УДК 534.1

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. И. Весницкий, С. В. Крысов, С. Р. Шохин

(*Горький*)

В распределенной системе, параметры которой изменяются во времени, собственные колебания оказываются связанными друг с другом, вследствие чего в ней возможно параметрическое возбуждение одновременно нескольких синхронизированных между собой гармонических колебаний. Если спектр собственных частот соответствующей стационарной системы близок к эквидистантному, то периодическое изменение во времени ее параметров может приводить к возбуждению колебаний импульсной формы [1]. Указанное явление может иметь место как в системах с изменяющимися во времени размерами, так и в системах, свойства границ которых нестационарны. Исследованию неустойчивости этих систем и посвящена данная работа.

1. Вопрос о влиянии движения границ на характер волновых явлений в одномерных механических системах рассматривался еще в работах [2, 3]. В [3] впервые получено точное решение задачи о колебаниях в системе, размер которой равномерно изменяется во времени. Интерес к подробному изучению этих явлений стал проявляться сравнительно недавно в связи с увеличением скоростей работы механизмов * , использующих указанные системы в качестве основных элементов.

К настоящему времени появилось много работ (см. например, [4, 5]), посвященных нерезонансным явлениям в системах с движущимися границами. Что же касается резонансных явлений, выражающихся в параметрическом возбуждении колебаний, то они до сих пор остаются почти совсем не изученными. Однако известно [1], что возбуждаемые колебания будут иметь форму импульсов.

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой натянутую нить, движущуюся с постоянной скоростью v через два кольца, колеблющихся по заданному гармоническому закону. При этом будем полагать, что диаметры колец равны диаметру нити.

Функция поперечного смещения пити u является решением уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 - 2v\partial^2 u/\partial t\partial x - (c^2 - v^2)\partial^2 u/\partial x^2 = 0, \tag{1.1}$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям

$$u|_{x=a(t)} = u|_{x=b(t)} = 0,$$

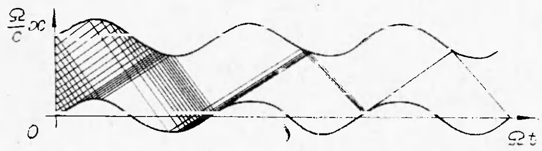
где c — скорость распространения волн в неподвижной нити, $a(t) = \lambda \sin \Omega t$; $b(t) = l_0 + \lambda \sin\Omega t$; λ, Ω и l_0 — постоянные величины.

Заметим, что в такой постановке задача будет корректна лишь при условии, когда бегущие по нити волны успевают отражаться от границ, т. е.**

$$|\lambda\Omega| < c - |v|. \tag{1.2}$$

* Имеются в виду ткацкие и перемоточные станки, шахтные подъемники и т. п.

** Вопрос о корректности постановки задач динамики нити переменной длины достаточно подробно обсуждается в [1].



Фиг. 1

Следуя методу, изложенному в работе [6], произвольное возмущение нити в начальный момент времени можно условно разбить на отдельные участки, каждый из которых будет содержать в себе два импульса распространяющихся по характеристикам уравнения (1.1)

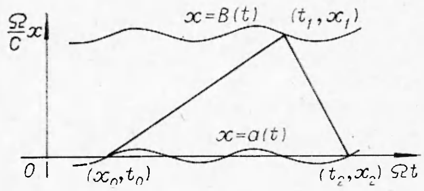
$$x = (c - v)t + C_1, \; x = -(c + v)t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — соответствующие постоянные.

Отдельные импульсы начальных возмущений, многократно отражаясь от границ, с течением времени формируются в один (фиг. 1). Последний взаимодействует с границей лишь в те моменты времени, когда она движется ему навстречу. Поэтому его энергия при отражении возрастает пропорционально сжатию профиля волны в соответствии с двойным эффектом Доплера. В пределе при $t \to \infty$ длительность возмущения стремится к нулю, а его энергия к бесконечности (последнее — следствие того, что здесь не учитываются нелинейные явления, например, влияние возмущений на закон движения границ и т. п.).

На фиг. 1 видно, что траекторией импульса на пространственно-временной плоскости ($\Omega x/c$, Ωt) является некоторая ломаная линия, составленная из отрезков характеристик, заключенных между траекториями границ. Естественно предположить, что параметрический резонанс возможен по крайней мере в тех случаях, когда функция $f(t)$, описывающая ломаную, около которой сгущаются характеристики, периодическая, причем ее период T, очевидно, должен быть кратен периоду колебания границ.

В связи с этим предположением задача подразделяется на две: а) отыскание условий, при которых существует периодическая ломаная; б) отыскание условий параметрического резонанса.



Фиг. 2

2. Найдем условия, налагаемые на параметры системы, при которых функция $f(t)$ периодическая. Излагаемый подход применим для рассмотрения ломаных с любым конечным T, однако для наглядности ограничимся рассмотрением случая, когда период $f(t)$ равен времени между двумя последовательными отражениями импульса от одной и той же границы.

В этом случае (фиг. 2), учитывая, что $x_2 = x_0$; $t_2 = t_0 + 2\pi N\Omega^{-1}$, получаем систему уравнений для однозначного определения координат $x_{0,1}$ и $t_{0,1}$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \sin \Omega t_0, \\ x_0 = (c - v)\, t_0 + C_1, \\ x_0 = -(c + v)\left(t_0 + 2\pi N\Omega^{-1}\right) + C_2, \\ x_1 = l_0 + \lambda \sin \Omega t_1, \\ x_1 = (c - v)\, t_1 + C_1, \\ x_1 = -(c + v)\, t_1 + C_2. \end{cases}$$

Разрешая ее относительно $t_0 + t_1$, находим

(2.1) $$\cos[(\Omega/2)(t_0 + t_1)] = [\pi N c \Omega^{-1}(1 - v^2/c^2) - -l_0]/2\lambda \sin[(\pi N/2)(1 + v/c)].$$

Так как t_0 и t_1 — действительные величины, то уравнение (2.1) имеет решение лишь при условии

(2.2) $$\left|\left[\omega\Omega^{-1} N(1 - v^2/c^2) - 1\right]/2\lambda l_0^{-1} \sin[(\pi N/2)(1 + v/c)]\right| \leqslant 1,$$

где $\omega = \pi c l_0^{-1}$ — низшая собственная частота соответствующей стационарной системы.

Неравенство (2.2) определяет области пространства параметров системы, при которых существует периодическая ломаная. Их границами являются поверхности

$$\lambda l_0^{-1} = \left[1 - N\omega\Omega^{-1}(1 - v^2/c^2)\right]/2\,|\sin[(\pi N/2)(1 + v/c)]|,$$

$$\lambda l_0^{-1} = \left[N\omega\Omega^{-1}(1 - v^2/c^2) - 1\right]/2\,|\sin[(\pi N/2)(1 + v/c)]|.$$

Кроме того, необходимо учесть условие (1.2). Таким образом, получаем еше одну ограничивающую поверхность

$$\pi\lambda/l_0 = \omega\Omega^{-1}(1 - |v|/c).$$

3. Для параметрического резонанса необходимо, чтобы характеристики сгущались с течением времени. Отношения расстояний между двумя достаточно близкими характеристиками до (ρ_1) и после (ρ_2) отражения от верхней и нижней границы соответственно равны

$$\sqrt{\frac{1 + (1 + v/c)^2}{1 + (1 - v/c)^2}} \cdot \frac{1 - v/c - \dot{b}/c}{1 + v/c + \dot{b}/c},$$

$$\sqrt{\frac{1 + (1 - v/c)^2}{1 + (1 + v/c)^2}} \cdot \frac{1 + v/c - \dot{a}/c}{1 - v/c - \dot{a}/c}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае за период $f(t)$ происходит два отражения, то условие сгущения характеристик, а следовательно, и параметрического резонанса запишется в виде

$$\{[1 - v/c - \dot{b}(t_1)/c]/[1 + v/c + \dot{b}(t_1)/c]\} \cdot \{[1 + v/c + \dot{a}(t_2)/c]/[1 - - v/c - \dot{a}(t_2)/c]\} > 1$$

или

(3.1) $$\dot{a}(t_2) - \dot{b}(t_1) > 0.$$

Подставляя в (3.1) законы движения границ (2.2), имеем

$$\sin[(\Omega/2)(t_1 + t_2)] \cdot \sin[(\pi N/2)(1 + v/c)] > 0,$$

т. е.
при $\sin[(\pi N/2)(1 + v/c)] > 0$ $2k\pi < (\Omega/2)(t_1 + t_2) < (2k + 1)\pi$,
при $\sin[(\pi N/2)(1 + v/c)] < 0$ $2(k - 1)\pi < (\Omega/2)(t_1 + t_2) < 2k\pi$
($k = 0, 1, 2, \ldots$), или, если $\sin[(\pi N/2)(1 + v/c)] \neq 0$, то $\cos[(\Omega/2)(t_1 + t_2)]$ может принимать любые значения, за исключением экстремальных

(3.2) $$-1 < \cos[(\Omega/2)(t_1 + t_2)] < 1.$$

Сравнивая (3.2) с (2.1), видим, что область существования периодических функций $f(t)$, за исключением границ и точек, где $\sin[(\pi N/2)(1+ v/c)] = 0$, совпадает с областью параметрического резонанса. Следовательно, последняя определяется неравенствами

$$|[\omega\Omega^{-1} N(1 - v^2/c^2) - 1]/2\lambda l_0^{-1} \sin[(\pi N/2)(1 + v/c)]| < 1; \tag{3.3}$$
$$\pi\lambda l_0^{-1} < \omega\Omega^{-1}(1 - |v|/c).$$

4. Условия (3.3) имеют сравнительно простой вид. В них входят четыре независимых параметра, причем один из них N может принимать лишь целочисленные значения, каждому из которых в пространстве параметров (ω/Ω, v/c, λ/l_0) соответствует своя зона. Последние не имеют общих точек, и потому значение N удобно понимать как номер зоны.

Предлагаемый метод позволяет сравнительно просто учесть линейные потери при отражении от границ. Для этого левую часть (3.1) следует домножить на коэффициенты Γ_a и Γ_b, характеризующие диссипативные потери энергии при отражении волн. Используя полученное таким образом неравенство, можно найти условия неустойчивости, которые при $v = 0$ принимают вид

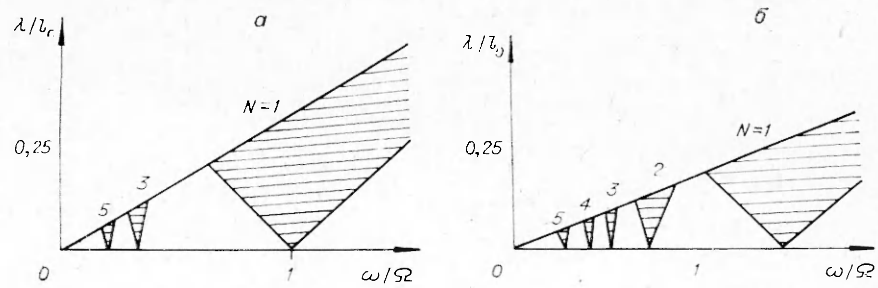
$$\left|\frac{\omega\Omega^{-1} N - 1}{2\lambda l_0^{-1}}\right| < \left\{1 - \left[\frac{\omega\Omega^{-1}}{\pi\lambda l_0^{-1}} \cdot \frac{1 + \Gamma_a\Gamma_b}{1 - \Gamma_a\Gamma_b}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \Gamma_a\Gamma_b}{1 + \Gamma_a\Gamma_b}\right)^2} - 1\right)\right]^2\right\}^{1/2};$$

$$(\omega/\pi\Omega)[(1 - \Gamma_a\Gamma_b)/(1 + \Gamma_a\Gamma_b)]\left[1 - \sqrt{1 - (1 - \Gamma_a\Gamma_b)^2/(1 + \Gamma_a\Gamma_b)^2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \lambda l_0^{-1} < (\omega/\pi\Omega).$$

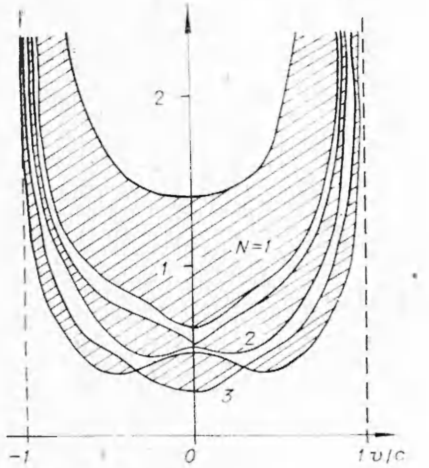
Отсюда следует, что порог возбуждения с ростом номера зоны (т. е. с ростом Ω) уменьшается. Поэтому для рассматриваемого класса систем принципиально необходим учет не только первого, но и высших параметрических резонансов. Указанное обстоятельство является следствием многомодовости системы, что подтверждается экспериментальными исследованиями систем с изменяющимися во времени распределенными параметрами [7]. Инкремент неустойчивости с ростом номера зоны увеличивается, и при $v = 0$ его максимальное значение (в центрах зон) равно

$$(\omega/2\pi)\ln\{\Gamma_a\Gamma_b[(1 + \lambda l_0^{-1} N\pi)/(1 - \lambda l_0^{-1} N\pi)]^2\}.$$

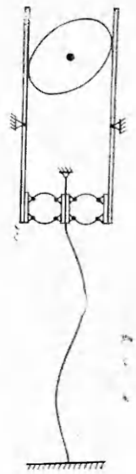
Интересно отметить, что в случае неподвижной нити ($v = 0$) существуют только нечетные зоны (фиг. 3, a). Если же нить движется с лю-



Ф и г. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

бой, даже очень малой скоростью, то количество зон удваивается и они смещаются вправо по оси ω/Ω (фиг. 3, *б*). Ширина зон зависит от скорости движения нити (фиг. 4). При условии $\sin[(\pi N/2)(1+v/c)]=0$ зоны вырождаются в отрезки прямых, число которых соответствует номеру зоны N.

Количество возбуждаемых в системе импульсов может быть различно. Это зависит от начальных условий. Путем графических построений на пространственно-временной плоскости (см. фиг. 1) можно показать, что наибольшее число возбуждаемых импульсов равно номеру соответствующей зоны.

Использованный в данной работе подход к исследованию условий параметрического резонанса применим для более общего случая движения границ. Например, для несинфазно колеблющихся границ

$$a(t)=\lambda\sin\Omega t;\ b(t)=l_0+\lambda\sin(\Omega t+\varphi),$$

проводя аналогичные рассуждения, вместо (3.3) получим

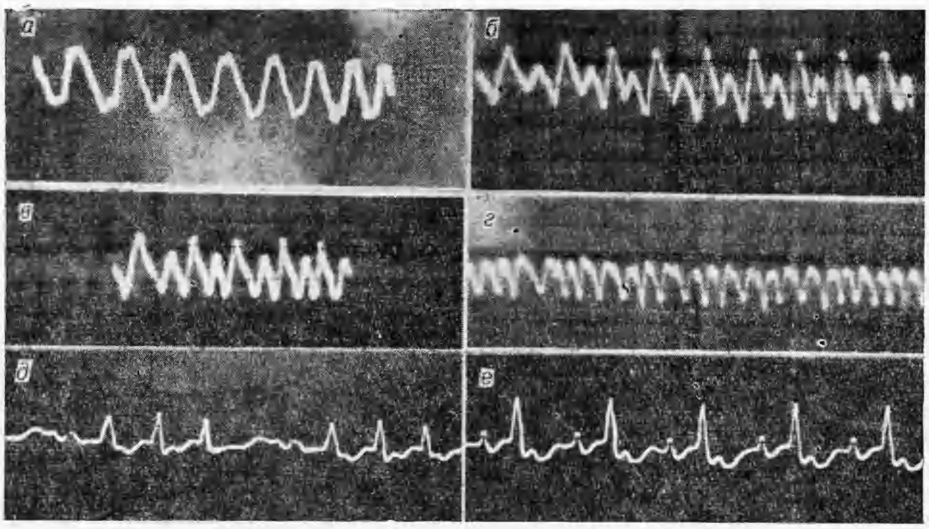
$$\left|\left[\omega\Omega^{-1}N(1-v^2/c^2)-1\right]/2\lambda l_0^{-1}\sin[(N\pi/2)(1+v/c)+\varphi]\right|<1;$$

$$\pi|\lambda|l_0^{-1}<\omega\Omega^{-1}(1-|v|/c).$$

Сдвиг фаз, очевидно, приводит к смещению зон в пространстве параметров вдоль оси v/c.

5. Волновые процессы в рассматриваемой системе по своему характеру близки к процессам в одномерной механической системе с границами, свойства которых изменяются во времени. Например, наличие упругого закрепления эквивалентно удлинению системы для гармонических волн. Поэтому изменение во времени его жесткости в какой-то мере соответствует изменению этого удлинения, и, следовательно, взаимодействие волны с таким закреплением может приводить к ее сжатию (или растяжению), как и в случае эффекта Допплера для движущейся границы.

Параметрическое возбуждение импульсных колебаний наблюдалось экспериментально в распределенной механической системе с нестационарной границей (фиг. 5), представляющей собой натянутую плоскую



Фиг. 6

резиновую ленту длиной 110 см и шириной 2,5 см, один конец которой жестко закреплен, а другой зажат между двумя стальными пружинами, работающими на изгиб. Коэффициент жесткости этих пружин менялся во времени по периодическому закону посредством мотора с симметрично насаженным на него кулачком эллиптической формы. Жесткость закрепления c изменялась возле среднего значения c_0 по закону, близкому к гармоническому с относительной глубиной модуляции $m \geqslant 0{,}2$.

При $c = c_0$ и натяжении $h = 5$ кг спектр первых 4—5 собственных частот поперечных колебаний ленты практически был эквидистантным и на низшей собственной частоте $f_0 = 13$ Гц, добротность $Q \geqslant 40$.

Индикация колебаний осуществлялась с помощью установленного вблизи ленты микрофона, с клемм которого напряжение подавалось на осциллограф. Таким образом, наблюдалась производная от функции поперечного смещения в фиксированном сечении исследуемой распределенной системы.

Частота F модуляции упругого закрепления изменялась от 10 до 70 Гц. В этом диапазоне было обнаружено несколько зон параметрической неустойчивости. В нечетных зонах ($F = f_0$ и $F = 3f_0$) возбуждались колебания, форма которых близка к гармонической (фиг. 6, *а*), а в четных ($F = 2f_0$ и $F=4f_0$)—импульсные колебания (фиг. 6, *б* — *г*). Форма последних существенно изменялась при перемещении микрофона вдоль ленты. Вблизи закрепленного конца наблюдались однополярные импулься (фиг. 6, *в*), а в середине — двухполярные (фиг. 6, *г*).

В пределах зоны неустойчивости имели место качественно различные режимы возбуждения импульсов. Они либо пропадали через один (фиг. 6, *д*), либо следовали группами (фиг. 6, *е*). Последнее, по-видимому, обусловлено нелинейными свойствами исследуемой системы.

В заключение заметим, что наблюдаемые в исследуемой системе эффекты параметрического возбуждения импульсов имеют много общего с аналогичными эффектами в электродинамических распределенных системах с изменяющимися во времени распределенными [7] и сосредоточенными параметрами [8].

Поступила 5 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Весницкий А. И., Потапов А. И.** Качественный метод исследования волновых процессов в системах с изменяющимися во времени размерами.— В кн.: Динамика систем. Горький, изд. Горьк. ун-та, 1975, № 7.
2. **Rayleigh (Strutt J. W.)** On the pressure of vibrations.— «Phil. Mag.», 1902, ser. 6, vol. 3, N 15, p. 338.
3. **Николаи Е. Л.** О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно меняется.— В кн.: Труды по механике. М., ГИТТЛ, 1955.
4. **Горошко О. А., Савин Г. Н.** Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины. Киев, «Наукова думка», 1971.
5. **Весницкий А. И., Потапов А. И.** Некоторые общие свойства волновых явлений в одномерных механических системах переменной длины.— ПМ, 1975, т. 11, вып. 4, с. 98.
6. **Красильников В. Н., Панкратов А. М.** Электромагнитные поля в резонаторах с колеблющимися границами.— В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Ленинград, изд. Ленингр. ун-та, 1968, № 8, с. 59.
7. **Весницкий А. И., Островский Л. А., Папко В. В., Шабанов В. Н.** О параметрической генерации импульсов.— «Письма в ЖЭТФ», 1969, т. 9, № 5, с. 274.
8. **Кабанов Д. А., Никулин С. М.** Генерация импульсов в линии передачи с параметрическими диодами.— «Радиотехника и электроника», 1973, т. 17, № 8, с. 1756.

УДК 535.231.6 : 537.227 + 533.6.011.72

МАЛОИНЕРЦИОННЫЕ ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРИЕМНИКИ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИАПАЗОНЕ 40—1100 НМ

Ю. Н. Киселев, В. З. Крохин

(*Москва*)

Пироэлектрические приемники излучения, в которых используется резкая температурная зависимость спонтанной поляризации в сегнетоэлектриках от температуры, обладают сравнительно высокой чувствительностью, неселективностью в широком спектральном диапазоне и малой инертностью [1, 2]. Обычно пироприемники применялись для индикации инфракрасного излучения.

Рассмотрим работу пироприемника продольного типа на основе сегнетоэлектрического кристалла, в котором вектор поляризации P направлен по оси x перпендикулярно электродам и излучение поглощается одним из электродов. Пироэлектрический ток, возникающий в каком-либо элементе кристалла $\Delta x\Delta y\Delta z$, определяется изменением поляризации во времени $dq/dt = \Delta y\Delta z dP/dt$, а среднее значение тока в кристалле пропорционально изменению средней температуры кристалла

$$\frac{dq}{dt} = \frac{A}{d}\int_0^d \frac{dP}{dT}\frac{dT}{dt}dx; \quad \frac{dP}{dT} = \gamma; \quad \frac{1}{d}\int_0^d \frac{dT}{dt}dx = \frac{d\bar{T}}{dt}; \quad \frac{dq}{dt} = A\gamma\frac{d\bar{T}}{dt},$$

где A — площадь поверхности кристалла, воспринимающей излучение; d — толщина кристалла в направлении распространения тепловой волны; $\gamma = dP/dT$ — пироэлектрический коэффициент, постоянный в некоторой области температур ниже температуры Кюри.