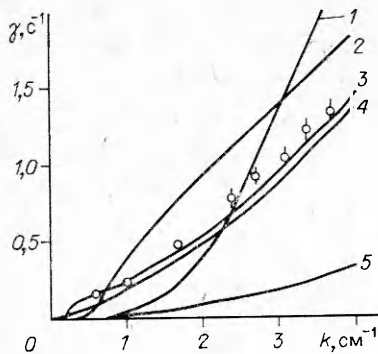


Р и с. 3



Р и с. 4

Авторы благодарны В. С. Львову и А. А. Предтеченскому за стимулирующие и полезные обсуждения работы на всех ее этапах, а также Д. А. Шапиро за многочисленные ценные консультации по статистической обработке данных эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: ГИТТЛ, 1954.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.
4. Schlomann E., Joseph R. Instability of spin waves and magnetostatic oscillations under parallel magnetic pumping // J. Appl. Phys.— 1961.— V. 32, N 6.
5. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН.— 1974.— Т. 114, № 3.
6. Арбузов В. А., Кузнецов Е. А., Носков Н. Н. и др. О параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости.— Новосибирск, 1977.— (Препринт/ИАиЭ СО АН СССР; № 57).
7. Брискман В. А., Шайдуров Г. Ф. Параметрическая неустойчивость поверхности жидкости в переменном электрическом поле // ДАН СССР.— 1968.— Т. 180, № 6.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
9. Савельев В. В., Черепанов В. Б. О пороге параметрического возбуждения волн на поверхности жидкости.— Новосибирск, 1984.— (Препринт/ИАиЭ СО АН СССР; № 234).
10. Ozear J. Least squares when both variables have uncertainties // Amer. J. Phys.— 1982.— V. 50, N 10.

Поступила 24/II 1987 г.

УДК 517.9 : 532

О НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНО-ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

А. С. Романов, А. А. Стыцyna]

(Москва)

Часто используемая модель лучистой теплопередачи — приближение лучистой теплопроводности [1]. Условие применимости модели состоит в малости длины пробега излучения по сравнению с характерным размером прогретой области.

Под действием лучистого потока нагреваемый излучением газ приходит в движение. Для математического описания этого процесса вместо уравнения лучистой теплопроводности необходимо рассматривать систему уравнений газовой динамики. Однако можно надеяться, что на начальном этапе развития динамических возмущений процесс лучистой теплопередачи практически не зависит от движения газа (см., например, [2]). Этот факт позволяет асимптотически проанализировать характер движения газа при его интенсивном нагреве излучением вплоть до образования изотермического разрыва, который в результате дальнейшей эволюции преобразуется в ударную волну, отрывающуюся от прогретого излучением объема газа [1].

Система уравнений газовой динамики для одномерного движения идеального нелинейно-теплопроводного газа в безразмерных переменных записывается в виде

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) T \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Здесь x — координата, вдоль которой передается тепло и движется газ; t — время; $\rho(x, t)$, $u(x, t)$, $T(x, t)$ — плотность, скорость и температура газа; $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности газа, который в значительном интервале температур можно записать в виде $\lambda = nT^{n-1}$ ($n > 1$) [1]; γ — показатель адиабаты.

Пусть полупространство $x > 0$ заполнено холодным ($T = 0$) неподвижным ($u = 0$) однородным ($\rho = 1$) газом. Начиная с момента времени $t = 0$ температура газа на границе $x = 0$ меняется по степенному закону $T = t^k$ и тепло проникает в область $x > 0$. Будем считать границу $x = 0$ непроницаемой для газа. Тогда его движение полностью описывается системой (1) с граничными условиями

$$(2) \quad T = t, \quad u = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$(3) \quad T = \lambda \partial T / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \infty$$

и начальными

$$(4) \quad T = u = 0, \quad \rho = 1 \quad \text{при } t = 0, \quad x > 0.$$

Известно, что если теплопроводность вырождается $\lambda(0) = 0$, то тепло по холодному газу распространяется в виде тепловой волны [3, 4], т. е. существует поверхность $x = x_f(t)$, которая строго отделяет область нагретого газа ($T > 0$) $x < x_f(t)$ от области холодного ($T = 0$) $x > x_f(t)$. При этом граничные условия (3) в силу непрерывности температуры и потока тепла должны выполняться на самой поверхности (фронте тепловой волны) $x = x_f(t)$. Учитывая эту особенность распространения тепла в нелинейно-теплопроводном газе, начальные и граничные условия (2)–(4), перейдем к «естественным» [2] для рассматриваемого процесса независимым переменным $x, t \rightarrow \eta = x/x_f(t), t$ и зависимым $T = t^k \theta(\eta, t), u = t^\alpha v(\eta, t), \rho = 1 + t^\beta r(\eta, t), x_f = a(t)t^\sigma$. Постоянные $\alpha > 0, \beta > 0, \sigma > 0$ подлежат определению. Если считать, что функции $\theta(\eta, t), v(\eta, t), r(\eta, t), a(t)$ вместе со своими производными имеют асимптотический порядок $O(1)$ при $t \rightarrow 0$, то после перехода к новым переменным в системе (1) они найдутся в форме $\alpha = \frac{1}{2}[k(3-n) + 1], \beta = k(2-n) + 1, \sigma = \frac{1}{2}[k(n-1) + 1]$. Система (1) при этом преобразуется к виду

$$(5) \quad \beta r - \sigma \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{t^\beta}{a} \frac{\partial v r}{\partial \eta} + t \left[\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} \right] = 0,$$

$$\alpha v - \sigma \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{t^\beta}{a} \left[\frac{\theta}{1 + t^\beta r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + t \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] = 0,$$

$$\frac{1}{a^2 (1 + t^\beta r)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - k \theta + \sigma \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + t^\beta \left[\frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\gamma - 1) \frac{\theta}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] +$$

$$+ t \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] = 0.$$

Из (5) следует, что при $t \rightarrow 0$ лучистый теплоперенос можно рассматривать независимо от движения газа. Функции $\theta(\eta, t)$ и $a(t)$ не зависят от

времени и определяются из уравнения

$$(6) \quad \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial \eta^2} + \sigma \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - k \theta = 0$$

и граничных условий, являющихся следствием (2), (3):

$$(7) \quad \theta = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1.$$

Решение задачи (6), (7) может быть проведено численно либо найдено аналитически в виде рядов по степеням $1 - \eta$. В том же приближении функции $r(\eta, t) = r(\eta)$ и $v(\eta, t) = v(\eta)$ получим в виде квадратур (см. [2]):

$$(8) \quad v = \eta^{\frac{\alpha}{\sigma}} \frac{1}{a\sigma} \int_1^\eta \eta^{-\left(1 + \frac{\alpha}{\sigma}\right)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta,$$

$$r = \eta^{\frac{\beta}{\sigma}} \frac{1}{a\sigma} \int_1^\eta \eta^{-\left(1 + \frac{\beta}{\sigma}\right)} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta$$

(здесь учтен характер движения газа вблизи фронта тепловой волны [5]). Применяя правило Лопиталья, из (8) имеем

$$(9) \quad v(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} v(\eta) = - \frac{1}{a\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \neq 0,$$

и второе граничное условие из (2) оказывается невыполненным, его невыполнение в асимптотическом представлении решения означает, что вблизи границы $\eta = 0$ есть тонкий пограничный слой, в котором функция $v(\eta, t)$ меняется от значений $O(1)$ на внешней границе слоя до нуля при $\eta = 0$ [6, 7]. Толщину этого пограничного слоя можно определить, сравнивая закон движения границы тепловой волны $x_f(t) \sim t^\sigma$ с законом распространения звуковых возмущений вблизи границы $x = 0$: $x_p(t) \sim t^{(k+2)/2}$. Следовательно, решения (8) должны быть уточнены в пределах $\eta \sim t^{\beta/2}$.

Для этого, согласно схеме [6, 7], перейдем в (5) к новой независимой переменной $\eta^* = \eta/\varepsilon^{\beta/2}$ и новым зависимым динамическим переменным $r^* = \varepsilon^{-\delta} r$, $v^* = \varepsilon^{-\omega} v$, полагая $\varepsilon = O(t)$. Анализ полученной таким образом системы уравнений показывает, что $\delta = -\beta/2$, $\omega = 0$. Сравнивая эту систему с (5) и полагая $\beta/2 < 1$, можно записать асимптотическую форму уравнений (5), равномерно по $0 < \eta < 1$ описывающих процесс с точностью до величин порядка $O(t^\varphi)$, где $\varphi = \min\{\beta, 1\}$. Функции θ , a по-прежнему находятся из (6), (7), а для определения $r(\eta, t)$ и $v(\eta, t)$ получаются соотношения

$$(10) \quad \chi(\eta, t) \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{1}{a} (1 + t^\beta r) \left(\alpha r + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \beta \left(\frac{t^\beta}{a} v - \sigma \eta \right) r,$$

$$\chi(\eta, t) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\beta}{a} \frac{\theta t^\beta}{1 + t^\beta r} r - \left(\frac{t^\beta}{a} r - \sigma \eta \right) \left(\alpha v + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \chi(\eta, t) =$$

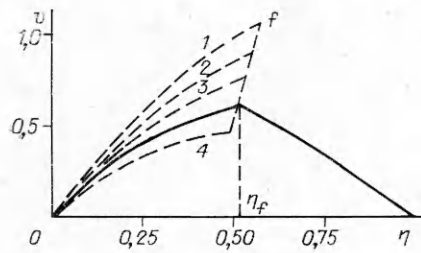
$$= \left(-\sigma \eta + \frac{t^\beta}{a} v \right)^2 - \frac{\theta}{a^2} t^\beta.$$

Уравнения (10) должны решаться при граничных условиях

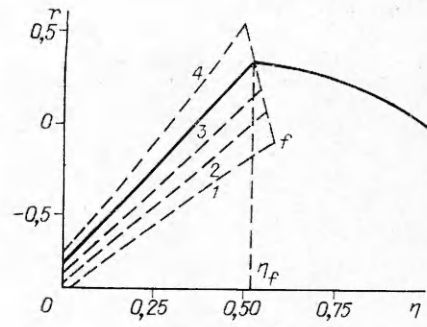
$$(11) \quad v = 0, r = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$

которые являются следствием (2)–(4) [5].

Здесь необходимо отметить, что асимптотическая форма уравнений движения нелинейно-теплопроводного газа (6), (10) справедлива при выполнении неравенств $\sigma > 0$, $0 < \beta < 2$, которые, как указывалось, использовались при выводе соотношений (6), (10). Эти неравенства определяют область возможных значений постоянных k, n : $-1 < k(n-2) <$



Р и с. 1



Р и с. 2

$\langle 1, k(n-1) \rangle - 1$. Заметим также, что при $\beta = 0$ задача имеет инвариантное решение, которое изучалось в [8].

У системы (10) есть особая точка, положение которой задается соотношением $\eta = \eta_f(t)$, где функция $\eta_f(t)$ определяется из уравнения $\chi(\eta_f, t) = 0$. Характер особой точки при $t \rightarrow 0$ может быть исследован методами качественной теории [9]. Проведенный анализ показал, что при $t \rightarrow 0$ она является узлом. Поэтому оказывается возможным построить непрерывное решение системы (10), удовлетворяющее условиям (11), хотя их число превосходит порядок системы (10). При $t > 0$ ход интегральной кривой системы (10) может быть найден только численно.

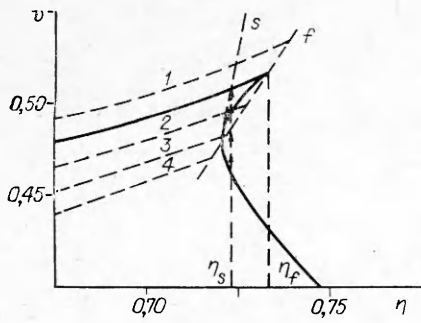
Для численного анализа удобно перейти от (10) к эквивалентной динамической системе

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tau} &= \frac{1}{a} (1 + t^\beta r) \left(\alpha r + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \beta \left(\frac{t^\beta}{a} v - \sigma \eta \right) r, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\beta}{a} \frac{\theta t^\beta}{1 + t^\beta r} r - \left(\frac{t^\beta}{a} r - \sigma \eta \right) \left(\alpha v + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \chi(\eta, t). \end{aligned}$$

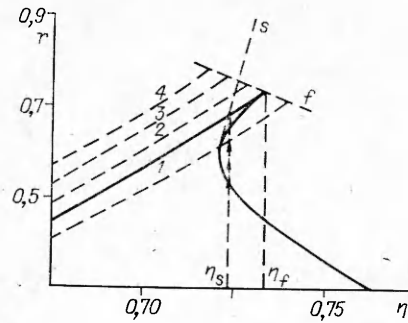
Здесь τ — новая переменная вдоль интегральной кривой в пространстве переменных $\Omega(\eta, v, r)$. Следует заметить, что предельный переход $\eta \rightarrow \eta_f$ соответствует $\tau \rightarrow -\infty$. Поэтому для построения численного решения во всей области определения $0 < \eta < 1$ необходимо рассмотреть две задачи Коши для динамической системы (12) с различными начальными условиями, которые следуют из (11): $\eta = 1, r = v = 0$ и $\eta = v = 0, r = r^0$. Так как постоянная r^0 заранее неизвестна, то вторая задача Коши определяет, вообще говоря, однопараметрическое семейство интегральных кривых, образующих некоторую поверхность $\bar{\Omega}_2$ в пространстве переменных Ω . Постоянная r^0 находится из условия сшивки решений обеих задач Коши в особой точке $\tau \rightarrow -\infty$.

Указанные задачи Коши интегрировались модифицированным методом Эйлера. Шаг по независимой переменной τ задавался равным $\Delta\tau = -0,1$, а также для проверки $\Delta_1\tau = \Delta\tau/3$. На рис. 1, 2 в качестве примера для $k = 0$ (в работе над этим частным случаем принимал участие К. А. Волосов), $n = 2, t = 0,3$ приведены построенные таким способом проекции интегральной кривой (сплошные линии). Штриховые линии 1—4 — проекции нескольких интегральных кривых при $r(0, t) \neq r^0$. Линии на рис. 1, 2, помеченные одинаковыми цифрами, соответствуют проекции одной и той же интегральной кривой. Линии f — проекции линии особых точек, ограничивающей поверхность $\bar{\Omega}_1$.

Этот характер интегральных кривых сохраняется лишь конечное время. При $t > t_*(k, n) > 0$ интегральная кривая вблизи особой точки «опрокидывается», на ней образуется складка [10]. Пример такой интегральной кривой в проекциях вблизи особой точки представлен на рис. 3, 4 для $k = 0, n = 2, t = 0,7$ (обозначения совпадают с рис. 1, 2). Исходя из физических соображений, необходимо рассматривать только однозначные решения краевой задачи (10), (11). Поэтому при $t > t_*(k, n)$



Р и с. 3



Р и с. 4

решение должно содержать сильный разрыв, оно, вообще говоря, скачком переходит с одной интегральной кривой на другую.

Пусть скачок наблюдается при $\eta = \eta_s(t)$. Тогда значения параметров газа до скачка $v|_{\eta_s+0} = v_+$, $r|_{\eta_s+0} = r_+$ однозначно связаны с их значениями за скачком $v|_{\eta_s-0} = v_-$, $r|_{\eta_s-0} = r_-$. Эти условия в рассматриваемом приближении получим непосредственно из уравнений (10). Интегрируя (10) в пределах от $\eta_s - \xi$ до $\eta_s + \xi$ ($\xi > 0$) и затем переходя к пределу при $\xi \rightarrow 0$, получим

$$(13) \quad a\sigma\eta_s[r] - [v] - t^\beta[v, r] = 0,$$

$$a\alpha\eta_s[v] - (t^\beta/2)[v^2] - \theta_s[\ln(1 + t^\beta r)] = 0,$$

где $\theta_s = \theta|_{\eta=\eta_s}$, а квадратные скобки означают величину скачка стоящей в них функции. Уместно напомнить, что в принятом приближении функция $\theta(\eta)$ остается непрерывной при $\eta = \eta_s$ вместе со своими производными.

Естественно полагать, что непосредственно после возникновения скачок мал ($[v], [r] \ll 1$). Тогда, разлагая логарифм в ряд и учитывая квадратичные по $[v]$ и $[r]$ слагаемые из (13), имеем

$$(14) \quad [v] = \frac{2}{t^\beta} \kappa (\kappa^2 - t^\beta \theta_s) (\kappa^2 + t^\beta \theta_s)^{-1},$$

$$[r] = [v](1 + t^\beta r_+) (\kappa^2 - t^\beta [v])^{-1} \quad (\kappa = a\sigma\eta_s - t^\beta v_+).$$

Задавая положение скачка $\eta_s(t)$, будем определять v_+ и r_+ по соответствующей ветви интегральной кривой задачи (10), (11), а v_- и r_- найдутся с помощью соотношений (14). Так как $\eta_s(t)$ заранее неизвестна, то все возможные значения r_- , v_- , η_s образуют линию s в пространстве переменных Ω . Точка пересечения этой линии с поверхностью Ω_1 определяет положение скачка. На рис. 3, 4 штриховой линией нанесены проекции линии s . Численные расчеты показали, что с точностью счета скачок в принятом приближении осуществляется на ту интегральную кривую, которая является непрерывным решением краевой задачи (сплошная кривая на рис. 3, 4). Положение и величина скачка динамических переменных указаны на рис. 3, 4 стрелками.

Необходимо отметить, что проанализированный характер развития динамических возмущений для $k = 0$, $n = 2$ имеет место во всей указанной выше области изменения параметров k , n . Таким образом, установлен возможный режим возникновения изотермического разрыва при интенсивном тепловом воздействии на идеальный нелинейно-теплопроводный газ. Сильный разрыв по динамическим переменным возникает в результате эволюции слабого разрыва, который существует лишь конечное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
2. Шидловский В. П. Развитие динамических возмущений на начальной стадии точечного взрыва в теплопроводном газе // ПМТФ.— 1978.— № 1.
3. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распределения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // К 70-летию А. Ф. Иоффе.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.
4. Олейник О. А., Калашников А. С., Юй-Линь Чжоу. Задачи Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— Т. 22, № 5.
5. Покровский Л. Д., Тараненко С. Н. Об особенностях распространения волн в газовой динамике с нелинейной теплопроводностью // Тр. МВТУ.— 1982.— № 374.
6. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
8. Волосевич П. П., Курдюмов С. П. и др. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе // ЖВММФ.— 1963.— № 1.
9. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
10. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.

Поступила 8/IV 1987 г.

УДК 536.423

РАЗЛЕТ ГОРЯЧЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ОБОЛОЧКИ

О. А. Исавв, М. В. Неволин, В. П. Скрипов, С. А. Уткин

(Свердловск)

В современных технических устройствах встречаются процессы, сопровождаемые быстрым падением давления в жидкости ниже давления насыщенных паров. В частности, быстропротекающим и существенно нестационарным процессом такого типа является разгерметизация макроскопического объема горячей жидкости — взрыв сосуда. Математическое описание такого взрыва затруднено наличием фазового перехода.

В [1, 2] разгерметизировалась одна стенка сосуда, что сводило процесс фактически к истечению из трубы, т. е. к одномерной геометрии.

В данной работе проведено фотографирование процесса разлета горячего фреона-113 при разрушении стеклянной ампулы. Предполагалось исследовать влияние начальной температуры жидкости на скорость разлета взрывного облака в той области параметров состояния, где может проявляться интенсивное спонтанное зародышеобразование в метастабильной жидкости [3].

Экспериментальная установка представляет собой металлическую камеру в виде куба с длиной стороны 50 см. Камера имеет два окна — в верхней и боковой гранях. Через верхнее окно осуществляется подсветка лампой вспышкой, через боковое — фотосъемка. Световой импульс длительностью около 1 мкс создается воздушным разрядником.

В качестве рабочего вещества выбран фреон-113, негорючее, нетоксичное соединение. Низкие значения критических параметров ($T_c = 487.2$ К, $p_c = 3,41$ МПа) позволили использовать ампулы из отожженного стекла с толщиной стенки 0,5 мм. Ампулы имеют форму сферы диаметром 2,5 см, заполнение (около 4 г) выбиралось таким, чтобы граница раздела жидкость — пар находилась примерно посередине ампулы при всех температурах от комнатной до критической. Нагрев ампулы и всего объема камеры производился нагревателями, расположенными на стенках камеры. Температура измерялась медь-константановой термопарой, находящейся в тепловом контакте с ампулой. Начальная температура выбиралась в диапазоне от 388 К ($\approx 0,8 T_c$) до 487 К ($\approx T_c$). Разрушение ампулы инициировалось ударником, приводимым в движение пружиной. Датчиком начала разрушения была медная проволочка диаметром 0,03 мм, наклеенная на ампулу. Задержка вспышки от момента разрыва проволочки выбиралась в интервале от 0 до 1 мс.