

AMS subject classification: 45B05, 65F10, 65J10

Метод уточнения суммы в итерационной схеме, адаптированной для линейной системы интегральных уравнений, для приближения решения интегрального уравнения Фредгольма

М.Г. Махсин¹, А. Хеллаф², С. Лемита³, М.З. Аиссаоуи¹

¹Laboratory of Applied Mathematics and Modelling (LAMM), 08 May 1945 University, Guelma, Algeria

²Polytechnic National School of Constantine, Constantine, Algeria, Laboratory of Applied Mathematics and Modelling (LAMM), 08 May 1945 University, Guelma, Algeria

³Higher Normal School of Ouargla, Ouargla, Algeria, Laboratory of Applied Mathematics and Modelling (LAMM), 08 May 1945 University, Guelma, Algeria

E-mails: mohammedghaith.mahcene@gmail.com (Махсин М.Г.), amarlasix@gmail.com (Хеллаф А.), lem.samir@gmail.com (Лемита С.), aissaouizine@gmail.com (Аиссаоуи М.З.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 16, 2023.

Махсин М.Г., Хеллаф А., Лемита С., Аиссаоуи М.З. Метод уточнения суммы в итерационной схеме, адаптированной для линейной системы интегральных уравнений, для приближения решения интегрального уравнения Фредгольма // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 301–312.

Используя теорему о геометрических рядах, мы преобразуем линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, определенное на большом интервале, в эквивалентную линейную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Затем мы уточняем, как исследуемая обобщенная итерационная схема аппроксимирует искомое решение. Не обращая ограниченный линейный оператор, а вместо этого вычисляя усеченную геометрическую сумму связанной с ним последовательности ограниченных линейных операторов, мы замечаем, что наш подход обеспечивает лучшую эффективность с точки зрения времени вычислений и наличия ошибок.

DOI: 10.15372/SJNM20230306

Ключевые слова: интегральные уравнения, ограниченные линейные операторы, итерационные методы, метод Нистрема.

Mahcene M.G., Khellaf A., Lemita S., Aissaoui M.Z. A refinement sum-technique in an iterative scheme adapted for a linear system of integral equations to approach a Fredholm integral equation's solution // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 301–312.

Based on the use of the geometric series theorem, we transform a linear Fredholm integral equation of the second kind defined on a large interval into an equivalent linear system of Fredholm integral equations of the second kind; then, we inflict a refinement in the way the investigated generalised iterative scheme approximates the sought-after solution. By avoiding to inverse a bounded linear operator, and computing a truncated geometric sum of the former's associated sequence of bounded linear operators instead, we notice that our approach furnishes a better performance in terms of computational time and error efficiency.

Keywords: integral equations, bounded linear operators, iterative methods, Nyström method.

1. Введение

Интегральные уравнения Фредгольма, используемые в более высоких измерениях для облегчения решения краевых задач или являющиеся уникальными моделями, представляют интерес для многих исследователей в различных областях, таких как физика. Например, в [9] представлено численное решение одного интегрального уравнения Лява (которое является частным случаем уравнения Фредгольма), встречающегося в “задаче определения емкости круглого пластинчатого конденсатора” (дословная цитата из указанной статьи), и в [1, 5] представлено приближенное решение без использования радиационного переноса, что стало основой для кандидатской диссертации [11]. Работы [1, 5] связаны с моделированием переноса звездной волны, который изучался с помощью одного интегрального уравнения Фредгольма, определенного на большом интервале. Это, в свою очередь, стимулировало работу, описанную в [6–8].

1.1. Постановка задачи

Вышеупомянутые работы побудили нас исследовать работу, проделанную в этой статье. Поэтому для заданного ненулевого комплекса λ , большого реального интервала $\Omega = [a, b]$ при $b - a \gg 1$ и непрерывной комплекснозначной функции $f(\cdot)$ мы ищем функцию-решение $u(\cdot)$ следующего неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, t)u(t) dt = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где функция ядра $k(\cdot, \cdot)$ является бинепрерывной по Ω^2 . Кроме того, на основании приведенной в пункте 2 леммы 1 и аналогично [7, 8] мы предполагаем существование и единственность $u(\cdot)$, определив достаточный критерий

$$|\lambda| > \max_{x \in \Omega} \int_a^b |k(x, t)| dt. \quad (2)$$

Как, например, в [6], мы используем определенное свойство интегрирования, чтобы получить линейную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, из (2). Далее мы представим абстрактный подход с использованием ограниченного оператора, в котором целевое решение — это функция-вектор, аппроксимируемая адекватно адаптированной итерационной схемой (см. п. 3, а для получения более подробной информации см. [6–8]). Однако, изучив соответствующие формулы, литературу и численные данные, мы предлагаем идею усечения, с которой мы сможем уточнить результаты, полученные с помощью подхода абстрактной итерационной схемы с ограниченным оператором, и улучшить два аспекта проводимого нами численного исследования.

1.2. Основа

Наш план работы следующий: в п. 2 мы представим обозначения и дадим некоторую предварительную информацию, используемую в статье. В п. 3 мы сформулируем обобщенную схему Гаусса–Зейделя (GGS), адаптированную для матриц ограниченных линейных операторов, встречающихся в нашем контексте. В п. 4 мы представим нашу

концепцию усечения вместе с указанной итеративной схемой. В п. 5 мы докажем теорему сходимости, которая гарантирует, что при усечении сходимость остается неизменной. Наконец, в п. 6 мы приведем примеры применения и сравним численные результаты, полученные с помощью схемы GGS и ее усеченной версии, а также проведем небольшое исследование влияния представленных параметров.

2. Обозначения и предварительная информация

Прежде всего приведем основную лемму, вокруг которой построена наша статья.

Лемма 1 [4, теорема 2.3.1, с. 61]. Пусть V — банахово пространство и $L : V \mapsto V$ — линейный ограниченный оператор с нормой оператора $\|L\|$, которая строго меньше 1. Тогда $(I - L)$ — биекция на V , ее обратная величина — ограниченный линейный оператор, причем

$$(I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n,$$

и

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

Для некоторого целого числа $N \geq 2$ и шага

$$H = \frac{b - a}{N}$$

мы определим последовательность однородных узлов деления $\{x_i\} \subset [a, b]$:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + H, & 1 \leq i \leq N - 1, \\ x_0 = a, & x_N = b. \end{cases}$$

Имея эту последовательность и используя обозначения

$$u_i(x) = u(x), \quad f_i(x) = f(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

мы видим, что следующая линейная система интегральных уравнений Фредгольма второго рода была переформулирована из (1):

$$\lambda u_i(x) - \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x, t) u_j(t) dt = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3)$$

Теперь для некоторого интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ (как в нашем случае) обозначим банахово пространство вещественнозначных непрерывных функций в Ω при помощи $C(\Omega, \mathbb{R})$. Для индекса i , упомянутого выше (формула (3)), пусть $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$, и дадим пространству $\mathcal{C}_i = C(\Omega_i, \mathbb{R})$ его i -норму $\|\cdot\|_i$ (для которой оно является банаховым):

$$\|g\|_i = \max_{x \in \Omega_i} |g(x)|, \quad g \in \mathcal{C}_i.$$

Это позволит нам определить (банахово) декартово произведение $\mathbb{C}$ -векторного пространства $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X} = \prod_{i=1}^N \mathcal{C}_i,$$

имеющего полную норму произведения $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, задаваемую формулой

$$\|\phi\|_{\mathcal{X}} = \max_{i=1}^N \|\phi_i\|_i, \quad \phi \in \mathcal{X}.$$

Мы также определим (банахово) $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}(\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_i)$ всех ограниченных линейных операторов из $\mathcal{C}_j$ в $\mathcal{C}_i$, имеющих (i, j) -норму оператора

$$\|A\|_{ij} = \sup_{\|w\|_j=1} \|Aw\|_i, \quad A \in \mathcal{L}_{ij}.$$

Кроме того, определим K_{ij} следующим образом:

$$K_{ij}v(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x, s)v(s) ds, \quad x \in \Omega_i, \quad v \in \mathcal{C}_j,$$

который, очевидно, является элементом $\mathcal{L}_{ij}$ с (i, j) -нормой оператора, оцениваемой следующим образом:

$$\|K_{ij}\|_{ij} = \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} |k(\cdot, s)| ds \right\|_i.$$

Кроме того, пусть $\mathcal{B}$ — (банахова) матрица $\mathbb{C}$ -векторного пространства операторов-коэффициентов в $\mathcal{L}_{ij}$ (для любой пары (i, j)):

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{X}),$$

которую мы снабжаем операторно-матричной нормой полноты

$$\|T\|_{\mathcal{B}} = \max_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|T_{ij}\|_{ij}, \quad T_{ij} \in \mathcal{L}_{ij}.$$

Обозначим тождество умножения (матрицу) на $\mathcal{B}$ символом $\mathcal{I}$, так что

$$\mathcal{I}_{ij} = \delta_{ij} \text{Id}_{ii}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и Id_{ii} — тождественный оператор $\mathcal{L}_{ii}$. В заключение положим

$$\begin{cases} U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}, & F = (f_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{X}, \\ \mathcal{K} = (K_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

3. Схема GGS

Представим основные идеи [6–8]. Формулу (3) можно рассматривать как оцениваемую покомпонентную запись абстрактной системы:

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}) U = F, \quad (4)$$

которая, как видно, приводит к тому, что (1) эквивалентно (3), которое само эквивалентно (4). Теперь заметим, что если мы расцепим $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \mathcal{D} - \mathcal{L} - \mathcal{U},$$

где $\mathcal{D}$, $-\mathcal{L}$, $-\mathcal{U}$ — диагональная, строго нижняя и строго верхняя части $\mathcal{K}$ соответственно; то аналогично алгебраическому случаю, который можно найти в литературе (например, в [10, 12]), имеется возможность генерации последовательности векторов-функций $\{U^k\}_{k \geq 0}$, удовлетворяющей

$$\text{GGS} : \begin{cases} U^{k+1} = \mathcal{G}U^k + (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} + \mathcal{L})^{-1} F, & k \geq 0, \\ U^0 \in \mathcal{X}, \end{cases}$$

где матрица итераций $\mathcal{G}$ задается следующим образом:

$$\mathcal{G} = (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} + \mathcal{L})^{-1} \mathcal{U}.$$

На основании леммы 1 достаточный критерий (2) означает, что

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{L}\|_{\mathcal{B}} \leq \|\mathcal{K}\|_{\mathcal{B}} < |\lambda|,$$

т. е. в соответствии с [8] $\mathcal{G}$ существует при

$$\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{B}} < 1.$$

Таким образом, можно говорить о следующей сходимости к U :

$$U^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} U, \quad \text{over } \mathcal{X}. \quad (5)$$

В широком смысле вышеприведенную схему лучше представить следующим образом:

$$\text{GGS} : \begin{cases} \lambda u_i^{k+1} = f_i + \sum_{j=1}^i K_{ij} u_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} u_j^k, & k \geq 0, \\ u_i^0 \in \mathcal{C}_i, & 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

3.1. Метод Нистрема

В [2–4] мы находим, что численный метод Нистрема — один из способов решения интегральных уравнений, рассматриваемых в данной статье. Для $n \geq 2$ введем $h = H/n$ и положим

$$\{t_q\} \subset \Omega_i : \begin{cases} t_q = t_{q-1} + h, & 1 \leq q \leq n-1, \\ t_0 = x_{i-1}, & t_n = x_i. \end{cases}$$

Авторы статьи [8] аппроксимировали (компактный) интегральный оператор K_{ii} устойчивым (компактным) оператором с квадратурной формулой $K_{iin} : \mathcal{C}_i \mapsto \mathcal{C}_i$ таким, что

$$K_{iin}\varphi(x) = \sum_{q=1}^n w_q k(x, t_q) \varphi(t_q), \quad \varphi \in \mathcal{C}_i.$$

В соответствии с [2] $\{K_{iin}\}_n$ — это семейство коллективно компактных поточечно сходящихся операторов:

$$K_{iin}\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{ii}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{C}_i. \quad (6)$$

Так как выбранные квадратурные правила устойчивы, то приписываемые веса положительны, и подобно [2, (4.1.3), с. 101] мы имеем

$$\sup_{n \geq 2} \sum_{q=1}^n w_q < +\infty.$$

В результате при введении указанной выше n -аппроксимации схема GGS преобразуется в следующую схему Нистрема–GGS:

$$\begin{cases} \lambda u_{in}^{k+1} = f_i + K_{iin}u_{in}^{k+1} + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}u_{jn}^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N K_{ij}u_{jn}^k, & k \geq 0, \\ u_{in}^0 \in \mathcal{C}_i, & 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Обратим внимание на то как сконструировано семейство $\{K_{iin}\}_n$ и, в соответствии с [2, теорема 4.1.2, с. 107], отметим, что новая последовательность векторов-функций $\{U_n^k\}_{k \geq 0}$ подтверждает асимптотическую оценку

$$n \text{ довольно большое} \implies \|u_i^k - u_{in}^k\|_i = O\left(\|(K_{ii} - K_{iin})u_i^k\|_i\right).$$

4. Усечение

В этом пункте представим нашу идею усечения. Обратите внимание на следующую лемму:

Лемма 2. Пусть $\text{re}(K_{iin})$ — это резольвентное множество K_{iin} . Тогда для некоторого натурального числа n_0 , которое гораздо больше 2, оператор $(\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})$ является необратимым для всех n , которые больше или равны n_0 , и таким, что

$$\lambda \in \text{re}(K_{iin}) \quad \text{и} \quad \|K_{iin}\|_{ii} < |\lambda|.$$

Доказательство. Согласно гипотезе, мы используем устойчивые квадратурные правила: средней точки, трапеций, Симпсона, Гаусса. Во всех указанных правилах квадратурные веса положительны. Из [2, с. 104] мы можем взять следующее:

$$\|K_{iin}\|_{ii} = \max_{x \in \Omega_i} \sum_{q=1}^n |w_q k(x, t_q)| = \max_{x \in \Omega_i} \sum_{q=1}^n w_q |k(x, t_q)|.$$

Теперь рассмотрим следующую непрерывную функцию:

$$\psi_x(\cdot) = |k(x, \cdot)|, \quad x \in \Omega_i.$$

Мы видим, что ее можно переформулировать следующим образом:

$$\|K_{iin}\|_{ii} = \max_{x \in \Omega_i} \sum_{q=1}^n w_q \psi_x(t_q) = \max_{x \in \Omega_i} K_{iin} \psi_x.$$

Поскольку ψ_x — элемент $\mathcal{C}_i$, то поточечная сходимость K_{iin} к K_{ii} означает, что

$$K_{iin} \psi_x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{ii} \psi_x := \int_{x_{i-1}}^{x_i} |k(x, t)| dt.$$

Это показывает, что

$$\|K_{iin}\|_{ii} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|K_{ii}\|_{ii}.$$

Тем не менее, у нас пока нет нормы сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_{iin} - K_{ii}\|_{ii} \neq 0.$$

Положим

$$\beta_n = \|K_{iin}\|_{ii}, \quad \beta = \|K_{ii}\|_{ii}.$$

В силу указанной сходимости имеем

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \gg 2 : \forall n \geq n_0 \quad |\beta_n - \beta| < \epsilon.$$

В частности, поскольку (2) означает, что $|\lambda| > \beta$, мы можем взять

$$\epsilon = |\lambda| - \beta$$

и быть уверенными в том, что должен существовать некоторый ранг n_0 , начиная с которого мы имеем β_n с n , которое больше или равно n_0 , в диапазоне $\pm \epsilon$, начиная с β . Кроме того, при данном выборе ϵ мы имеем

$$\beta_n - \beta \leq |\beta_n - \beta| < \epsilon = |\lambda| - \beta \implies \beta_n < |\lambda|, \quad n \geq n_0.$$

Таким образом, лемма доказана, так что

$$\exists n_0 \gg 2 : n \geq n_0, \quad \|K_{iin}\|_{ii} < |\lambda|, \quad \lambda \in \text{re}(K_{iin}). \quad \square$$

Следовательно, лемма 1 и лемма 2 позволяют записать

$$(\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{-p-1} K_{iin}^p.$$

Поэтому для некоторого положительного целого числа m мы можем внести дополнительные изменения в схему GGS в дополнение к упомянутым выше; таким образом, мы имеем m -усеченную схему Нистрема–GGS

$$\begin{cases} u_{in}^{k+1}(m) = \left[\sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} K_{iin}^p \right] \left(f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_{jn}^{k+1}(m) + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} u_{jn}^k(m) \right), & k \geq 0, \\ u_{in}^0(m) \in \mathcal{C}_i, & 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

5. Сходимость

В данном пункте мы представим теорему, обеспечивающую сходимость сформулированной выше m -усеченной схемы.

Теорема. В банаховом пространстве $\mathcal{X}$ последовательность функций-векторов m -Нустрема $\{U_n^k(m)\}_{k \geq 0}$ сходится к функции-вектору U решения (4).

Доказательство. Для любого $1 \leq i \leq N$ мы имеем

$$\|u_i - u_{in}^k(m)\|_i \leq \|u_i - u_i^k\|_i + \|u_i^k - u_{in}^k\|_i + \|u_{in}^k - u_{in}^k(m)\|_i.$$

Теперь возьмем суммы

$$\begin{aligned} S_i^k &= f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^k + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} u_j^{k-1}, \\ S_{in}^k &= f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_{jn}^k + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} u_{jn}^{k-1}, \\ S_{in}^k(m) &= f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^k(m) + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} u_j^{k-1}(m) \end{aligned}$$

и выполним следующие манипуляции:

$$\begin{aligned} u_{in}^k - u_{in}^k(m) &= (\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} S_{in}^{k-1} - \left(\sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} K_{iin}^p \right) S_{in}^{k-1}(m) \\ &= (\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} S_{in}^{k-1} - \left(\sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} K_{iin}^p \right) S_{in}^{k-1}(m) + \\ &\quad (\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} S_{in}^{k-1}(m) - (\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} S_{in}^{k-1}(m) \\ &= (\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} \left(S_{in}^{k-1} - S_{in}^{k-1}(m) \right) + \\ &\quad \left((\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} - \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} K_{iin}^p \right) S_{in}^{k-1}(m). \end{aligned}$$

С одной стороны, согласно лемме 1, мы имеем

$$(\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1} - \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} K_{iin}^p = \sum_{p=m+1}^{\infty} \lambda^{-p-1} K_{iin}^p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \mathcal{L}_{ii}.$$

С другой стороны, согласно этой же лемме,

$$S_{in}^{k-1} - S_{in}^{k-1}(m) = \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} \left(u_{jn}^{k-1} - u_{jn}^{k-1}(m) \right) + \sum_{j=i+1}^N K_{ij} \left(u_{jn}^{k-2} - u_{jn}^{k-2}(m) \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \mathcal{C}_i.$$

Таким образом,

$$\|u_{in}^k - u_{in}^k(m)\|_i \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Кроме того, с использованием (5) мы получим

$$\|u_i^k - u_{in}^k\|_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Использование (6) дает

$$\|u_i - u_i^k\|_i \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

В результате, взяв i -норму, получим

$$\lim_{m,n,k \rightarrow \infty} \|U - U_n^k(m)\|_{\mathcal{X}} = \lim_{m,n,k \rightarrow \infty} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \|u_i - u_i^k(m)\|_i \right) = 0. \quad \square$$

6. Численная реализация

В этом пункте приведены конкретные примеры, демонстрирующие эффективность исследуемого метода усечения. Представленные примеры реализованы с использованием Windows 10, ×64-битовой системы, 6th Gen i5 PC. Термины “ m -усеченная схема Нистрема–GGS” и “схема GGS с уточненной суммой” взаимозаменяемы. Более того, в следующих двух примерах любой интеграл численно аппроксимируется правилом квадратур трапеций.

6.1. Пример 1

При $\alpha = 2^{-1}10^{-4}\pi$, возьмем $\lambda = 400$ и в интервале $[0, 200]$ возьмем линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, задаваемое формулой

$$\lambda u(x) - \int_0^{200} \sin(\alpha xt) u(t) dt = \lambda x + \alpha^{-2} x^{-2} (200\alpha x \cos(200\alpha x) - \sin(200\alpha x)).$$

В данном уравнении $u(x) = x$ для единственного решения в данном интервале. Поэтому пусть $N = 200$ (следовательно, $H = 1$), возьмем $m = 3$; мы видим, что, задав ошибки

$$E_m = \|U - U_n^k(m)\|_{\mathcal{X}}, \quad E = \|U - U_n^k\|_{\mathcal{X}},$$

для допуска 10^{-8} мы получим таблицу 1.

Таблица 1. GGS из [8] (слева) в зависимости от GGS с уточненной суммой (справа)

n	E	Время (с)	E_m	Время (с)
9	2.478061560395872E-07	18.41	2.460836299178482E-07	17.79
21	3.933695325031294E-08	83.97	3.775389245674887E-08	82.04
31	1.727892140479526E-08	175.16	1.582698416768835E-08	169.41
41	9.561290426063351E-09	292.01	8.223963732234552E-09	289.52

Поскольку метод имеет различные контрольные параметры, рассмотрим для действительного (в конечном итоге возрастающего) τ спектральный параметр $\lambda = 2\tau$ и положим

$$\lambda u(x) - \int_0^{\tau} \sin(\alpha x t) u(t) dt = \lambda x + \alpha^{-2} x^{-2} (\alpha \tau x \cos(\alpha \tau x) - \sin(\alpha \tau x)), \quad x \in [0, \tau].$$

В этом уравнении $u(x) = x$ остается решением τ -интегрального уравнения в исследуемом интервале $[0, \tau]$. Заметим, что для допуска 10^{-8} имеется табл. 2, где представлены данные моделирования различных значений m .

Таблица 2. Изменение m

$\tau = 10, \quad N = 10, \quad n = 81$				
E	Время (с)	m	E_m	Время (с)
1.216945193505126E-07	13.62	2	6.111517816798084E-05	13.61
		3	3.103139251336984E-06	13.50
		4	2.677355901425926E-07	13.51
		5	1.288582343050848E-07	13.49
		6	1.220462735318506E-07	13.58
		7	1.217118050789168E-07	13.59
		8	1.216953684490818E-07	13.58
		9	1.216945637594335E-07	13.61
		10	1.216945229032262E-07	13.57

Теперь вернемся к выбору $m = 3$. С тем же допуском, принятым в этом примере, выбирая адекватное значение 2τ для λ , рассмотрим табл. 3, в которой представлено влияние размера интервала на то, насколько хорошо эти два итерационных метода помогают приблизиться к искомому решению.

Таблица 3. Влияние размера интервала

$[0, \tau] : \quad H = 1, \quad u(x) = x, \quad x \in [0, \tau]$					
τ	n	E	Время (с)	E_m	Время (с)
100	21	8.36226E-08	19.18	7.41688E-08	18.97
150	31	2.10201E-08	89.41	1.74087E-08	88.81
200	41	9.56129E-09	292.01	8.22396E-09	289.52

6.2. Пример 2 [8]

Для $\mu = 2$ и для спектрального $\lambda = 500^2 \mu$ рассмотрим в интервале $[0, 500]$ линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, задаваемое формулой

$$\lambda u(x) - \int_0^{500} |t - x| u(t) dt = f(x), \quad x \in [0, 500].$$

Положим

$$f(x) = \lambda x^{1/2} + \left(\frac{2(10\sqrt{5})^3}{3} \right) x - \left(\frac{8}{15} \right) x^{5/2} - \left(\frac{2(10\sqrt{5})^5}{5} \right), \quad x \in [0, 500].$$

Тогда $u(x) = x^{1/2}$ — решение интегрального уравнения нашего примера. Затем положим $N = 50$ (следовательно, $H = 10$) и возьмем $m = 3$. Если для допуска 10^{-8} две ошибки E_m и E такие же, как в примере 1, построим следующую сравнительную таблицу (табл. 4).

Таблица 4. GGS из [8] (слева) в зависимости от GGS с уточненной суммой (справа)

n	E	Время (с)	E_m	Время (с)
9	1.957418373166320E-06	3.82	1.957429979881908E-06	3.72
21	4.963218209752540E-07	17.49	4.963334383489837E-07	16.80
31	2.704285151367003E-07	35.35	2.704401111941479E-07	34.36
41	1.757889371845067E-07	58.07	1.758005474528090E-07	58.01

6.3. Обсуждение таблиц

Прежде всего заметим, что мы имеем сходимость в обоих случаях. В табл. 1, табл. 3 и табл. 4 сходимость замедляется по мере того, как значение n в схеме Нистрема увеличивается (обратите внимание, что время указано в секундах). Тем не менее, во всех таблицах метод с уточнением суммы намного эффективнее, чем другие. Отметим два улучшения: одно по времени (в секундах) и другое по ошибке сходимости. Несмотря на то, что с ростом n различие между двумя ошибками может показаться незначительным, согласно теории и арифметике, действие по вычислению счетных степеней матрицы все еще менее затратно, чем вычисление ее обратного значения. Что касается табл. 2, то можно сделать вывод, что в общем случае достаточно иметь небольшие конечные значения m , например, $m \in \{2, \dots, 10\}$. Из табл. 3 более очевидно, что для (действительно) больших интервалов выбор m не должен быть сложным; таких малых значений, как 3, достаточно, чтобы получить все преимущества нашего m -усеченного GGS с уточненной суммой.

7. Выводы

С использованием только теоремы о геометрических рядах и замены обратной величины $(\lambda \text{Id}_{ii} - K_{iin})^{-1}$ на соответствующую усеченную геометрическую сумму оператора нам удалось добиться отличного результата, т.е. создать хорошую альтернативу схеме GGS с точки зрения времени вычислений и оценки погрешности при приближении к решению неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В будущих работах мы планируем рассматривать идею усечения при работе с обратимыми линейными операторами, подобными рассматриваемым в данной статье.

Благодарности. Авторы благодарны Генеральной делегаций по научным и техническим исследованиям (DGRSDT), а также рецензенту за содержательные и глубокие комментарии, которые помогли улучшить статью.

Литература

1. Ahues M., D’Almeida F., Largillier A., Titaud O., Vasconcelos P. An L^1 refined projection approximate solution of the radiation transfer equation in stellar atmospheres // J. Compt. Appl. Math. — 2002. — Vol. 140. — P. 13–26.
2. Atkinson K.E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. — New York: Cambridge University Press, 1997.
3. Atkinson K.E. A personal perspective on the history of the numerical analysis of Fredholm integral equations of the second kind // The Birth of Numerical Analysis. — 2009. — P. 53–72. — DOI: 10.1142/9789812836267_0005

4. **Atkinson K.E., Han W.** Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework, 3rd ed. — 2009. — (Texts in Applied Mathematics; 39).
5. **D’Almeida F., Titaud O., Vasconcelos P.** A numerical study of iterative refinement schemes for weakly singular integral equations // App. Math. Lett. — 2005. — Vol. 18. — P. 571–576.
6. **Lemita S., Guebbai H.** New process to approach linear Fredholm integral equation defined on large interval // Asian-European J. Math. — 2017. — Vol. 12, № 01. — DOI/10.1142/S1793557119500098.
7. **Lemita S., Guebbai H., and Aissaoui M.Z.** Generalized Jacobi method for linear bounded operators system // Comp. Appl. Math. — 2018. — Vol. 37. — P. 3967–3980.
8. **Lemita S., Guebbai H., and Khellaf A.** New version of Gauss Seidel iterative method for operators system to approach Fredholm integral equation // Proc. 8th Intern. Conf. on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO). — IEEE, 2019. — DOI:10.1109/ICMSAO.2019.8880320.
9. **Pastore P.** The numerical treatment of Love’s integral equation having very small parameter // J. Compt. Appl. Math. — 2011. — Vol. 236. — P. 1267–1281.
10. **Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.** Numerical Mathematics. — 2000. — (Texts in Applied Mathematics; 37).
11. **Titaud O.** Analyse Et résolution Numérique de Léquation de Transfert. Application au Problème des Atmosphères Stellaires: Ph.D. thesis. — Université Jean Monnet–Saint-Etienne, 2001.
12. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd ed. // SIAM. — Philadelphia, 2003.

Поступила в редакцию 26 августа 2022 г.

После исправления 19 декабря 2022 г.

Принята к печати 10 апреля 2023 г.