

УДК 539.3

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО УДАРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГОВЯЗКИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ОДНОГО ИЗ ТОРЦОВ

И. Гуй, Ц. Сюй, Ц. Ма

Университет Фудань, 200433 Шанхай, Китай

E-mails: 15110290002@fudan.edu.cn, 16210290006@fudan.edu.cn, jmama@fudan.edu.cn

Исследовано динамическое выпучивание цилиндрической оболочки под действием осевого удара по одному из ее торцов абсолютно жестким массивным телом, при этом другой торец оболочки закреплен на неподвижной опоре с помощью упругой пружины и демпфера. Получены динамические уравнения для осевого напряжения и радиального смещения оболочки. С использованием энергетического равенства определен критерий динамического выпучивания оболочки. Исследовано влияние краевых условий на критическую скорость ударника. Установлено, что до того момента времени, в который волна напряжений отражается от закрепленного торца оболочки, краевые условия не влияют на величину критической скорости ударника. После отражения волны напряжения критическая скорость ударника уменьшается с увеличением его массы и жесткости пружины и увеличивается с увеличением коэффициента вязкости демпфера. Установлено, что при значениях времени, меньших момента, в который волна напряжения достигает левого торца оболочки, оболочка выпучивается раньше при больших значениях вязкости демпфера и жесткости пружины, а при значениях времени, больших указанного момента, оболочка выпучивается раньше при небольших значениях вязкости демпфера и жесткости пружины.

Ключевые слова: упругая цилиндрическая оболочка, краевые условия общего вида, энергетическое уравнение, динамическое выпучивание.

DOI: 10.15372/PMTF20190416

**Введение.** Начиная с 60-х гг. XX в. интенсивно проводятся исследования закономерностей выпучивания конструкций при их динамическом нагружении [1, 2]. В частности, рассматривались цилиндрические оболочки, широко используемые в различных областях техники [3–5], например для предотвращения соударений тел и поглощения энергии. Начиная с 80-х гг. с помощью теории распространения волн напряжений выполнены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, посвященные определению критериев выпучивания оболочек при действии на них ударных нагрузок. В работе [6] представлены результаты экспериментальных исследований выпучивания оболочек при динамическом нагружении. Установлено, что распространение волны напряжений оказывает существенное влияние на процесс выпучивания. Результаты исследований выпучивания цилиндрических оболочек при различных краевых условиях содержатся также в работах [7–9]. В [10] изучена бифуркация оболочки при распространении в ней волны напряжений, возникающей вследствие приложения к оболочке ступенчатой нагрузки. В [11] с

использованием асимптотических и численных методов получена приближенная формула, позволяющая определить критическую нагрузку, при которой происходит выпучивание оболочки, а также моды выпучивания. Кроме того, в работе [11] рассмотрены различные способы закрепления торцов оболочки. В [12] выполнено численное моделирование процесса выпучивания оболочек при наличии начальных несовершенств. В [13] с использованием энергетических принципов исследовано выпучивание цилиндрической оболочки при ударе по ней жестким ударником в осевом направлении.

В данной работе изучается выпучивание цилиндрической оболочки вследствие удара по ней в осевом направлении абсолютно твердого тела. Рассматриваются краевые условия общего типа.

**1. Динамические уравнения цилиндрической оболочки.** Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка длиной  $L$  и толщиной  $h$  с радиусом нейтральной поверхности  $r$ . Используются следующие обозначения констант материала оболочки:  $\rho$  — плотность,  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Задача решается в цилиндрической системе координат  $(x, \theta, z)$ . Через  $u, v, w$  обозначены осевая, окружная и радиальная компоненты вектора смещений соответственно. Для вывода динамических уравнений оболочки используется вариационный принцип Гамильтона, моментом инерции пренебрегается.

Выражения для кинетической энергии оболочки  $T$  и энергии деформации  $U$  имеют вид

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r d\theta dx,$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\varepsilon_{x\theta} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z}) r d\theta dx dz, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, \theta$ ) — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа — Лява выражения для деформаций в произвольной точке оболочки записываются в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + z\chi_{ij},$$

где  $z$  — расстояние от точки до нейтральной поверхности;  $\chi_{ij}$  — компоненты тензора кривизны нейтральной поверхности;  $\varepsilon_{ij}^0$  — деформации нейтральной поверхности.

Принимаются следующие нелинейные соотношения между компонентами тензора деформаций и вектора смещений:

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2, \quad \varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta},$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{\partial \theta_\theta}{r \partial \theta}, \quad \chi_{x\theta} = \frac{\partial \theta_x}{r \partial \theta} + \frac{\partial \theta_\theta}{\partial x}.$$

Здесь  $\theta_x, \theta_\theta$  — углы поворота нормали к срединной поверхности вокруг осей  $x$  и  $\theta$  соответственно:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_\theta = \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{r \partial \theta}.$$

Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\theta z}$  выражаются через углы поворота  $\theta_x, \theta_\theta$  и производные от прогиба  $w$ :

$$\varepsilon_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \theta_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta},$$

компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  связаны соотношениями закона Гука

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \mu\varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{x\theta}.$$

Выражение для работы внешних сил  $\xi$ , действующих на оболочку, записывается в виде

$$\xi = \int_0^L \int_0^{2\pi} (P_x u + P_\theta v + P_z w) r d\theta dx, \quad (2)$$

где  $P_x, P_\theta, P_z$  — компоненты вектора поверхностных сил в направлении осей  $x, \theta, z$ .

Подставляя (1), (2) в уравнение

$$\delta \int_0^{t_1} (T - U + \xi) dt = 0,$$

являющееся аналитической записью вариационного принципа Гамильтона, получаем динамические уравнения цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= P_x + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{r \partial \theta}, & \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= P_\theta + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{r \partial \theta}, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= P_z + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( N_{\theta\theta} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{x\theta} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N_{ij}, M_{ij}$  — внутренние усилия и моменты, отнесенные к единице длины нейтральной поверхности:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz, \quad i, j = x, \theta. \quad (4)$$

Далее считается, что на оболочку не действуют поверхностные силы, т. е.  $P_x = P_\theta = P_z = 0$ .

Подставляя выражения (4) в (3) и выполняя интегрирование, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial x \partial \theta} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \\ &+ \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 + \frac{1-\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial x \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \\ &+ \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 + \mu \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2D}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{\theta\theta} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + 2N_{x\theta} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} + \frac{Eh}{r^2} w + \frac{Eh}{r(1-\mu^2)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{Eh\mu}{1-\mu^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

являющиеся уравнениями движения в осевом, окружном и радиальном направлениях соответственно. Волна напряжений, распространяющаяся в окружном направлении, появляется только при нагрузках, вызывающих кручение оболочки. Поскольку в данной работе исследуется движение оболочки под действием осевого импульса, уравнение (6) далее не рассматривается.

**2. Решение динамического уравнения.** Предполагается, что при действии осевого импульса в оболочке распространяется только продольная волна в направлении оси  $x$ . Уравнение, описывающее распространение продольной волны, следует из уравнения (5) в предположении  $v = w = 0$ :

$$(1 - \mu^2)\rho h \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = Eh \frac{\partial u^2}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Пренебрегая в уравнении (7) поперечной силой инерции, для прогиба  $w$  получаем уравнение

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{r^2} w + \frac{D}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2D}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} = 0, \quad (9)$$

где  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ .

Схема цилиндрической оболочки и закрепления ее левого торца приведена на рис. 1 ( $k$ ,  $c_z$  — жесткость пружины и вязкость демпфера соответственно). По правому торцу оболочки ударяет абсолютно твердое тело массой  $m$  со скоростью (соударения)  $v_c$ . Для этой задачи начальные условия для уравнения (8) записываются в следующем виде:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq L, \\ v_c, & x = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Краевое условие на правом торце оболочки имеет вид

$$AE \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(0, t), \quad (11)$$

где  $A \approx 2\pi rh$  — площадь поперечного сечения оболочки.

На торце оболочки, соединенном с жесткой стенкой с помощью упругой пружины и демпфера, краевые условия записываются следующим образом:

$$ku(L, t) + c_z \frac{\partial}{\partial t} u(L, t) = EA \frac{\partial}{\partial x} u(L, t). \quad (12)$$

В соответствии с волновой теорией [14] распределение напряжений в оболочке до момента отражения волны от левого торца  $t^*$  и после этого момента определяется в результате решения уравнения (8) с начальными и краевыми условиями (10)–(12):

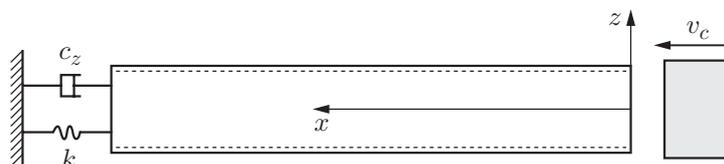


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки

— до момента отражения ( $0 \leq t \leq L/c_e$ )

$$\sigma_{BR}(x, t) = \begin{cases} -(Ev_c/c_e) e^{-(cet-x)/(\lambda L)}, & 0 \leq x \leq c_e t, \\ 0, & c_e t \leq x \leq L; \end{cases} \quad (13)$$

— после момента отражения ( $L/c_e \leq t \leq 2L/c_e$ )

$$\sigma_{AR}(x, t) = \begin{cases} -\frac{Ev_c}{c_e} e^{-(cet-x)/(\lambda L)}, & 0 \leq x \leq 2L - c_e t, \\ -\left(\frac{Ev_c}{c_e} \frac{\lambda L \beta' - \gamma}{\lambda L \beta' + 1} e^{-(cet-x)/(\lambda L)} - \frac{Ev_{cr}}{c_e} \frac{\lambda L \beta' (1 + \gamma)}{\lambda L \beta' + 1} e^{\beta'(cet+x-2L)} + \right. \\ \quad \left. + \frac{Ev_c}{c_e} e^{-(cet-x)/(\lambda L)}\right), & \lambda L \beta' + 1 \neq 0, \quad 2L - c_e t \leq x \leq L, \\ -\frac{Ev_c}{c_e} \{ -[\gamma + \beta'(cet+x-2L)(\gamma+1)] e^{\beta'(cet+x-2L)} + e^{\beta'(cet-x)} \}, \\ \quad \lambda L \beta' + 1 = 0, & 2L - c_e t \leq x \leq L, \end{cases} \quad (14)$$

где  $c_e = \sqrt{E/[\rho(1-\mu^2)]}$  — скорость волны напряжения;  $\beta' = -k/(AE + c_z c_e)$ ;  $\gamma = (AE - c_z c_e)/(AE + c_z c_e)$ ;  $\lambda = m/(AL\rho)$ .

В уравнении (9) перейдем к безразмерным переменным:

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l_0}, \quad \bar{t} = \frac{c_e t}{l_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l_0}, \quad l_0 = \frac{m}{\rho A}. \quad (15)$$

Решение уравнения (9), записанное в безразмерных переменных, будем искать методом разделения переменных:

$$\bar{w}(\bar{x}, \theta, \bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t})g(\theta, \bar{t}). \quad (16)$$

Учитывая периодичность функции  $w(x, \theta, t)$  по переменной  $\theta$ , функцию  $g(\theta, \bar{t})$  примем в виде

$$g(\theta, \bar{t}) = e_1(\bar{t}) \cos n\theta + e_2(\bar{t}) \sin n\theta, \quad (17)$$

где  $n$  — номер моды прогиба оболочки. Подставляя соотношения (15)–(17) в уравнение (9), получаем

$$\frac{h^2 r^2}{12(1-\mu^2)l_0^4} \frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^4} + \left( \frac{Ev_{cr} r^2}{c_e l_0^2} - \frac{n^2 h^2}{6(1-\mu^2)l_0^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + \left( 1 + \frac{n^4 h^2}{12r^2(1-\mu^2)} \right) f = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$w(x, t) = a \cos(\alpha x/l_0) + b \sin(\alpha x/l_0) + c \cos(\beta x/l_0) + d \sin(\beta x/l_0), \quad (19)$$

где  $a, b, c, d$  — функции времени  $t$ ,

$$\alpha = \sqrt{(G_2 + \sqrt{G_2^2 - 4G_1 G_3})/(2G_1)}, \quad \beta = \sqrt{(G_2 - \sqrt{G_2^2 - 4G_1 G_3})/(2G_1)},$$

$$G_1 = \frac{h^2 r^2}{12(1-\mu^2)l_0^4}, \quad G_2 = \frac{Ev_{cr} r^2}{c_e l_0^2} - \frac{n^2 h^2}{6(1-\mu^2)l_0^2}, \quad G_3 = 1 + \frac{n^4 h^2}{12r^2(1-\mu^2)}.$$

**3. Условие бифуркации процесса выпучивания.** Будем полагать, что при действии на оболочку импульса в осевом направлении она мгновенно выпучивается в момент, когда фронт волны напряжений находится на некотором расстоянии от правого торца оболочки. С использованием закона сохранения энергии деформации, кинетической энергии и работы внешних сил можно записать энергетические равенства, на основе которых определяется критическая скорость ударника как на интервале времени, предшествующем моменту отражения волны напряжения от левого торца оболочки, так и на интервале времени после момента отражения.

3.1. *Определение критической скорости на интервале времени до момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки.* На интервале времени до момента отражения энергетическое равенство имеет следующий вид:

$$\int_0^l \sigma_{BR} h \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} dx = D \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} dx + \rho h \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx. \quad (20)$$

Подставляя соотношения (13), (19) в уравнение (20), получаем систему уравнений относительно величин  $a, b, c, d$ , которую можно записать в матричной форме

$$\mathbf{X}_1 \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{b} \\ \ddot{c} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} + \mathbf{Y}_1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}}{\alpha^4} & \frac{g_{12}}{\alpha^4} & \frac{g_{13}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{14}}{\alpha^2 \beta^2} \\ \frac{g_{12}}{\alpha^4} & \frac{g_{15}}{\alpha^4} & \frac{g_{16}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{17}}{\alpha^2 \beta^2} \\ \frac{g_{13}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{16}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{18}}{\beta^4} & \frac{g_{19}}{\beta^4} \\ \frac{g_{14}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{17}}{\alpha^2 \beta^2} & \frac{g_{19}}{\beta^4} & \frac{g_{20}}{\beta^4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{11} - g_1 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{12} - g_2 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{13} - g_3 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{14} - g_4 \\ \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{12} - g_2 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{15} - g_5 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{16} - g_6 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{17} - g_7 \\ \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{13} - g_3 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{16} - g_6 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{18} - g_8 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{19} - g_9 \\ \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{14} - g_4 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{17} - g_7 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{19} - g_9 & \frac{D}{\rho h c_e^2 l_0^2} g_{20} - g_{10} \end{bmatrix},$$

$$g_1 = \alpha^2 E v_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} - 1 - (e^{\bar{l}} \cos 2\alpha \bar{l} - 1 + 2\alpha e^{\bar{l}} \sin 2\alpha \bar{l}) / (1 + 4\alpha^2)] / (\rho c_e^3),$$

$$g_2 = -\alpha^2 E v_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} \sin 2\alpha \bar{l} - 2\alpha (e^{\bar{l}} \cos 2\alpha \bar{l} - 1)] / [\rho c_e^3 (1 + 4\alpha^2)],$$

$$g_3 = -\frac{\alpha \beta E v_c e^{-\bar{t}}}{\rho c_e^3} \left( \frac{e^{\bar{l}} \cos(\alpha + \beta) \bar{l} - 1 + (\alpha + \beta) e^{\bar{l}} \sin(\alpha + \beta) \bar{l}}{1 + (\alpha + \beta)^2} - \frac{e^{\bar{l}} \cos(\alpha - \beta) \bar{l} - 1 + (\alpha - \beta) e^{\bar{l}} \sin(\alpha - \beta) \bar{l}}{1 + (\alpha - \beta)^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= -\frac{\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}}}{\rho c_e^3} \left( \frac{e^{\bar{l}} \sin(\alpha + \beta)\bar{l} - (\alpha + \beta) e^{\bar{l}} \cos(\alpha + \beta)\bar{l} + \alpha + \beta}{1 + (\alpha + \beta)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\bar{l}} \sin(\alpha - \beta)\bar{l} - (\alpha - \beta) e^{\bar{l}} \cos(\alpha - \beta)\bar{l} + \alpha - \beta}{1 + (\alpha - \beta)^2} \right), \\
g_5 &= \alpha^2 Ev_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} - 1 + (e^{\bar{l}} \cos 2\alpha\bar{l} - 1 + 2\alpha e^{\bar{l}} \sin 2\alpha\bar{l}) / (1 + 4\alpha^2)] / (\rho c_e^3), \\
g_6 &= -\frac{\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}}}{\rho c_e^3} \left( \frac{e^{\bar{l}} \sin(\alpha + \beta)\bar{l} - (\alpha + \beta) e^{\bar{l}} \cos(\alpha + \beta)\bar{l} + \alpha + \beta}{1 + (\alpha + \beta)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\bar{l}} \sin(\beta - \alpha)\bar{l} - (\beta - \alpha) e^{\bar{l}} \cos(\beta - \alpha)\bar{l} + \beta - \alpha}{1 + (\beta - \alpha)^2} \right), \\
g_7 &= \frac{\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}}}{\rho c_e^3} \left( \frac{e^{\bar{l}} \cos(\alpha + \beta)\bar{l} - 1 + (\alpha + \beta) e^{\bar{l}} \sin(\alpha + \beta)\bar{l}}{1 + (\alpha + \beta)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\bar{l}} \cos(\alpha - \beta)\bar{l} - 1 + (\alpha - \beta) e^{\bar{l}} \sin(\alpha - \beta)\bar{l}}{1 + (\alpha - \beta)^2} \right), \\
g_8 &= \beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} - 1 - (e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l} - 1 + 2\beta e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l}) / (1 + 4\beta^2)] / (\rho c_e^3), \\
g_9 &= -\beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l} - 2\beta(e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l} - 1)] / [\rho c_e^3(1 + 4\beta^2)], \\
g_{10} &= \beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{l}} - 1 + (e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l} - 1 + 2\beta e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l})] / [\rho c_e^3(1 + 4\beta^2)], \\
g_{11} &= \alpha^4(\bar{l} + \sin 2\alpha\bar{l}) / (2\alpha), \quad g_{12} = \alpha^3(1 - \cos 2\alpha\bar{l}) / 2, \\
g_{13} &= \alpha^2\beta^2[\sin(\alpha + \beta)\bar{l} / (\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\bar{l} / (\alpha - \beta)], \\
g_{14} &= \alpha^2\beta^2\{[1 - \cos(\alpha - \beta)\bar{l}] / (\alpha - \beta) + [\cos(\alpha + \beta)\bar{l} - 1] / (\alpha + \beta)\}, \\
g_{15} &= \alpha^4(\bar{l} - \sin 2\alpha\bar{l}) / (2\alpha), \quad g_{16} = \alpha^2\beta^2\{[1 - \cos(\beta - \alpha)\bar{l}] / (\beta - \alpha) + [\cos(\alpha + \beta)\bar{l} - 1] / (\alpha + \beta)\}, \\
g_{17} &= \alpha^2\beta^2[\sin(\alpha + \beta)\bar{l} / (\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\bar{l} / (\alpha - \beta)], \quad g_{18} = \beta^4(\bar{l} + \sin 2\beta\bar{l}) / (2\beta), \\
g_{19} &= \beta^3(1 - \cos 2\beta\bar{l}) / 2, \quad g_{20} = \beta^4(\bar{l} - \sin 2\beta\bar{l}) / (2\beta).
\end{aligned}$$

Для исследования устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка используется дискриминантный метод. В соответствии с этим методом критическая скорость ударника, при которой происходит выпучивание оболочки в тот момент, когда фронт волны напряжения находится на расстоянии  $l$  от правого торца оболочки, определяется из решения уравнения

$$|\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{Y}_1| = 0. \quad (21)$$

3.2. *Определение критической скорости после момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки.* После момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки энергетическое равенство имеет следующий вид:

$$\int_0^l \sigma_{BR} h \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} dx + \int_l^L \sigma_{AR} h \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} dx = D \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} dx + \rho h \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx. \quad (22)$$

С использованием соотношений (13), (14), (19) и равенства (22) получаем уравнение (см. подп. 3.1)

$$|\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{Y}_2| = 0, \quad (23)$$

из решения которого определяется критическая скорость ударника. В уравнении (23)

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\bar{g}_{11}}{\alpha^4} & \frac{\bar{g}_{12}}{\alpha^4} & \frac{\bar{g}_{13}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{14}}{\alpha^2\beta^2} \\ \frac{\bar{g}_{12}}{\alpha^4} & \frac{\bar{g}_{15}}{\alpha^4} & \frac{\bar{g}_{16}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{17}}{\alpha^2\beta^2} \\ \frac{\bar{g}_{13}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{16}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{18}}{\beta^4} & \frac{\bar{g}_{19}}{\beta^4} \\ \frac{\bar{g}_{14}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{17}}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\bar{g}_{19}}{\beta^4} & \frac{\bar{g}_{20}}{\beta^4} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{11} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{11} - f_1 + f_{11} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_1 - g_1, \quad (\mathbf{Y}_2)_{12} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{12} - f_2 + f_{12} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_2 - g_2,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{13} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{13} - f_3 + f_{13} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_3 - g_3, \quad (\mathbf{Y}_2)_{14} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{14} - f_4 + f_{14} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_4 - g_4,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{21} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{12} - f_2 + f_{12} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_2 - g_2, \quad (\mathbf{Y}_2)_{22} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{15} - f_5 + f_{15} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_5 - g_5,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{23} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{16} - f_6 + f_{16} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_6 - g_6, \quad (\mathbf{Y}_2)_{24} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{17} - f_7 + f_{17} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_7 - g_7,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{31} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{13} - f_3 + f_{13} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_3 - g_3, \quad (\mathbf{Y}_2)_{32} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{16} - f_6 + f_{16} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_6 - g_6,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{33} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{18} - f_8 + f_{18} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_8 - g_8,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{34} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{1191} - f_9 + f_{19} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_9 - g_9,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{41} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{14} - f_4 + f_{14} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_4 - g_4, \quad (\mathbf{Y}_2)_{42} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{17} - f_7 + f_{17} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_7 - g_7,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{43} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{1191} - f_9 + f_{19} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_9 - g_9,$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{44} = \frac{D}{\rho hc_e^2 l_0^2} \bar{g}_{20} - f_{10} + f_{20} - \frac{\lambda L \beta - \gamma}{\lambda L \beta + 1} f_{101} - g_{10},$$

$$\bar{g}_{11} = \alpha^4 (\bar{L} + \sin 2\alpha \bar{L} / (2\alpha)), \quad \bar{g}_{12} = \alpha^4 [(1 - \cos 2\alpha \bar{L}) / (2\alpha)],$$

$$\bar{g}_{13} = \alpha^2 \beta^2 [\sin(\alpha + \beta) \bar{L} / (\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \bar{L} / (\alpha - \beta)],$$

$$\bar{g}_{14} = \alpha^2 \beta^2 \{ [1 - \cos(\alpha - \beta) \bar{L}] / (\alpha - \beta) + [\cos(\alpha + \beta) \bar{L} - 1] / (\alpha + \beta) \}, \quad \bar{g}_{15} = \alpha^4 (\bar{L} - \sin 2\alpha \bar{L} / (2\alpha)),$$

$$\bar{g}_{16} = \alpha^2 \beta^2 \{ [1 - \cos(\beta - \alpha) \bar{L}] / (\beta - \alpha) + [\cos(\alpha + \beta) \bar{L} - 1] / (\alpha + \beta) \},$$

$$\bar{g}_{17} = \alpha^2 \beta^2 [\sin(\alpha + \beta) \bar{L} / (\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \bar{L} / (\alpha - \beta)], \quad \bar{g}_{18} = \beta^4 (\bar{L} + \sin 2\beta \bar{L} / (2\beta)),$$

$$\bar{g}_{19} = \beta^3 (1 - \cos 2\beta \bar{L}) / 2, \quad \bar{g}_{20} = \beta^4 (\bar{L} - \sin 2\beta \bar{L} / (2\beta)),$$

$$f_1 = \alpha^2 E v_e e^{-\bar{t}} [e^{\bar{L}} (1 - \cos 2\alpha \bar{L} - 2\alpha \sin 2\alpha \bar{L}) - e^{\bar{l}} (1 - \cos 2\alpha \bar{l} - 2\alpha \sin 2\alpha \bar{l})] / [\rho c_e^3 (1 + 4\alpha^2)],$$

$$f_2 = -\alpha^2 E v_e e^{-\bar{t}} [e^{\bar{L}} \sin 2\alpha \bar{L} - e^{\bar{l}} \sin 2\alpha \bar{l} - 2\alpha (e^{\bar{L}} \cos 2\alpha \bar{L} - e^{\bar{l}} \cos 2\alpha \bar{l})] / [\rho c_e^3 (1 + 4\alpha^2)],$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= -\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}} \{ [e^{\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l} + (\alpha+\beta)(e^{\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l})] - \\
&\quad - [e^{\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l} + (\alpha-\beta)(e^{\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l})] \} / \{ \rho c_e^3 [1 + (\alpha+\beta)^2] \}, \\
f_4 &= -\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}} \{ [e^{\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l} - (\alpha+\beta)(e^{\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l})] + \\
&\quad + [e^{\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l} - (\alpha-\beta)(e^{\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l})] \} / \{ \rho c_e^3 [1 + (\alpha+\beta)^2] \}, \\
f_5 &= \alpha^2 Ev_c e^{-\bar{t}} \{ e^{\bar{L}} - e^{\bar{l}} + [e^{\bar{L}} \cos 2\alpha\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos 2\alpha\bar{l} + 2\alpha(e^{\bar{L}} \sin 2\alpha\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin 2\alpha\bar{l})] \} / [\rho c_e^3 (1 + 4\alpha^2)], \\
f_6 &= -\alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}} \{ [e^{\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l} - (\alpha+\beta)(e^{\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l})] + \\
&\quad + [e^{\bar{L}} \sin(\beta-\alpha)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\beta-\alpha)\bar{l} - (\beta-\alpha)(e^{\bar{L}} \cos(\beta-\alpha)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\beta-\alpha)\bar{l})] \} / \{ \rho c_e^3 [1 + (\alpha+\beta)^2] \}, \\
f_7 &= \alpha\beta Ev_c e^{-\bar{t}} \{ [e^{\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l} + (\alpha+\beta)(e^{\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l})] + \\
&\quad + [e^{\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l} + (\alpha-\beta)(e^{\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l})] \} / \{ \rho c_e^3 [1 + (\alpha+\beta)^2] \}, \\
f_8 &= \beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} \{ e^{\bar{L}} - e^{\bar{l}} - [e^{\bar{L}} \cos 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l} + 2\beta(e^{\bar{L}} \sin 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l})] \} / [\rho c_e^3 (1 + 4\beta^2)], \\
f_9 &= -\beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} [e^{\bar{L}} \sin 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l} - 2\beta(e^{\bar{L}} \cos 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l})] / [\rho c_e^3 (1 + 4\beta^2)], \\
f_{10} &= \beta^2 Ev_c e^{-\bar{t}} \{ e^{\bar{L}} - e^{\bar{l}} + [e^{\bar{L}} \cos 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \cos 2\beta\bar{l} + 2\beta(e^{\bar{L}} \sin 2\beta\bar{L} - e^{\bar{l}} \sin 2\beta\bar{l})] \} / [\rho c_e^3 (1 + 4\beta^2)], \\
f_{11} &= \alpha^2 \xi \left( \frac{e^{l_0\beta'\bar{L}} - e^{l_0\beta'\bar{l}}}{l_0\beta'} - \frac{e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos 2\alpha\bar{l}}{l_0\beta'(l_0\beta' + 4\alpha^2/(l_0\beta'))} + \frac{2\alpha(e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin 2\alpha\bar{l})}{l_0\beta'(l_0\beta' + 4\alpha^2/(l_0\beta'))} \right), \\
f_{12} &= -\alpha^2 \xi \frac{e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin 2\alpha\bar{l} - 2\alpha(e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos 2\alpha\bar{l}) / (l_0\beta')}{l_0\beta' + 4\alpha^2/(l_0\beta')}, \\
f_{13} &= -\alpha\beta\xi \{ e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l} + (\alpha+\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - \\
&\quad - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l}] - e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l} + \\
&\quad + (\alpha-\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l}] \} / \{ l_0\beta'[l_0\beta' + (\alpha+\beta)^2/(l_0\beta')] \}, \\
f_{14} &= -\alpha\beta\xi \{ e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l} - (\alpha+\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - \\
&\quad - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l}] + e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l} - \\
&\quad - (\alpha-\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l}] \} / \{ l_0\beta'[l_0\beta' + (\alpha+\beta)^2/(l_0\beta')] \}, \\
f_{15} &= \alpha^2 \xi \left( \frac{e^{l_0\beta'\bar{L}} - e^{l_0\beta'\bar{l}}}{l_0\beta'} + \frac{e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos 2\alpha\bar{l}}{l_0\beta'(l_0\beta' + 4\alpha^2/(l_0\beta'))} + \frac{2\alpha(e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin 2\alpha\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin 2\alpha\bar{l})}{l_0\beta'(l_0\beta' + 4\alpha^2/(l_0\beta'))} \right), \\
f_{16} &= -\alpha\beta\xi \{ e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l} - (\alpha+\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - \\
&\quad - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l}] + e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\beta-\alpha)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\beta-\alpha)\bar{l} - \\
&\quad - (\beta-\alpha)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\beta-\alpha)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\beta-\alpha)\bar{l}] \} / \{ l_0\beta'[l_0\beta' + (\alpha+\beta)^2/(l_0\beta')] \}, \\
f_{17} &= \alpha\beta\xi \{ e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha+\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha+\beta)\bar{l} + (\alpha+\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha+\beta)\bar{L} - \\
&\quad - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha+\beta)\bar{l}] + e^{l_0\beta'\bar{L}} \cos(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \cos(\alpha-\beta)\bar{l} + \\
&\quad + (\alpha-\beta)[e^{l_0\beta'\bar{L}} \sin(\alpha-\beta)\bar{L} - e^{l_0\beta'\bar{l}} \sin(\alpha-\beta)\bar{l}] \} / \{ l_0\beta'[l_0\beta' + (\alpha+\beta)^2/(l_0\beta')] \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{18} &= \beta^2 \xi \left( \frac{e^{l_0 \beta' \bar{L}} - e^{l_0 \beta' \bar{l}}}{l_0 \beta'} - \frac{e^{l_0 \beta' \bar{L}} \cos 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \cos 2\beta \bar{l}}{l_0 \beta' + 4\beta^2 / (l_0 \beta')} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\beta(e^{l_0 \beta' \bar{L}} \sin 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \sin 2\beta \bar{l}) / (l_0 \beta')}{l_0 \beta' + 4\beta^2 / (l_0 \beta')} \right), \\
f_{19} &= -\beta^2 \xi \frac{e^{l_0 \beta' \bar{L}} \sin 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \sin 2\beta \bar{l} - 2\beta(e^{l_0 \beta' \bar{L}} \cos 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \cos 2\beta \bar{l}) / (l_0 \beta')}{l_0 \beta' + 4\beta^2 / (l_0 \beta')}, \\
f_{20} &= \beta^2 \xi \left( \frac{e^{l_0 \beta' \bar{L}} - e^{l_0 \beta' \bar{l}}}{l_0 \beta'} + \frac{e^{l_0 \beta' \bar{L}} \cos 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \cos 2\beta \bar{l}}{l_0 \beta' + 4\beta^2 / (l_0 \beta')} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\beta(e^{l_0 \beta' \bar{L}} \sin 2\beta \bar{L} - e^{l_0 \beta' \bar{l}} \sin 2\beta \bar{l}) / (l_0 \beta')}{l_0 \beta' + 4\beta^2 / (l_0 \beta')} \right), \\
\xi &= E v_c \lambda L \beta' (1 + \gamma) e^{l_0 \beta' (\bar{l} - 2\bar{L})} / [\rho c_e^3 (\lambda L \beta' + 1)].
\end{aligned}$$

Из решения уравнения (23) определяется критическая скорость ударника, при которой происходит выпучивание оболочки в тот момент, когда фронт волны напряжения находится на расстоянии  $l$  от правого торца оболочки.

**4. Результаты численного решения и их анализ.** До того момента, когда фронт волны напряжения достигает левого торца оболочки, критическая скорость ударника определяется из решения уравнения (21). В это уравнение входят следующие параметры: время выпучивания  $\bar{t}$ , масса ударника  $m$ , номер моды выпучивания  $n$ , расстояние от фронта волны напряжения до правого торца оболочки  $\bar{l}$  в момент выпучивания и скорость ударника  $v_c$ . После момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки критическая скорость ударника определяется из решения уравнения (23), в которое помимо указанных выше параметров входят параметры  $k$ ,  $c_z$ , содержащиеся в краевых условиях на левом торце оболочки. В результате численного решения уравнений (21), (23) с использованием пакета Maple получены зависимости критической скорости ударника от массы ударника, времени выпучивания, жесткости пружины и вязкости демпфера. Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров:  $h = 0,002$  м,  $r = 0,04$  м,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 0,33$ ,  $L = 0,4$  м.

На рис. 2 приведена зависимость критической скорости ударника  $v_{cr}$  от его массы  $m$  при времени выпучивания  $\bar{t} = 4 < \bar{t}^*$  ( $\bar{t}^*$  — момент времени, в который волна напряжения отражается от левого торца оболочки) и различных значениях  $n$ ,  $\bar{l}$ . Чем меньше масса ударника, тем больше его критическая скорость при фиксированных значениях  $n$  и  $\bar{l}$ . На кривых можно выделить два участка, на одном из которых при незначительном изменении массы ударника критическая скорость изменяется несущественно, на другом — существенно. При фиксированных значениях  $n$  и  $m$  критическая скорость уменьшается с увеличением расстояния, на которое продвигается волна напряжения. При фиксированных массе ударника и расстоянии  $\bar{l}$ , которое проходит волна напряжения, критическая скорость при выпучивании по высокой моде больше, чем при выпучивании по низкой моде.

На рис. 3 представлена зависимость критической скорости  $v_{cr}$  от времени выпучивания  $\bar{t}$  на интервале, когда волна напряжений не достигла левого торца оболочки, при  $\bar{l} = 0,2$ . При фиксированных номере моды выпучивания  $n$  и массе ударника  $m$  с увеличением времени выпучивания критическая скорость уменьшается. При увеличении массы ударника критическая скорость уменьшается.

Зависимости, приведенные на рис. 4, получены для моментов времени, больших момента, в который происходит отражение волны напряжения от левого торца оболочки. На

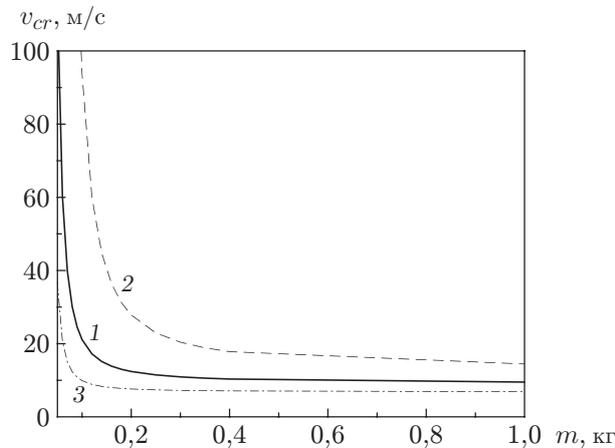


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость критической скорости от массы ударника при  $\bar{t} = 4$  и различных значениях  $n, \bar{l}$ :

1 —  $n = 1, \bar{l} = 0,2$ ; 2 —  $n = 2, \bar{l} = 0,2$ ; 3 —  $n = 1, \bar{l} = 0,3$

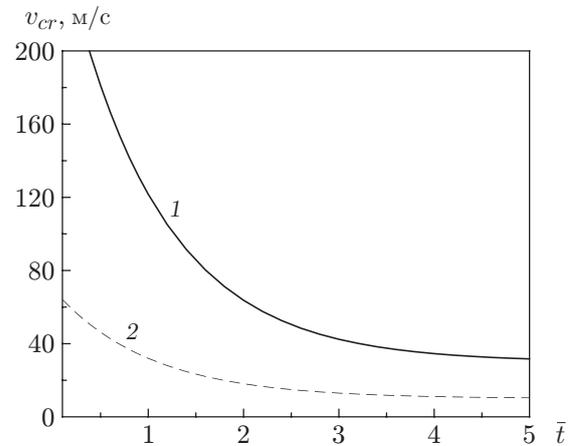


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость критической скорости от времени выпучивания при  $\bar{l} = 0,2$ ,  $n = 1$  и различных значениях  $m$ :

1 —  $m = 0,1$  кг, 2 —  $m = 0,8$  кг

рис. 4,а представлена зависимость критической скорости ударника  $v_{cr}$  от его массы  $m$ . При  $c_z = 10^{-7}$  кН·с/м,  $k = 10$  МН/м критическая скорость наименьшая (кривая 1), при  $c_z = 1$  кН·с/м,  $k = 10$  МН/м — наибольшая (кривая 3).

На рис. 4,б показана зависимость критической скорости ударника (скорости ударника, при которой происходит выпучивание оболочки)  $v_{cr}$  от времени  $\bar{t}$ , при котором происходит выпучивание. Наиболее крутой из приведенных кривых является кривая 3, наиболее пологой — кривая 2. Заметим, что кривые 2 и 3 пересекаются в точке  $\bar{t} = 7,5$ , соответствующей моменту времени, в который волна отражается от левого торца оболочки. При  $\bar{t} < 7,5$  оболочка выпучивается раньше при данных, соответствующих кривой 2 (при больших значениях вязкости демпфера и жесткости пружины), а при  $\bar{t} > 7,5$  — при данных, соответствующих кривой 3 (при небольших значениях вязкости демпфера и жесткости пружины).

На рис. 5 приведена зависимость критической скорости ударника  $v_{cr}$  от вязкости демпфера  $c_z$  в моменты времени  $\bar{t} = 5, 7, 9$ . Все три момента времени больше момента, в который происходит отражение волны напряжения от левого торца оболочки. При фиксированном значении жесткости пружины зависимость критической скорости ударника от вязкости демпфера является практически линейной. С увеличением жесткости пружины критическая скорость ударника уменьшается. Чем больше время, при котором происходит выпучивание, тем меньше критическая скорость ударника.

На рис. 6 приведены зависимости критической скорости ударника от жесткости пружины  $k$  при различных значениях вязкости и времени, при котором происходит выпучивание оболочки. При увеличении жесткости пружины критическая скорость ударника уменьшается. Чем больше время, при котором происходит выпучивание, тем меньше критическая скорость ударника. С увеличением жесткости пружины при  $k < 10$  МН/м критическая скорость уменьшается быстро, при  $k > 10$  МН/м — медленно (см. рис. 6,а). С увеличением жесткости пружины при больших значениях вязкости демпфера критическая скорость ударника изменяется медленнее, чем при малых значениях вязкости демпфера

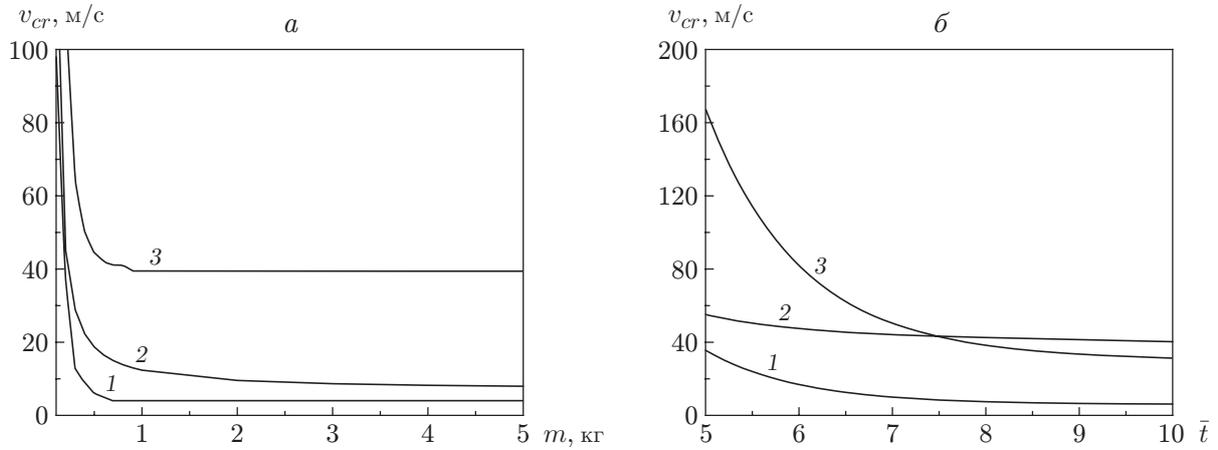


Рис. 4. Зависимости критической скорости от массы ударника (а) и времени (б) при различных значениях  $c_z, k$ :  
 1 —  $c_z = 10^{-7}$  кН·с/м,  $k = 10$  МН/м; 2 —  $c_z = 10^{-7}$  кН·с/м,  $k = 10^{-10}$  МН/м; 3 —  $c_z = 1$  кН·с/м,  $k = 10$  МН/м

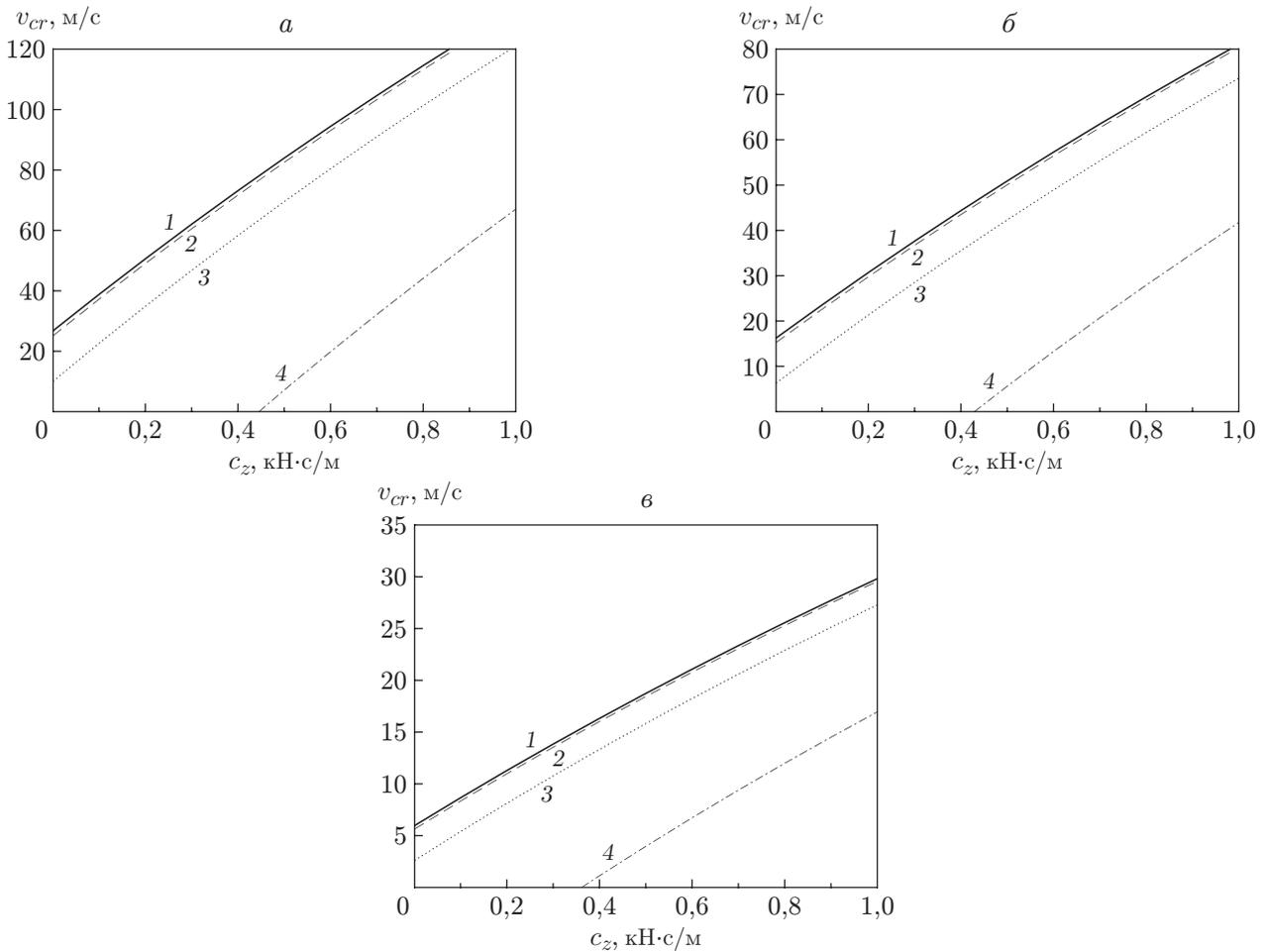


Рис. 5. Зависимость критической скорости ударника  $v_{cr}$  от вязкости демпфера  $c_z$  при различных значениях  $\bar{t}, k$ :  
 а —  $\bar{t} = 5$ , б —  $\bar{t} = 7$ , в —  $\bar{t} = 9$ ; 1 —  $k = 10^{-10}$  МН/м, 2 —  $k = 1$  МН/м, 3 —  $k = 10$  МН/м, 4 —  $k = 100$  МН/м

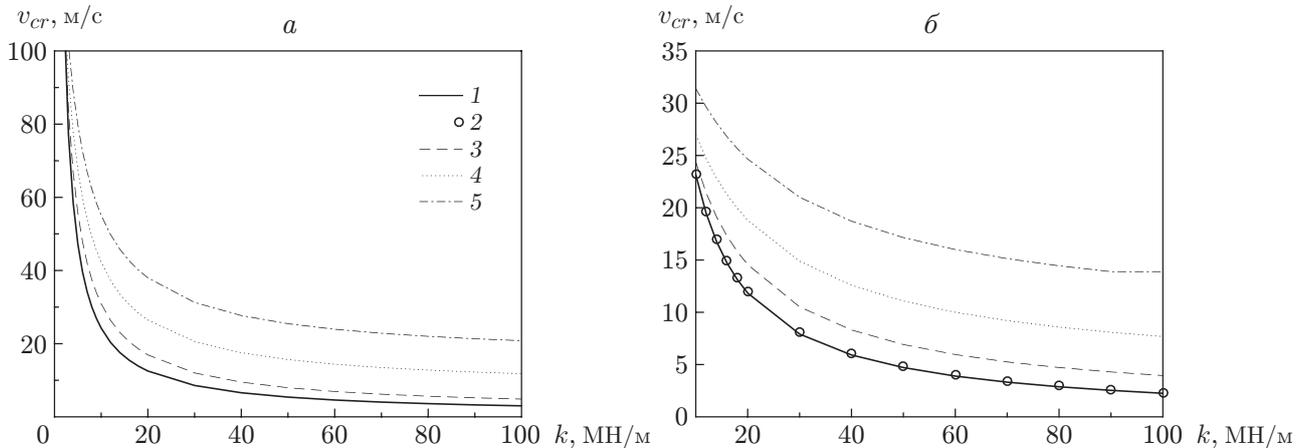


Рис. 6. Зависимость критической скорости ударника от жесткости пружины при различных значениях  $\bar{t}$ ,  $c_z$ :  
 $a - \bar{t} = 7,5$ ,  $b - \bar{t} = 9$ ; 1 —  $c_z = 10^{-7}$  кН·с/м, 2 —  $c_z = 0,1$  кН·с/м, 3 —  $c_z = 1$  кН·с/м, 4 —  $c_z = 2$  кН·с/м, 5 —  $c_z = 3$  кН·с/м

(см. рис. 6,б). При  $c_z < 0,1$  кН·с/м вязкость оказывает несущественное влияние на критическую скорость ударника, при  $c_z > 0,1$  кН·с/м критическая скорость ударника существенно зависит от вязкости демпфера.

**Закключение.** В работе изучено выпучивание цилиндрической оболочки при ударе по одному из ее торцов жесткого ударника. Другой торец оболочки прикреплен к жесткой стенке с помощью упругой пружины и демпфера. Определена критическая скорость ударника при различных значениях параметров задачи. Анализ результатов численного решения задачи позволяет сделать следующие выводы.

Если выпучивание оболочки происходит до момента времени, в который волна напряжения отражается от закрепленного торца, то краевые условия не оказывают влияния на критическую скорость ударника.

После момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки критическая скорость уменьшается с увеличением массы ударника. При малой массе ударника критическая скорость уменьшается быстро, при большой массе ударника — медленно.

При малой вязкости демпфера и большой жесткости пружины потеря устойчивости оболочки происходит быстрее.

После момента отражения волны напряжения от левого торца оболочки критическая скорость ударника увеличивается с увеличением вязкости демпфера при фиксированном значении жесткости пружины и уменьшается с увеличением жесткости пружины при фиксированном значении вязкости демпфера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Bityurin A. A.** Calculation of the critical velocity of a stepwise rod system under a longitudinal impact // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 4. P. 530–535.
2. **Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Shoshin D. V.** Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 1. P. 8–15.
3. **Korobeynikov S. N., Torshenov N. G., Lyubashevskaya I. V., et al.** Creep buckling of axially compressed circular cylindrical shells of a zirconium alloy: Experiment and computer simulation // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 1. P. 105–117.

4. **Bochkarev S. A., Matveenko V. P.** Stability analysis of cylindrical shells containing a fluid with axial and circumferential velocity components // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2012. V. 53, N 5. P. 768–776.
5. **И'гамов М. А.** Rearrangement of harmonics during bending of a cylindrical shell under dynamic compression // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 3. P. 471–477.
6. **Wang R., Han M., Huang Z., Yan Q.** An experimental study on the dynamic axial plastic buckling of cylindrical shells // Intern. J. Impact Engng. 1983. V. 1, N 3. P. 249–256.
7. **Gordienko B. A.** Buckling of inelastic cylindrical shells under axial impact // Arch. Mech. 1972. V. 24. P. 383–394.
8. **Alashti R. A., Ahmadi S. A.** Buckling of imperfect thick cylindrical shells and curved panels with different boundary conditions under external pressure // J. Theor. Appl. Mech. 2014. V. 52, N 1. P. 25–36.
9. **Xu X., Ma Y., Lim C. W., Chu H.** Dynamic buckling of cylindrical shells subject to an axial impact in a symplectic system // Intern. J. Solids Structures. 2006. V. 43, N 13. P. 3905–3919.
10. **Han Q., Zhang S. Y., Yang G. T.** The bifurcation problem caused by the propagation of the axial stress wave and its reflection in an ideal columns // Acta Mech. Solida Sinica. 1998. V. 19, N 3. P. 199–206 (in chinese).
11. **Azrar L., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M.** An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2010. V. 36, N 8. P. 1251–1277.
12. **Karagiozova D., Jones N.** Dynamic elastic-plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37, N 14. P. 2005–2034.
13. **Han Z. J., Cheng G. Q., Ma H. W., Zhang S. Y.** Dynamic buckling of elastic-plastic column impacted by rigid body // Appl. Math. Mech. 2006. V. 27, N 3. P. 377–382.
14. **Jiao X. J., Ma J. M.** Effects of boundary damping on the elastic rod's response to longitudinal impact // Appl. Math. Mech. 2015. V. 36, N 4. P. 393–403.

*Поступила в редакцию 20/XI 2018 г.,  
после доработки — 20/XI 2018 г.  
Принята к публикации 25/III 2019 г.*

---