1, n_2, n_3 — компоненты вектора \mathbf{n} . Второе подмножество совпадает с множеством нулей определителя $D(\omega, \eta) = \eta^2 D_0(\omega, \eta)$ при фиксированном \mathbf{n} .

Исследуем структуру множества корней уравнения

$$D_0(\omega, \eta) = 0. \quad (1.4)$$

При замене $z = \eta/\omega$ (1.4) эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} c_1 z^2 - 1 & c_0 z^2 & e_0 z & \gamma_1 \alpha z \\ c_0 z^2 & c_3 z^2 - 1 & e_3 z & \gamma_3 \beta z \\ e_0 z & e_3 z & -\varepsilon & -g\beta \\ \gamma_1 \alpha z & \gamma_3 \beta z & -g\beta & iK\omega z^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \cos \psi$; $\beta = n_3 = \sin \psi$; $c_1 = c_{11}\alpha^2 + c_{44}\beta^2$; $c_0 = (c_{13} + c_{44})\alpha\beta$; $e_0 = (e_{31} + e_{15})\alpha\beta$; $c_3 = c_{44}\alpha^2 + c_{33}\beta^2$; $e_3 = e_{15}\alpha^2 + e_{33}\beta^2$; $\varepsilon = \varepsilon_{11}\alpha^2 + \varepsilon_{33}\beta^2$; $K = k_{11}/k_{33}\alpha^2 + \beta^2$; $\gamma_i = \gamma_{ii}$, $g = g_3$. Введя \bar{g} , $\bar{\gamma}_j$ по формулам $g = \varepsilon\bar{g}$, $\gamma_j = \varepsilon\bar{\gamma}_j$, после ряда преобразований из (1.5) получим

$$iK\omega z^2(a_1 z^4 - a_2 z^2 + a_3) - (A_1 z^4 - A_2 z^2 + A_3) = 0, \quad (1.6)$$

где $A_j = a_j + \varepsilon^2 q_j$ ($j = 1, 2, 3$); $q_1 = b_1 - d_1 - f_1$; $q_2 = b_2 - d_2 - f_2$; $q_3 = -d_3$; $a_1 = -\varepsilon c_1 c_3 + 2c_0 e_0 e_3 - e_0^2 c_3 + c_0^2 \varepsilon - e_3^2 c_1$; $a_2 = -(\varepsilon(c_1 + c_3) + e_0^2 + e_3^2)$; $a_3 = -\varepsilon$; $b_1 = -2g\beta[\gamma_3\beta(c_0 e_0 - e_3 c_1) + \bar{\gamma}_1\alpha(c_0 e_3 - e_0 c_3)]$; $b_2 = 2\bar{g}\beta[e_0\bar{\gamma}_1\alpha + e_3\bar{\gamma}_3\beta]$; $d_1 = -\bar{g}^2\beta^2(c_1 c_3 - c_0^2)$; $d_2 = -\bar{g}^2\beta^2(c_1 + c_3)$; $d_3 = -\bar{g}^2\beta^2$; $f_1 = \bar{\gamma}_1^2\alpha^2(\varepsilon c_3 + e_3^2) + \bar{\gamma}_3^2\beta^2(e_0^2 + c_1\varepsilon) - 2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3\alpha\beta(e_0 e_3 + \varepsilon c_0)$; $f_2 = \varepsilon(\bar{\gamma}_1^2\alpha^2 + \bar{\gamma}_3^2\beta^2)$.

Уравнение (1.6) определяет шесть корней z , из которых далее будем анализировать только три корня z_j ($j = 1, 2, 3$) с $\text{Im } z_j > 0$ ($\text{Im } \eta_j > 0$, $\eta_j = z_j\omega$).

При $\varepsilon = 0$ имеем несвязанную задачу термоэлектроупругости, и корни z_j находим в явном виде:

$$z_1^2 = 1/(iK\omega), \quad z_2^2 = (a_2 + r)/(2a_1), \quad z_3^2 = (a_2 - r)/(2a_1), \quad r = \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}. \quad (1.7)$$

Первый корень характеризует чисто тепловую волну со скоростью $v_1 = \text{Re}(1/z_1)$ и затуханием $\nu_1 = -\text{Im}(\omega z_1)$. Вторым и третьим корнями характеризуют электроупругие волны, которые не подвержены дисперсии и затуханию. Скорости этих волн $v_i = \text{Re}(1/z_i)$ ($i = 2, 3$) совпадают с приведенными в [8].

Обозначая $Y = z^2$, перепишем уравнение (1.6):

$$(iK\omega Y - 1)(a_1 Y^2 - a_2 Y + a_3) - \varepsilon^2(q_1 Y^2 - q_2 Y + q_3) = 0. \quad (1.8)$$

Учитывая малость параметра ε для реальных пьезоэлектрических сред, будем искать корни Y_j уравнения (1.8) в виде разложения по параметру ε :

$$Y_j = y_{j0} + \varepsilon^2 y_{j1} + \dots$$

Первые члены этого разложения представляются формулами

$$y_{j0} = z_j^2, \quad y_{11} = (q_1 y_0^2 - q_2 y_0 + q_3)/[iK\omega(a_1 y_0^2 - a_2 y_0 + a_3)],$$

$$y_{j1} = (q_1 y_0^2 - q_2 y_0 + q_3)/[(iK\omega y_0 - 1)(2a_1 y_0 - a_2)], \quad j = 2, 3$$

(z_j определены в (1.7)).

Для связанной задачи при $\varepsilon \neq 0$ имеем модифицированные квазитепловую ($j = 1$) и две квазиэлектроупругие ($j = 2, 3$) волны, подверженные затуханию и дисперсии.

Отметим, что область изменения акустических частот ω , при которых обоснована теория термоэлектроупругости, лежит в пределах $\omega \ll 1$ ($\Omega \ll \Omega_*$). В связи с этим существенны также асимптотики корней $X_j = 1/z_j^2$ при малых ω , которые определяются из

(1.8) в виде

$$X_j = x_{j0} + \omega x_{j1} + \omega^2 x_{j2} + \dots, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $x_{10} = 0$; $x_{11} = iKa_1/A_1$; $x_{12} = x_{11}(A_2x_1 - iKa_2)/A_1$; $x_{20} = (A_2 + r_1)/(2A_3)$; $r_1 = \sqrt{A_2^2 - 4A_3A_1}$; $x_{30} = (A_2 + r_1)/(2A_3)$; $x_{k1} = iK(a_1 - a_2x_{k0} + a_3x_{k0}^2)/[x_{k0}(2A_3x_{k0} - A_2)]$ ($k = 2, 3$); $x_{k2} = x_{k1}[iK(2a_3x_{k0} - a_2) - x_{k1}(3A_3x_{k0} - A_2)]/[x_{k0}(2A_3x_{k0} - A_2)]$.

Для направлений $\psi = 0$ и $\psi = \pi/2$ методами теории возмущений можно построить зависимость скоростей и затуханий термоэлектроупругих волн от коэффициента связанности ε :

1) при $\psi = 0$

$$v_1 = \sqrt{0,5k_m\omega} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{\bar{\gamma}_1^2(c_{11} - k_m\omega)}{2(c_{11}^2 + k_m^2\omega^2)} \right), \quad \nu_1 = \sqrt{0,5k_m\omega} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{\bar{\gamma}_1^2(c_{11} + k_m\omega)}{2(c_{11}^2 + k_m^2\omega^2)} \right),$$

$$v_2 = \sqrt{c_{11}} \left(1 + \varepsilon^2 \frac{\bar{\gamma}_1^2 c_{11}}{2(c_{11}^2 + k_m^2\omega^2)} \right), \quad \nu_2 = \varepsilon^2 \frac{\bar{\gamma}_1^2 \sqrt{c_{11}} k_m \omega}{2(c_{11}^2 + k_m^2\omega^2)},$$

$$v_3 = \sqrt{c_{44} \left(1 + \frac{e_{15}^2}{c_{44}e_{11}} \right)}, \quad \nu_3 = 0;$$

2) при $\psi = \pi/2$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2(1 - \varepsilon^2 \bar{g}^2)}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(\bar{\gamma}_3^2 - 2\bar{\gamma}_3 \bar{g} e_{33} + \bar{g}^2 e_{33}^2)(c_{33} + e_{33}^2 - \omega)}{2(\omega^2 + c_{33} + e_{33}^2)} \right),$$

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2(1 - \varepsilon^2 \bar{g}^2)}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(\bar{\gamma}_3^2 - 2\bar{\gamma}_3 \bar{g} e_{33} + \bar{g}^2 e_{33}^2)(c_{33} + e_{33}^2 + \omega)}{2(\omega^2 + c_{33} + e_{33}^2)} \right),$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + e_{33}^2}{1 - \varepsilon^2 \bar{g}^2}} \left(1 + \varepsilon^2 \frac{(\bar{\gamma}_3^2 - 2\bar{\gamma}_3 \bar{g} e_{33} - \bar{g}^2 c_{33})(c_{33} + e_{33}^2) - \bar{g}^2 \omega^2}{2(\omega^2 + c_{33} + e_{33}^2)} \right),$$

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{c_{33} + e_{33}^2}{1 - \varepsilon^2 \bar{g}^2}} \left(\varepsilon^2 \omega \frac{\bar{\gamma}_3^2 - 2\bar{\gamma}_3 \bar{g} e_{33} + \bar{g}^2 e_{33}^2}{2(\omega^2 + c_{33} + e_{33}^2)} \right), \quad v_3 = \sqrt{c_{44}}, \quad \nu_3 = 0.$$

Здесь $k_m = k_{11}/k_{33}$; $g = \varepsilon \bar{g}$; $\gamma_j = \varepsilon \bar{\gamma}_j$ ($j = 1, 3$).

Эти формулы позволяют проанализировать скорости и затухания в зависимости от связанности задачи и частоты колебаний. Заметим, что структура дисперсионных уравнений (1.6), (1.8) и свойства плоских волн во многом аналогичны случаю термоупругой трансверсально-изотропной среды, рассмотренному в [9, 10].

На рис. 1–5 для титаната бария приведены зависимости скоростей распространения и затухания модифицированных тепловых и электроупругих волн от направления распространения, характеризуемого полярным углом ψ , при различных $\omega = \omega_R$, температуре невозмущенного состояния $T_0 = 300$ К и $\varepsilon = 0,01$. Физические постоянные взяты из [11].

Несложный анализ позволяет установить следующие факты: скорости квазиэлектроупругих волн практически не зависят от частоты колебаний (одну из них назовем квазипродольной (v_2 и ν_2), а вторую — квазипоперечной (v_3 и ν_3)). Затухания этих волн существенно зависят от частоты колебаний, причем, затухание квазипродольной волны слабо зависит от направления распространения, а затухание квазипоперечной волны в значительной степени зависит от угла ψ . Отметим также, что для направлений $\psi = 0$ и

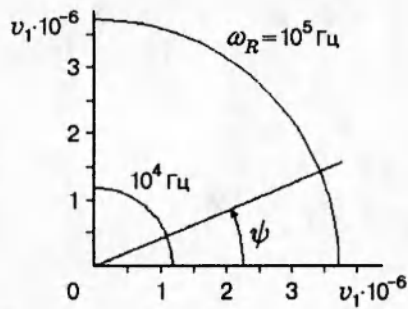


Рис. 1

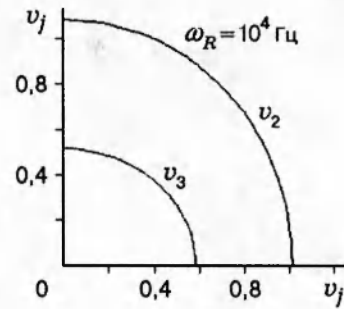


Рис. 2

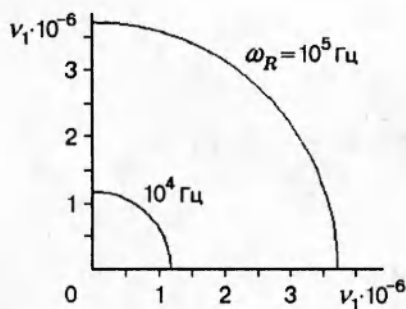


Рис. 3

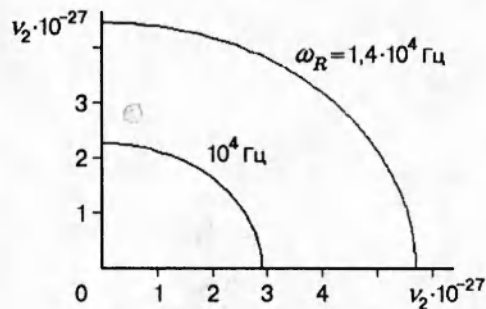


Рис. 4

$\psi = \pi/2$ квазипоперечная волна становится чисто поперечной и незатухающей. Скорость и затухание квазитепловой волны сильно зависят от частоты колебаний (как и в задачах термоупругости [7]).

2. Построение фундаментальных решений для плоской задачи термоэлектроупругости. На основе анализа нулей $D_0(\omega, \eta)$ может быть изучен вопрос о построении фундаментальных решений в линейной термоэлектроупругости, имеющий важное значение в приложениях, в частности при формулировке граничных интегральных уравнений и реализации метода граничных элементов. Ограничимся рассмотрением случая плоской деформации среды класса 6 мм. Будем считать, что $u_2 = 0$, а все остальные величины зависят только от x_1 и x_3 . Режим колебаний полагаем установившимся по закону $\exp[-i\omega t]$. В этом случае L_{ij} запишем в виде

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + c_{44}\partial_3^2 + \rho\omega^2, & L_{12} &= L_{21} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, & L_{13} &= L_{31} = (e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, \\
 L_{14} &= -\gamma_{11}\partial_1, & L_{22} &= c_{44}\partial_1^2 + c_{33}\partial_3^2 + \rho\omega^2, & L_{23} &= L_{32} = e_{15}\partial_1^2 + e_{33}\partial_3^2, & L_{24} &= -\gamma_{33}\partial_3, \\
 L_{42} &= -i\omega T_0\gamma_{33}\partial_3, & L_{33} &= -(e_{11}\partial_1^2 + e_{33}\partial_3^2), & L_{34} &= g_3\partial_3, & L_{41} &= -i\omega T_0\gamma_{11}\partial_1, \\
 L_{43} &= i\omega T_0g_3\partial_3, & L_{44} &= -i\omega\rho c_e - k_{11}\partial_1^2 - k_{33}\partial_3^2,
 \end{aligned}$$

а вектор \mathbf{U} неизвестных величин — в виде $\mathbf{U} = \{u_1, u_3, \varphi, \theta\}$.

Под фундаментальным решением будем понимать функции $\Psi_j^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$, удовлетворяющие системе уравнений $L_{ij}\Psi_j^{(m)} + \delta_{im}\delta(\mathbf{x}, \xi) = 0$ и убывающие на бесконечности. При помощи интегрального преобразования Фурье легко строятся интегральные представле-

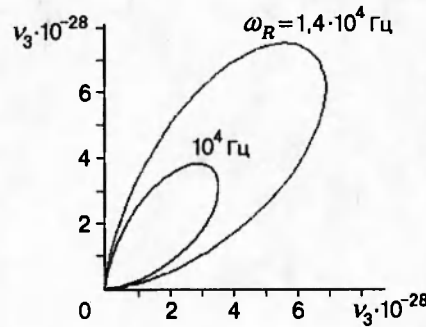


Рис. 5

ния $\Psi_j^{(m)}$:

$$\Psi_j^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R_2} \frac{P_{jm}(\alpha, \omega)}{P_0(\alpha, \omega)} \exp[i(\alpha, \xi - x)] d\alpha. \quad (2.1)$$

Здесь $P_{jm}(\alpha, \omega)$, $P_0(\alpha, \omega)$ — полиномы по α и ω ; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_3)$. Заметим, что представление (2.1) малоприспособлено для практического использования, поэтому упростим его на основе анализа подынтегральных функций и контурного интегрирования.

Отметим, что в (2.1) полиномы $P_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$ имеют различный порядок (в отличие от задачи «чистой» электроупругости [12]): часть из них имеет 6-й порядок по α , а часть — 5-й порядок. По такому признаку условно разделим эти полиномы на два типа: 1) полиномы 6-го порядка, 2) полиномы 5-го порядка. Полиномы первого типа обладают свойством четности: $P_{jm}(-\alpha_1, -\alpha_3, \omega) = P_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$, а второго — нечетности: $P_{jm}(-\alpha_1, -\alpha_3, \omega) = -P_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$. Ко второму типу относятся многочлены P_{14} , P_{24} , P_{34} и получающиеся перестановкой индексов; к первому — все остальные.

Для упрощения (2.1) для первого типа представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{P_{jm}(\alpha \cos \psi, \alpha \sin \psi, \omega)}{P_0(\alpha \cos \psi, \alpha \sin \psi, \omega)} = \sum_{k=0}^3 \frac{a_{jmk}(\psi, \omega)}{\alpha^2 - \zeta_k^2(\psi, \omega)}$$

($\zeta_0 = 0$, $a_{jmk}(\pi + \psi, \omega) = a_{jmk}(\psi, \omega)$, $\zeta_k^2(\pi + \psi, \omega) = \zeta_k^2(\psi, \omega) = \omega^2 z_k^2$) и введем $|x - \xi| = r$, $\cos \psi_1 = (\xi_1 - x_1)/r$, $\sin \psi_1 = (\xi_3 - x_3)/r$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(m)} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^3 \frac{a_{jmk}(\psi, \omega)}{\alpha^2 - \zeta_k^2(\psi, \omega)} \exp(i\alpha r \cos(\psi - \psi_1)) \alpha d\alpha d\psi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^3 \frac{a_{jmk}(\psi, \omega)}{\alpha^2 - \zeta_k^2(\psi, \omega)} [\exp(i\alpha r \cos(\psi - \psi_1)) + \exp(-i\alpha r \cos(\psi - \psi_1))] \alpha d\alpha d\psi. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_2(z, \zeta) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(i\alpha z) + \exp(-i\alpha z)}{\alpha^2 - \zeta^2} \alpha d\alpha, \quad \text{Im } \zeta > 0, \quad \text{Re } \zeta > 0,$$

для вычисления которого введем контуры

$$C_{\Gamma}^+ = [0, R] \cup C_R^+ \cup [iR, 0] \quad \text{и} \quad C_{\Gamma}^- = [0, R] \cup C_R^- \cup [-iR, 0]$$

(C_R^+ , C_R^- — части окружности радиуса R с центром в начале координат, лежащие соответственно в первом и четвертом квадрантах).

Используя контурное интегрирование и лемму Жордана [13], находим

$$I_2(z, \zeta) = \pi i \exp(i\zeta z) + 2 \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau z)}{\tau^2 + \zeta^2} \tau d\tau.$$

Последний интеграл запишем в виде

$$I_2(z, \zeta) = \pi i \exp(i\zeta z) - 2[\text{ci}(\zeta z) \cos(\zeta z) + \text{si}(\zeta z) \sin(\zeta z)],$$

где $\text{ci}(x)$ и $\text{si}(x)$ — интегральные косинус и синус.

Аналогично вычисляется $I_2(z, \zeta)$ при $z < 0$. Объединяя эти два случая, имеем следующее представление для фундаментальных решений:

$$\Psi_j^{(m)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \sum_{k=0}^3 a_{jmk}(\psi, \omega) F_2(\zeta_k(\psi, \omega) |r \cos(\psi - \psi_1)|) d\psi \quad (2.2)$$

($F_2(z) = (\pi i/2) \exp(iz) - \text{ci}(z) \cos(z) - \text{si}(z) \sin(z)$).

Замечания. 1. Под $F_2(\zeta_0)$ надо понимать предельное значение функции $F_2(z)$ при $z \rightarrow 0$ с точностью до несущественных с точки зрения построения фундаментального решения констант, т. е. $F_2(\zeta_0 r | \cos(\psi - \psi_1)|) = -\ln |r \cos(\psi - \psi_1)|$.

2. В силу того, что из полиномов 6-го порядка только $P_{33}(0, \psi, \omega) \neq 0$, а для остальных справедливо соотношение $P_{jm}(\alpha, \psi, \omega) = \alpha^2 P_{jm}^*(\alpha, \psi, \omega)$ ($P_{jm}^*(\alpha, \psi, \omega)$ — полиномы 4-го порядка), все $a_{jm0} = 0$, кроме a_{330} , и представление (2.2) можно записать как

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(m)} = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi a_{330}(\psi, \omega) \ln |r \cos(\psi - \psi_1)| d\psi (\delta_{3j} \delta_{3m}) + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \sum_{k=1}^3 a_{jmk}(\psi, \omega) F_2(\zeta_k(\psi, \omega) |r \cos(\psi - \psi_1)|) d\psi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Упростим представление (2.1) для полиномов второго типа. Учтем, что для полиномов второго типа справедливо представление $P_{jm}(\alpha, \psi, \omega) = -i\alpha P_{jm}^*(\alpha, \psi, \omega)$, где $P_{jm}^*(\alpha, \psi, \omega)$ — полиномы 4-го порядка. В этом случае

$$\frac{P_{jm}(\alpha \cos \psi, \alpha \sin \psi, \omega)}{P_0(\alpha \cos \psi, \alpha \sin \psi, \omega)} = -i\alpha^{-1} \sum_{k=1}^3 \frac{b_{jmk}(\psi, \omega)}{\alpha^2 - \zeta_k^2(\psi, \omega)}$$

($b_{jmk}(\pi + \psi, \omega) = -b_{jmk}(\psi, \omega)$).

Проводя аналогичные рассуждения и вводя функцию

$F_1(z) = (\pi/2) \exp(iz) - (\text{ci}(z) \sin(z) - \text{si}(z) \cos(z))$, $z > 0$, окончательно находим

$$\Psi_j^{(m)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \sum_{k=1}^3 \frac{b_{jmk}(\psi, \omega)}{\zeta_k(\psi, \omega)} \Gamma_1(\zeta_k(\psi, \omega) |r \cos(\psi - \psi_1)|) \text{sgn}(\cos(\psi - \psi_1)) d\psi \quad (2.4)$$

($j = 4; m = 1, 2, 3; m = 4; j = 1, 2, 3$).

Интегральные представления (2.3) и (2.4) позволяют эффективно использовать метод граничных элементов применительно к задачам термоэлектроупругости. Они имеют характерные логарифмические особенности, присущие плоским задачам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01259).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Problems of continuum mechanics / Ed. J. Radok. Philadelphia: SIAM, 1961. P. 282–290.
2. Dokteci M. C. Vibrations of piezoelectric crystals // Int. J. Eng. Sci. 1980. V. 18, N 3. P. 431–448.
3. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
4. Paul H. S., Renganathan K. Free vibration of a pyroelectric layer of hexagonal (6 mm) class // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78, N 2. P. 395–397.
5. Paul H. S., Raman G. V. Wave propagation in a hollow pyroelectric circular cylinder of crystal class 6 // Acta Mech. 1991. V. 87, N 1/2. P. 37–46.
6. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1, ч. А. С. 204–326.
7. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
8. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вища шк., 1989.
9. Chadwick P., Seet L. T. C. Wave propagation in a transversely isotropic heat-conducting elastic material // Mathematika. 1970. V. 17. P. 255–274.
10. Chandrasekharaiah D. S., Keshavan H. R. Thermoelastic plane waves in a transversely isotropic body // Acta Mech. 1991. V. 87, N 1/2. P. 11–22.
11. Кременчугский Л. С., Ройцина О. В. Пироэлектрические приемные устройства. Киев: Наук. думка, 1982.
12. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 1037–1041.
13. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

Поступила в редакцию 25/VII 1995 г.
