КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ СОЛЕЙ В РАДИАЛЬНОМ ПОТОКЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Ф. М. Бочевер, А. Е. Орадовская, В. И. Пагурова

(*Москва*)

Задача о конвективной диффузии солей в радиальном потоке подземных вод реализуется, например, при нагнетании загрязненных промышленных стоков в водоносные пласты через скважины (такие скважины в практике принято называть «поглощающими»). Результаты, полученные для скважины, могут быть в определенных условиях обобщены на случай фильтрации сточных вод из накопителей, хвостохранилищ и т. д.

Конвективная диффузия солей в радиальном потоке подземных вод, как известно, описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)-V\frac{\partial C}{\partial r}=n\frac{\partial C}{\partial t} \tag{1}$$

Здесь C — концентрация солей в любой точке r области фильтрации в любой момент времени t, V — скорость фильтрации, n — пористость грунта, D — коэффициент диффузии.

Исследованиями последнего времени [1, 2] установлено, что коэффициент диффузии D существенно зависит от скорости фильтрации и физико-механических свойств грунта и жидкости, что дает основание рассматривать его в качестве некоторого обобщенного параметра, характеризующего в совокупности свойства солевого раствора и гидродинамические особенности пласта. В связи с этим его называют коэффициентом фильтрационной диффузии. Численные значения коэффициента фильтрационной диффузии наиболее надежно могут быть установлены на основании полевых и лабораторных опытов применительно к конкретным условиям задачи.

Скорость фильтрации при нагнетании жидкости в скважину в условиях квазиустановившегося режима определяется по соотношению

$$V=\frac{Q_w}{2\pi hr} \tag{2}$$

где Q_w — расход нагнетаемой жидкости, h — мощность водоносного пласта, r — координата точки.

Введем функцию $C^\circ = C - C_0$, где C_0 — концентрация солей в водоносном пласте при $t = 0$, т. е. до начала действия скважины. Тогда с учетом (2) уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 C^\circ}{\partial r^2}+\frac{1}{r}(1-2\nu)\frac{\partial C^\circ}{\partial r}=\frac{1}{D^\circ}\frac{\partial C^\circ}{\partial t}, \qquad \nu=\frac{Q_w}{4\pi hD^\circ n}, \qquad D^\circ=\frac{D}{n} \tag{3}$$

Уравнение (3) обычно решается при условии первого рода на скважине: $r = r_0$ (r_0 — радиус скважины), $C^\circ = C_c^\circ = \mathrm{const}$ [2,9,10]. Однако такое условие далеко не всегда выдерживается. Более полно отражает действительную картину взаимодействия нагнетаемых в скважину стоков с подземными водами пласта условие третьего рода [3], характеризующее постоянство солевого расхода Q_s

$$t>0, \qquad r=r_0, \qquad 2\pi hDr\frac{\partial C^\circ}{\partial r}-Q_wC^\circ=-Q_s=\mathrm{const}, \qquad Q_s=Q_wC_k^\circ \tag{4}$$

где $C_k^\circ = C_k - C_0$, C_k — концентрация солей в загрязненных стоках, поступающих в скважину.

Принимая условие (4) и рассматривая безграничную область фильтрации, т. е. полагая

$$t>0, \qquad r\to\infty, \qquad \frac{\partial C^\circ}{\partial r}=0 \tag{5}$$

можно получить решение (3) следующим образом.

Применим преобразование Лапласа

$$C^\circ(r, t) \div T(r, p)=\int_0^\infty C^\circ(r,\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau$$

Тогда вместо (3) будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'' + \frac{1}{r}(1-2\nu)T' - \beta^2 T = 0, \qquad \beta = \left(\frac{p}{D^\circ}\right)^{1/2} \tag{6}$$

Решение этого уравнения при условии (5) выражается так [4]

$$T = Ar^\nu K_\nu(\beta r) \tag{7}$$

где K_ν — символ функции Макдональда, A — постоянная относительно r.

Исходное условие (4) в форме изображения будет

$$r = r_0, \qquad 2\pi h D r T' - Q_w T = -\frac{Q_s}{p} \tag{8}$$

После подстановки (8) в (7) и определения постоянной A находим следующее выражение для изображения

$$T = \frac{Q_s r^\nu K_\nu(\beta r)}{p r_0^\nu \; [2\pi h D r_0 \beta K_{\nu-1}(\beta r_0) + Q_w K_\nu(\beta r_0)]} \tag{9}$$

Переход от изображения к оригиналу может быть сделан при помощи формулы обращения Риманна — Меллина. Но при этом результат получается громоздким. Более удобное для практического использования решение легко получить, если учесть, что аргумент функций Макдональда в знаменателе (9) мал, так как, по сравнению с размерами всей области фильтрации, мала величина r_0 и можно принять, что при больших t $\beta r_0 \ll 1$. В этом случае справедливы приближенные выражения для функций Макдональда [4]

$$K_\nu(\beta r_0) \approx \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{\beta r_0}\right)^\nu, \qquad K_{\nu-1}(\beta r_0) \approx \frac{1}{2}\Gamma(\nu-1)\left(\frac{2}{\beta r_0}\right)^{\nu-1} \tag{10}$$

где Γ — символ гамма-функции. Подставляя эти выражения в (9), имеем

$$T \approx \frac{Q_s (r\beta)^\nu K_\nu(\beta r)}{2^{\nu-1}\pi h D r_0^2 \Gamma(\nu-1)\, p\, [\beta^2 + Q_w(\nu-1)/\pi h D r_0^2]} \tag{11}$$

Переход от изображения к оригиналу здесь осуществляется по табличным соотношениям [5]. В результате получаем следующее решение:

$$C(r,t) = C_0 + \frac{Q_s}{Q_w}[1 - F_1(\lambda,\nu) - F_2(\lambda,\nu,B)] \qquad \left(\lambda = \frac{r^2}{4D^\circ t}\right) \tag{12}$$

$$F_1(\lambda,\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\lambda e^{-\alpha}\alpha^{\nu-1}d\alpha \tag{13}$$

$$F_2(\lambda,\nu,B) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\exp\frac{-B}{\lambda}\int_\lambda^\infty e^{-\alpha+\frac{B}{\alpha}}\alpha^{\nu-1}d\alpha \qquad B = \frac{Q_w}{4\pi h D^\circ n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2(\nu-1) \tag{14}$$

$$F_1(\lambda,\nu) = 1 \quad \text{при } t = 0, \quad \lambda = \infty, \lambda = 0, \; F_1(\lambda,\nu) = 0 \quad \text{при } t = \infty$$

Выражение (13) представляет собой нормированную неполную гамма-функцию, подробно табулированную для широкого диапазона изменения параметров λ и ν [6].

Для функции $F_2(\lambda,\nu,B)$, определяемой соотношением (14), можно предложить следующую формулу, полезную при вычислениях (ν предполагается равным целому числу) [1]: (15)

$$F_2(\lambda,\nu,B) = \frac{e^{-\frac{B}{\lambda}}}{\Gamma(\nu)}\left[\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{B^k(\nu-k-1)!}{k!}(1 - F_1(\lambda,\nu-k) + \sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{B^k\lambda^{\nu-k}}{k!}E_{k+1-\nu}(\lambda)\right]$$

где $E_m(\lambda)$ — интегро-экспоненциальная функция, табулированная в работе [7].

[1] Выражения (15) — (17) получены В. И. Пагуровой.

Пользуясь методом Лапласа оценки интеграла для больших значений параметра [8], можно вывести асимптотическую формулу для F_2 при больших B и $\lambda \ll B$, $\nu \ll B$

$$F_2(\lambda, \nu, B) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\nu+1}}{\Gamma(\nu) B}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n B^{-n+1} + 0\left(B^{-N+1}\right)\right], \qquad a_1 = 1, \quad a_2 = \lambda^2\left(\frac{\nu+1}{\lambda} - 1\right) \tag{16}$$

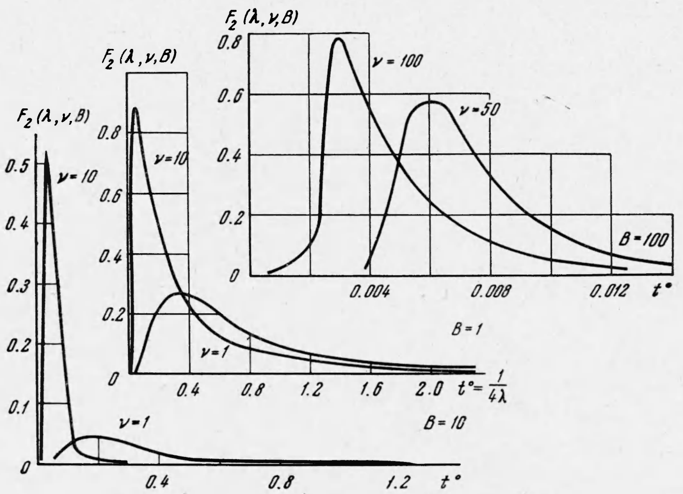
$$a_m = \left(\frac{\nu + 2m - 3}{\lambda} - 1\right)\lambda^2 a_{m-1} - (m-2)(m+\nu-2)\lambda^2 a_{m-2}, \qquad m = 3, 4, 5, \ldots$$

Имеет место рекуррентное соотношение по ν

$$F_2(\lambda, \nu, B) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} - \frac{B}{(\nu-1)(\nu-2)} F_2(\lambda, \nu-2, B) + F_2(\lambda, \nu-1, B) \tag{17}$$

$$F_2(\lambda, \nu, B) = 0 \quad (t = 0, \ \lambda = \infty), \qquad (t = \infty, \ \lambda = 0)$$

Функция $F_2(\lambda, \nu, B)$ для некоторых значений λ, ν и B показана на фигуре.



Заметим, что решение рассматриваемой задачи при условии постоянства концентрации солей на внешнем контуре скважины C_c, т. е. когда $C_k = C_c = \mathrm{const}$, будет [9]

$$C(r, t) = C_0 + (C_c - C_0)\left[1 - F_1(\nu, \lambda)\right] \tag{18}$$

где $F_1(\nu, \lambda)$ выражается по (13).

Из сравнения (12) и (18) видно, что при постоянном солевом расходе на скважине процесс конвективного переноса солей в первый период характеризуется более значительной зоной рассеяния, чем при условии постоянной концентрации.

Поступила 6 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Klinkenberg L. J. Analogy between diffusion and electrical conductivity in porous rocks Bull. Geol. Soc. Amer., 1951, vol. 62, No. 6.
2. Николаевский В. Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5.
3. Brenner H. The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length. Chem. Engng Sci., 1962, vol. 17.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, изд. Наука, 1964.
5. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951.
6. Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции. Изд-во АН СССР, 1963.
7. Пагурова В. И. Таблицы интегроэкспоненциальной функции, В. Ц. АН СССР, 1959.
8. Эрдейн А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.
9. Веригин Н. Н. Некоторые задачи конвективной теплопроводности в пористой среде. Тр. Ин-та ВОДГЕО, 1964, вып. 9.
10. Шестаков В. М. К теории фильтрации растворов в грунтах. Сб. «Вопросы формирования химического состава подземных вод». Изд МГУ, 1963.