УДК 539.3
DOI: 10.15372/PMTF202215189

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КРАЕВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Н. С. Астапов, В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mails: nika@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

С помощью подхода Нейбера — Новожилова и уточненной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла с ненулевой шириной зоны предразрушения исследуется прочность прямоугольной пластины с двумя краевыми трещинами при нормальном отрыве. Используется сдвоенный дискретно-интегральный критерий прочности, так как в поле напряжений в окрестности вершины трещины имеется особенность. В вершине реальной трещины выполняется критерий разрушения для предельной деформации, а в вершине модельной трещины — критерий для нормальных напряжений. Проанализированы определяющие уравнения аналитической модели. Найдены простые формулы для разрушающей нагрузки при квазихрупком и квазивязком разрушении. Для плоского напряженного состояния построены кривые разрушения пластины.

Ключевые слова: квазихрупкое и квазивязкое разрушение, критерий разрушения, зона предразрушения, средний диаметр зерна структурированного материала, упругопластический материал, предельная деформация

Введение. Надежность и безопасность эксплуатации механических конструкций (машин, летательных аппаратов и др.) существенно зависят от прочности узлов и деталей, поэтому актуальным является исследование процесса зарождения и развития трещин, приводящих к разрушению. В [1] в результате трудоемкой математической обработки данных натурных испытаний сформулированы рекомендации для прогнозирования срока безопасной эксплуатации лопастей винтов вертолета. В частности, установлено, что время, в течение которого происходит быстрый рост трещины, составляет 5–10 % всего времени ее подрастания до момента окончательного разрушения изделия. Актуальна также разработка простых, удобных для проведения поверочных расчетов математических моделей разрушения материалов и конструкций [2–5]. В работе [2] обсуждаются недостатки и преимущества локальных однопараметрических критериев разрушения хрупких и квазихрупких материалов. Показано, что сдвоенные критерии разрушения позволяют учесть все преимущества однопараметрических критериев разрушения, соответствующих различным предельным состояниям материала [2–4]. В модели, предлагаемой в работе [5], отсутствуют параметры, описывающие структуру и поперечник зоны предразрушения. Однако наличие периодической структуры в материале оказывает значительное влияние на раскрытие трещин, поскольку трещины часто проходят между зерен. В [2] показано, что критерии разрушения, учитывающие средний диаметр зерна структурированного материала, более эффективны по сравнению с традиционными критериями.

© Астапов Н. С., Кургузов В. Д., 2023

В данной работе уточняются результаты работ [6–8], посвященных изучению процесса подрастания трещины. Для структурированных материалов разработана уточненная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла с прямоугольной зоной предразрушения. Получены универсальные формулы для поверочных расчетов разрушающей нагрузки, а также описан способ построения кривых разрушения узлов и деталей из материалов, обладающих структурой. В предлагаемой модели используется неклассическая схема разрушения материала, согласно которой помимо сплошного и разрушенного состояний рассматривается промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Построенная модель позволяет оценить критическое состояние изделия с трещинами при условиях нагружения более сложных, чем однопараметрические критерии механики разрушения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину шириной w, высотой H с двумя краевыми трещинами длиной l_0 (рис. 1). На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞, поверхность трещины свободна от нагрузок, реализуется первая мода разрушения. Размеры пластины соответствуют размерам, рекомендованным в [9, 10]. Предполагается, что средний диаметр зерна в материале образца равен d [6].

В аналитической модели используется простейшая аппроксимация реальной (σ–ε)-диаграммы исследуемого материала кусочно-линейной ломаной, соответствующей идеально упругопластическому материалу. На рис. 2 показаны исходная (σ–ε)-диаграмма (кривая *1*) и ее аппроксимация ломаной (кривая *2*). Параметры приближенной диаграммы находятся из условия совпадения площадей под кривой *1* и ломаной *2*. Ломаная *2* строится по трем константам материала: модулю Юнга E, пределу текучести при одноосном растяжении σ_Y, предельной деформации ε_1. Максимальная упругая деформация ε_0 находится из закона Гука $\sigma_Y = E\varepsilon_0$. На рис. 3 показана взаимосвязь точек *1–4* на (σ–ε)-диаграмме и точек *1′–4′* в зоне предразрушения.

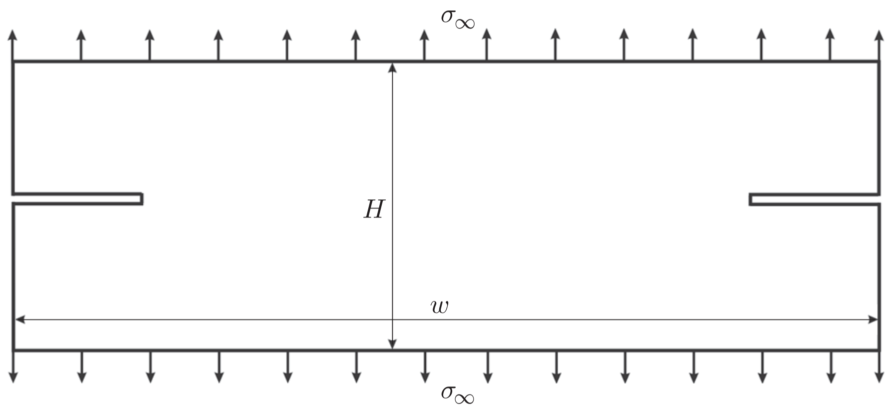

Рис. 1. Схема нагружения пластины

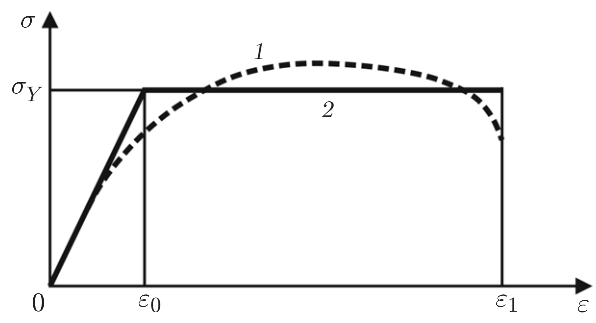

Рис. 2. Исходная (σ–ε)-диаграмма материала (*1*) и ее аппроксимация (*2*)

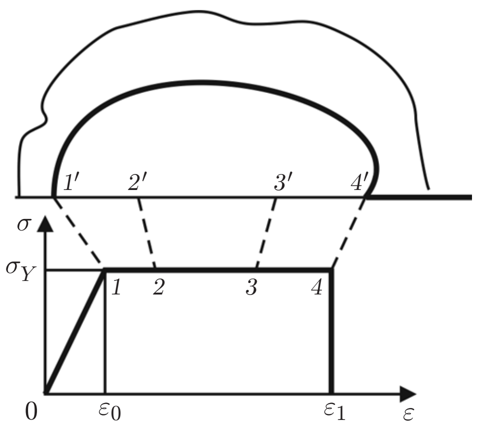

Рис. 3. Взаимосвязь точек *1–4* на $(\sigma-\varepsilon)$-диаграмме и точек *1′–4′* в зоне предразрушения

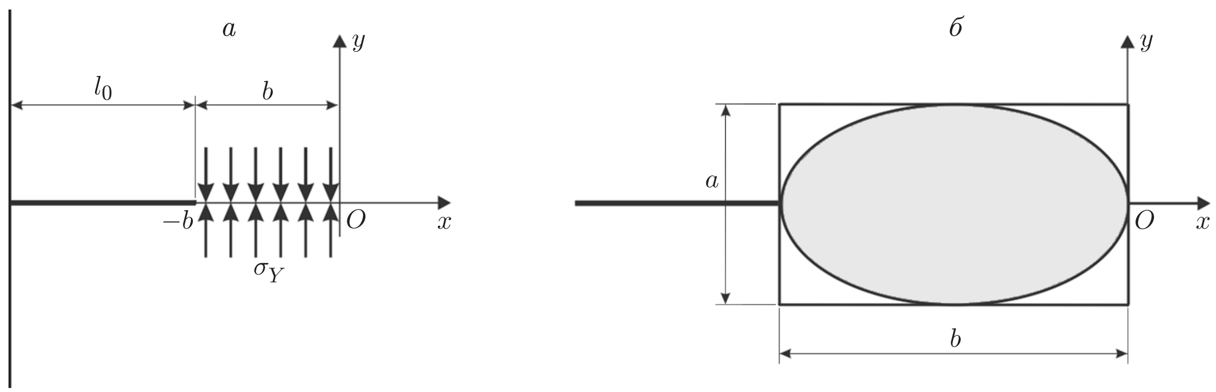

Рис. 4. Уточненная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла:
а — нормальные напряжения, действующие на продолжении модельной трещины; *б* — аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения

2. Уточненная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла. В аналитической модели реальную трещину длиной l_0 заменим модельной прямолинейной трещиной длиной $l = l_0 + b$ (рис. 4). Критическая длина зоны предразрушения b_c при однократном нагружении определяется однозначно ($l_c = l_0 + b_c$ — критическая длина макротрещины). На рис. 4 показаны нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$ в зоне предразрушения и аппроксимация пластической зоны (заштрихованная область) прямоугольной зоной предразрушения при плоском напряженном состоянии [6, 7]. Напомним, что в классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла поперечник пластической зоны равен $a = 0$ [11].

3. Сдвоенный критерий разрушения. В сдвоенном критерии разрушения пластины используется интегральный критерий Нейбера — Новожилова [7]

$$\frac{1}{d}\int\limits_0^d \sigma_y(x,0)\,dx = \sigma_Y, \qquad x \geqslant 0; \tag{1}$$

$$v(-b_c) = \delta_c, \qquad x < 0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_y(x,0)$ — нормальные напряжения на продолжении модельной трещины в прямоугольной системе координат Oxy (см. рис. 4,*а*); $v(x) = 2v(x,0)$ $(x < 0)$ — величина раскрытия модельной трещины; δ_c — критическая величина раскрытия модельной трещины; b_c — критическая длина зоны предразрушения. Равенство (1) выполняется в том случае (необходимый критерий), если осредненные напряжения на продолжении модельной трещины достигают предела текучести, а равенство (2) выполняется, если величина раскрытия модельной трещины становится критической. В дальнейшем критические величины, определенные по достаточному критерию, когда выполняются оба равенства (1) и (2), что приводит к разрушению пластины, и необходимому критерию разрушения, отмечены индексами c и 0 соответственно.

4. Построение кривых квазихрупкого и квазивязкого разрушения. Поле нормальных напряжений $\sigma_y(x)$ представим в виде суммы [12]

$$\sigma_y(x) = \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}, \qquad x > 0, \tag{3}$$

где $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$ — номинальные напряжения; σ_s, σ_f — номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (в рассматриваемом случае симметричного расположения трещин $\sigma_f = 0$); $K_{\rm I} = K_{{\rm I}\sigma} + K_{{\rm I}b} > 0$ — суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН); $K_{{\rm I}\sigma} > 0$ — КИН, обусловленный приложенными к пластине напряжениями σ_∞; $K_{{\rm I}b} < 0$ — КИН, обусловленный напряжениями σ_Y, действующими в зоне предразрушения. В классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла на суммарный КИН накладывается ограничение $K_{\rm I} = 0$: трещина имеет своеобразную вершину, в которой ее берега плавно смыкаются с касательной, проходящей под нулевым углом к оси Ox, а точка $x = -b$ является точкой перегиба, в которой профиль трещины имеет вертикальную касательную. Ниже рассматривается ограничение $K_{\rm I} > 0$, в этом случае целесообразно использовать подход Нейбера — Новожилова [7]. Ограничение $K_{\rm I} = 0$ имеет смысл использовать только в случае развитой пластичности.

Выражение для коэффициента $K_{{\rm I}\sigma}$ при заданных условиях испытаний пластины запишем в виде [13. С. 163]

$$K_{{\rm I}\sigma} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}\, Y_s(\xi), \tag{4}$$

где $Y_s(\xi) = 1{,}12 + 0{,}203\xi - 1{,}197\xi^2 + 1{,}930\xi^3$; $\xi = 2l/w$. КИН $K_{{\rm I}b}$ определяется следующим образом [13. С. 114]:

$$K_{{\rm I}b} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l}\, \frac{2}{\pi} \arccos\Big(1 - \frac{b}{l}\Big). \tag{5}$$

Вычисляя интеграл в (1) с учетом (3), находим

$$\frac{1}{d}\int\limits_0^d \sigma_y(x,0)\,dx = K_{\rm I}\sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s. \tag{6}$$

В приближении сопротивления материалов номинальное напряжение σ_s представим в виде

$$\sigma_s = \frac{\sigma_\infty}{1 - 2l/w}. \tag{7}$$

Тогда с учетом (6), (7) критерий (1) можно записать следующим образом:

$$K_{\rm I}\sqrt{2/(\pi d)} + Y_r\sigma_c = \sigma_Y; \tag{8}$$

$$Y_r = w/(w - 2l_c) \tag{9}$$

(σ_c — критическое напряжение; l_c — критическая длина трещины).

Преобразуем (8), используя для КИН $K_{\rm I} = K_{{\rm I}\sigma} + K_{{\rm I}b}$ соотношения (4), (5):

$$\sqrt{\pi l_c}\,\Big(Y_s\bar\sigma_c - \frac{2}{\pi}\arccos\,(1-\bar b_c)\Big)\sqrt{\frac{2}{\pi d}} = 1 - Y_r\bar\sigma_c. \qquad (10)$$

Здесь $\bar\sigma_c = \sigma_c/\sigma_Y$ — безразмерное критическое напряжение; $\bar b_c = b_c/l_c$ — безразмерная критическая длина зоны предразрушения.

Величину раскрытия трещины $2v(x)$ в уравнении (2) представим в виде [11]

$$v(x) = \frac{\varkappa+1}{2G}\,K_{\rm I}\sqrt{\frac{-2x}{\pi}}\,, \qquad x \leqslant 0, \qquad (11)$$

где $G = E/(2(1+\nu)) = \sigma_Y/(2\varepsilon_0(1+\nu))$ — модуль сдвига; $\varkappa = 3-4\nu$ в случае плоской деформации, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ в случае плоского напряженного состояния. Критическую величину раскрытия δ_c в соотношении (2) вычислим по формуле

$$\delta_c = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a, \qquad (12)$$

где m — поправочный коэффициент, определяемый в численном или лабораторном эксперименте [8]. Для поперечника a зоны предразрушения в (12) запишем выражение [14. С. 290]

$$a = \frac{9(1-\nu)}{2\sqrt{2}(2+\pi)}\Big(\frac{K_{{\rm I}\sigma}}{\sigma_Y}\Big)^2 = q(\nu)\Big(\frac{K_{{\rm I}\sigma}}{\sigma_Y}\Big)^2 \qquad (13)$$

для случая плоской деформации. При плоском напряженном состоянии $q = \pi/4$ [14. С. 282]. Физический смысл величины a в (13) — ширина пластической зоны в окрестности вершины трещины. Чем больше нагрузка, тем больше размеры пластической зоны. Подставляя выражения (11)–(13) в уравнение (2), получаем уравнение

$$\frac{\varkappa+1}{2G}\,K_{\rm Ic}\sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = m(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q\Big(\frac{K_{{\rm I}\sigma}}{\sigma_Y}\Big)^2. \qquad (14)$$

Учитывая выражение $G = \sigma_Y/(2\varepsilon_0(1+\nu))$ и используя для коэффициента $K_{\rm I} = K_{{\rm I}\sigma} + K_{{\rm I}b}$ соотношения (4), (5), запишем уравнение (14) в виде

$$\sqrt{\pi l_c}\,\Big(Y_s\bar\sigma_c - \frac{2}{\pi}\,\arccos\,(1-\bar b_c)\Big)\sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = \frac{mq\bar\varepsilon_{\rm I}}{(\varkappa+1)(1+\nu)}\,(\sqrt{\pi l_c}Y_s\bar\sigma_c)^2, \qquad (15)$$

где $\bar\varepsilon_{\rm I} = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)/\varepsilon_0$ — отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой (запас пластичности). Окончательно система уравнений (1), (2) принимает вид

$$[Y_s\bar\sigma_c - (2/\pi)\arccos\,(1-\bar b_c)] = (1-Y_r\bar\sigma_c)\,\sqrt{d/(2l_c)}\,; \qquad (16)$$

$$[Y_s\bar\sigma_c - (2/\pi)\arccos\,(1-\bar b_c)]\sqrt{\bar b_c} = \pi mp\bar\varepsilon_{\rm I}(Y_s\bar\sigma_c)^2/(2\sqrt{2}), \qquad (17)$$

где $p = 2q/[(\varkappa+1)(1+\nu)]$. В частности, в случае плоской деформации $p = q/[2(1-\nu^2)] = 9/[4\sqrt{2}\,(2+\pi)(1+\nu)]$, при плоском напряженном состоянии $p = q/2 = \pi/8$. Таким образом, получена система двух уравнений (16), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{\bar b_c}$ и $\bar\sigma_c$. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (16), (17), находим точное выражение для $\bar b_c$

$$\sqrt{\bar b_c} = \frac{\pi mp\bar\varepsilon_{\rm I}(Y_s\bar\sigma_c)^2}{2(1-Y_r\bar\sigma_c)}\,\sqrt{\bar l_c}\,, \qquad (18)$$

где $\bar{l}_c = l_c/d$ — безразмерная критическая длина трещины. Используя приближение $\arccos(1 - \bar{b}_c) \approx \sqrt{2\bar{b}_c}$, погрешность которого при $0 \leqslant \bar{b}_c \leqslant 0{,}55$ составляет менее 5 %, систему уравнений (16), (17) представим в виде

$$Y_s\bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi}\sqrt{2\bar{b}_c} = \frac{1 - Y_r\bar{\sigma}_c}{\sqrt{2\bar{l}_c}}; \qquad (19)$$

$$\Big(Y_s\bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi}\sqrt{2\bar{b}_c}\Big)\sqrt{\bar{b}_c} = \frac{\pi m p\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2}}\,(Y_s\bar{\sigma}_c)^2. \qquad (20)$$

Заменяя в уравнении (19) величину $\sqrt{\bar{b}_c}$ на выражение (18), получаем квадратное относительно $\bar{\sigma}_c$ уравнение

$$(Y_r^2 + hY_s^2 + \sqrt{2\bar{l}_c}\,Y_sY_r)\bar{\sigma}_c^2 - (2Y_r + \sqrt{2\bar{l}_c}\,Y_s)\bar{\sigma}_c + 1 = 0,$$

где $h = 2\bar{l}_c m p\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}$. Отсюда находим два корня для критического напряжения $\bar{\sigma}_c$

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = [Y_r + Y_s\sqrt{\bar{l}_c/2}\,(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}}\,)]^{-1}. \qquad (21)$$

Величина напряжения $\bar{\sigma}_{c+}$ со знаком "+" перед корнем соответствует квазихрупкому разрушению ($\bar{b}_c \ll 1$), величина $\bar{\sigma}_{c-}$ со знаком "−" перед корнем — квазивязкому ($\bar{b}_c < 1$) [8]. Формула (21) имеет смысл, если $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} \leqslant 1/(4mp)$.

Заметим, что меньший корень для величины $\bar{\sigma}_c$ можно получить из системы уравнений (19), (20) более простым способом [6, 7]. Учитывая неравенство $\bar{b}_c \ll 1$, запишем уравнение (20), отбросив член с $\bar{b}_c$, в виде $Y_s\bar{\sigma}_c\sqrt{\bar{b}_c} = \pi mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(Y_s\bar{\sigma}_c)^2/(2\sqrt{2})$ или $\sqrt{\bar{b}_c} = \pi mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}Y_s\bar{\sigma}_c/(2\sqrt{2})$. Подставляя это выражение в уравнение (19), для критического напряжения $\bar{\sigma}_c$ получаем выражение $\bar{\sigma}_{ck} = [Y_r + Y_s\sqrt{2\bar{l}_c}\,(1 - mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}})]^{-1}$. Следует отметить, что это выражение следует также из формулы (21). Действительно, если использовать приближение $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, то выражение (21) для $\bar{\sigma}_{c+}$ можно упростить без существенной потери точности и получить выражение для $\bar{\sigma}_{ck}$:

$$\bar{\sigma}_{c+} = [Y_r + Y_s\sqrt{\bar{l}_c/2}\,(1 + \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}}\,)]^{-1} \approx [Y_r + Y_s\sqrt{\bar{l}_c/2}\,(1 + 1 - 2mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}})]^{-1} =$$
$$= [Y_r + Y_s\sqrt{2\bar{l}_c}\,(1 - mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}})]^{-1} = \bar{\sigma}_{ck}.$$

Расчеты показывают, что при квазихрупком разрушении вместо формулы (21) можно использовать более простую формулу для напряжения $\bar{\sigma}_{ck}$. В качестве примера рассмотрена прямоугольная пластина при плоском напряженном состоянии с геометрическими и механическими характеристиками $w = 100$ мм, $l_0 = 6$ мм, $d = 0{,}02$ мм, $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} = 3$, $p = \pi/8$, модуль Юнга материала пластины равен $E = 200$ ГПа, предел текучести $\sigma_Y = 400$ МПа. Значение поправочного коэффициента $m = 0{,}15$ выбрано на основе оценки реальной формы зоны пластического деформирования, полученной методом конечных элементов [15]. В результате вычислений при квазихрупком разрушении получены следующие значения критической нагрузки: $\bar{\sigma}_{ck} = 0{,}0418$, $\bar{\sigma}_{c+} = 0{,}044\,488$. Для упрощения вычислений значений этих величин длина зоны предразрушения не учитывалась, т. е. вместо $\bar{l}_c = (l_0 + b_c)/d$ полагалось $\bar{l}_c = l_0/d$. Решением точной системы уравнений (16), (17) является $\bar{\sigma}_c = 0{,}044\,485$, причем в этом случае $\bar{b}_c \approx 0{,}001$. При квазивязком разрушении при тех же параметрах имеем решение $\bar{\sigma}_{c-} = 0{,}1336$, полученное по формуле (21) с $\bar{l}_c = l_0/d$, и решение $\bar{\sigma}_c = 0{,}1324$ точной системы (16), (17). Заметим, что при квазивязком разрушении $\bar{b}_c \approx 0{,}1$, т. е. длина зоны предразрушения в 100 раз больше, чем при квазихрупком разрушении, но ограничение $\bar{b}_c < 1$ в этом случае также выполняется. Таким образом, результат вычисления критической нагрузки по простой формуле (21) с $\bar{l}_c = l_0/d$ практически совпадает с решением точной системы двух нелинейных уравнений (16), (17).

Для случая плоского напряженного состояния проведем сравнение значений критических нагрузок, вычисленных по приближенной формуле (21), со значениями нагрузки λ, вычисленными по формуле $\lambda = \arccos(\exp(-\pi\delta_c E/(8l_0\sigma_Y)))$ в классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [11. С. 65]. При квазихрупком разрушении с использованием формулы (21) получаем $\bar{\sigma}_{c+} = 0{,}045\,16$. Заметим, что в классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла рассматривается центральная трещина в бесконечной плоскости (трещина Гриффитса), а в уточненной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла (18)–(21) — пластина с двумя краевыми трещинами. Для корректного сравнения классической и уточненной моделей будем полагать, что ширина пластины стремится к бесконечности, в этом случае значения геометрических параметров равны $Y_r = 1$, $Y_s = 1{,}12$. По формуле (12) находим критическую величину раскрытия модельной трещины $\delta_c = 3{,}409 \cdot 10^{-5}$.

В классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла критическая величина раскрытия трещины δ_c является константой материала, а в уточненной модели δ_c — переменная величина, возрастающая с увеличением поперечника зоны пластического деформирования, который в свою очередь зависит от нагрузки. Характеристикой материала является запас пластичности $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$. С увеличением нагрузки увеличивается как правая, так и левая часть уравнения (14), которое представляет собой критериальное соотношение: при докритическом нагружении левая часть (14) меньше правой, равенство достигается только при критических значениях, когда в соответствии с критерием (2) величина раскрытия в вершине реальной трещины (левая часть (14)) становится равной критической величине раскрытия (правая часть (14)). Полученная система уравнений (18), (21) является нелинейной, ее решение определяется любым итерационным методом. В результате решения все критические величины модели находятся однозначно.

В соответствии с классической моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла значение нагрузки равно $\lambda = 0{,}030\,06$ [11. С. 65]. Вычисляя критическую величину раскрытия трещины δ_c по формуле $\delta_c = K_{\mathrm{I}\sigma}^2/(E\sigma_Y)$ [16. С. 69], где $K_{\mathrm{I}\sigma}$ определяется по формуле (4), получаем $\delta_c = 9{,}644 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 0{,}050\,55$. Соответственно, в случае квазивязкого разрушения имеем $\bar{\sigma}_{c-} = 0{,}1372$, $\delta_c = 4{,}042\,16 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 0{,}091\,957\,6$ [11], $\delta_c = 9{,}051\,49 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 0{,}154\,187$ [16]. Таким образом, результаты расчетов с использованием сравниваемых моделей хорошо согласуются. В работе [8] подтверждена хорошая согласованность значений длины зоны предразрушения, определенной по этим моделям.

Из приближенного уравнения (19) получаем выражение для $\sqrt{\bar{b}_c}$

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi((Y_r + Y_s\sqrt{2\bar{l}_c}\,)\bar{\sigma}_c - 1)/(4\sqrt{\bar{l}_c}\,). \tag{22}$$

Равенство (22) является следствием уравнения (1), поэтому выполняется при любых (не только критических) нагрузках, при которых возникает зона пластического деформирования. Из уравнения (20) получаем еще два соотношения для критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\bar{b}_{c\pm}} = \pi m p \bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} Y_s \bar{\sigma}_c/(\sqrt{2}\,(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}}\,)). \tag{23}$$

В (23) квазихрупкому типу разрушения соответствует величина $\sqrt{\bar{b}_{c+}}$ со знаком "+" перед корнем, квазивязкому — $\sqrt{\bar{b}_{c-}}$ со знаком "−" перед корнем. При $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}} \to 0$ из равенства (21) находим критическую нагрузку для случая хрупкого разрушения:

$$\bar{\sigma}_{c0} = (Y_r + Y_s\sqrt{2l_0/d}\,)^{-1}. \tag{24}$$

Проанализируем выражение (21) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r вычисляются по формулам (5) и (9), характеризуют геометрию пластины и полностью определяются

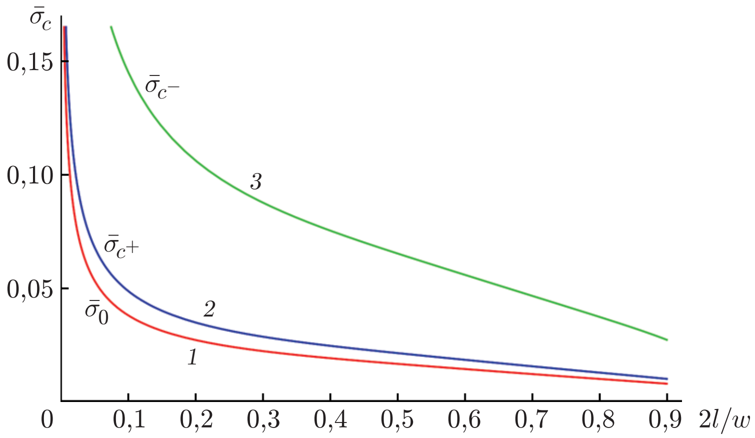

Рис. 5. Кривые разрушения:
1 — необходимый критерий, *2* — достаточный критерий при квазихрупком разрушении, *3* — достаточный критерий при квазивязком разрушении

шириной пластины w и длиной трещины l. Параметр $\bar\varepsilon_{\mathrm{I}}$ вычисляется с использованием $(\sigma{-}\varepsilon)$-диаграммы материала пластины, параметр p определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от параметров d и m. При любой длине трещины выполняется неравенство $\bar\sigma_{c0} \leqslant \bar\sigma_{c+} \leqslant \bar\sigma_{c-} \leqslant 1$, причем равенство $\bar\sigma_{c+} = \bar\sigma_{c-}$ выполняется лишь в том случае, если подкоренное выражение в (21) равно нулю, т. е. $4mp\bar\varepsilon_{\mathrm{I}} = 1$. Равенство $\bar\sigma_{c0} = \bar\sigma_{c+} = \bar\sigma_{c-} = 1$ выполняется только для трещины нулевой длины.

При увеличении параметра d возрастают величины $\bar\sigma_{c+}$ (квазихрупкое разрушение) и $\bar\sigma_{c-}$ (квазивязкое разрушение). Установлено, что при любом $d = d_+ > 0$ можно найти величину $d = d_-$, такую что для трещины любой длины критические нагрузки $\bar\sigma_{c+}$ и $\bar\sigma_{c-}$ совпадут: $\bar\sigma_{c+}(d_+) \equiv \bar\sigma_{c-}(d_-)$. В этом случае величины d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_- = ((1 - \sqrt{1-t}\,)^2/t)^2 d_+, \qquad t = 4mp\bar\varepsilon_{\mathrm{I}}. \tag{25}$$

Наибольшее значение множителя $((1 - \sqrt{1-t}\,)^2/t)^2$ равно единице и достигается при $t = 1$. Тогда выполняются равенства $d = d_- = d_+$ и $\bar\sigma_{c+}(d_+) = \bar\sigma_{c-}(d_-) = (Y_r{+}Y_s\sqrt{2l/d}\,/2)^{-1}$ (см. (21)). При увеличении параметра m параметр $\bar\sigma_{c+}$ возрастает (квазихрупкое разрушение), а $\bar\sigma_{c-}$ убывает. Для двух одинаковых пластин равенство $\bar\sigma_{c+} = \bar\sigma_{c-}$ выполняется тождественно, если $m = 1/(4p\bar\varepsilon_{\mathrm{I}})$.

Параметры d, m, ε_0, ε_1 предлагаемой модели подбираются по результатам численного моделирования или лабораторного эксперимента. Так, параметр осреднения d можно определить по формуле $d = 2(K_{\mathrm{I}c}/\sigma_t)^2/\pi$, где $K_{\mathrm{I}c}$ — критический КИН; σ_t — предел прочности материала на растяжение [6, 17].

Используя формулы (24), (21), построим в квадранте длина трещины $\bar l$ — напряжение $\bar\sigma_c$ (рис. 5) кривые разрушения $\bar\sigma_0 = \bar\sigma_0(2\bar l_0)$ и $\bar\sigma_{c\pm} = \bar\sigma_{c\pm}(2\bar l_c)$ при следующих значениях параметров: $w = 100$ мм, $d = 0{,}02$ мм, $\bar\varepsilon_{\mathrm{I}} = 3$, $m = 0{,}15$, $p = \pi/8$ (плоское напряженное состояние). На рис. 5 длина трещины $2l$ отнесена к ширине пластины w. Заметим, что аналогично строятся кривые разрушения при плоской деформации. Кривые *1, 2* в случае квазихрупкого разрушения (кривые *1, 3* в случае квазивязкого разрушения) делят квадрант на три области. В области ниже кривой *1* длина исходной трещины не меняется (трещина устойчива). В области между кривыми *1* и *2* (или между кривыми *1* и *3*) длина трещины увеличивается на величину, равную длине зоны предразрушения, при этом трещина остается устойчивой. В области выше кривой *2* (или кривой *3*) длина трещины увеличивается катастрофически (трещина неустойчива) и пластина разрушается [6–8].

Заключение. С помощью уточненной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла описано продвижение трещины нормального отрыва в упругопластических материалах, имеющих предельную деформацию. В определяющих уравнениях математической модели дано представление универсальных полей номинальных напряжений, что позволяет использовать эти уравнения для исследования прочности при поперечном и продольном сдвигах.

В результате ряда упрощений решена исходная нелинейная система определяющих уравнений и получена унифицированная формула (21) для нагрузки, при которой происходит разрушение. Эта формула единообразно учитывает вид нагружения, номинальные напряжения при изгибе и растяжении, положение трещины, тип разрушения (хрупкое, квазихрупкое, квазивязкое), механические характеристики материала. Подробный анализ выражения (21) для критической нагрузки показал, что для двух пластин, различающихся лишь средним диаметром зерна структурированного материала (см. (25)), критические нагрузки при квазихрупком и квазивязком разрушении совпадают во всем диапазоне длин трещины.

На примере пластины с двумя краевыми трещинами разработан алгоритм построения кривых квазихрупкого и квазивязкого разрушения, которые делят квадрант длина трещины — напряжение на три области, соответствующие отсутствию разрушения, накоплению повреждений в зоне предразрушения при монотонном нагружении и разрушению пластины. Критическая нагрузка $\bar{\sigma}_{c0}$ в случае хрупкого разрушения описывается формулой (24), критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ в случае квазихрупкого разрушения и $\bar{\sigma}_{c-}$ в случае квазивязкого — формулой (21). Критерий $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкое разрушение) дает более оптимистичный прогноз прочности образца с трещиной, чем критерий $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкое разрушение); в то же время меньшая критическая нагрузка, определяемая критерием $\bar{\sigma}_{c+}$, увеличивает запас прочности образца. Полученные простые формулы (21), (24) могут быть использованы в расчетах прочности деталей и узлов механизмов и машин.

При выборе критерия разрушения для оценки прочности конструкции необходимо использовать разумное сочетание инженерной интуиции, экспериментальных данных о свойствах материала и результатов компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния проектируемого изделия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бохоева Л. А., Курохтин В. Ю., Перевалов А. В. и др.** Испытания элементов конструкций и узлов вертолета на усталостную прочность // Вестн. Моск. авиац. ин-та. 2017. Т. 24, № 1. С. 7–16.
2. **Сукнев С. В.** Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // Физ. мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32.
3. **Баженов В. Г., Осетров С. Л., Осетров Д. Л., Рябов А. А.** Связанная модель разрушения упругопластических материалов на основе кинетического уравнения накопления повреждений и критерия прочности Писаренко — Лебедева // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 1. С. 122–129.
4. **Wang Y., Wang G., Tu S., Xuan F.** Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction // Fatigue Fracture Engng Materials Structures. 2020. V. 43, iss. 12. P. 2998–3011.
5. **Богачева В. Э., Глаголев В. В., Глаголев Л. В. и др.** Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 2. С. 63–77.
6. **Корнев В. М.** Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // Физ. мезомеханика. 2013. Т. 16, № 5. С. 25–34.

7. **Кургузов В. Д., Корнев В. М.** Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 179–194.
8. **Кургузов В. Д., Астапов Н. С., Астапов И. С.** Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 173–185.
9. **Ковчик С. Е.** Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения / С. Е. Ковчик, Е. М. Морозов. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т.; Т. 3).
10. **Справочник** по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1.
11. **Матвиенко Ю. Г.** Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит, 2006.
12. **Gross D.** Fracture mechanics / D. Gross, T. Seelig. Berlin: Springer, 2006.
13. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 2).
14. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушений. М.: Мир, 1975. С. 204–335. (Разрушение; Т. 2).
15. **Кургузов В. Д., Астапов Н. С.** Моделирование процесса разрушения сварных соединений // Вычисл. механика сплош. сред. 2016. Т. 9, № 3. С. 264–278.
16. **Керштейн И. М.** Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Клюшников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989.
17. **Пестриков В. М.** Механика разрушения / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. СПб.: Профессия, 2012.

Поступила в редакцию 23/VIII 2022 г.,
после доработки — 16/XI 2022 г.
Принята к публикации 28/XI 2022 г.