УДК 622.235.5 + 539.3 + 539.214

# УДАРНЫЕ ВОЛНЫ
# В ДИЛАТИРУЮЩИХ И НЕДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕДАХ

*С. Г. Артышев, С. З. Дунин*

(*Москва*)

При взрыве заряда в изотропной хрупкой среде, находящейся в покое и сжатой литостатическим давлением $p_h$, от центра взрыва начинает распространяться ударная волна. Последовательный анализ характера разрушения в зависимости от свойств породы и литостатического давления дан в работах [1—3], где разрушение породы описывалось без учета дилатансионного характера поведения среды, т. е. без учета возможности изменения объемной деформации при сдвиговой [4].

В данной работе рассматривается задача о распространении сферически-симметричной волны разрушения в дилатирующих и недилатирующих пластических средах.

Источником волны разрушения, находящейся в шаровой полости (каверне) с начальным радиусом $a_0$, является газ с начальным давлением $p_{k0}$. Предполагается, что за фронтом волны выполняется условие пластичности Прандтля

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = k + m(\sigma_r + 2\sigma_\varphi), \tag{1}$$

где $k$ и $m$ — известные постоянные; $\sigma_r$ и $\sigma_\varphi$ — напряжения в радиальном и ортогональных к нему направлениях соответственно. Течение породы за фронтом описывается уравнениями сохранения импульса, массы и уравнением дилатансии

$$\rho(\partial u/\partial t + u\partial u/\partial r) = \partial\sigma_r/\partial r + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r; \tag{2}$$

$$\partial\rho/\partial t + u\partial\rho/\partial r + \rho(\partial u/\partial r + 2u/r) = 0; \tag{3}$$

$$\partial u/\partial r + 2u/r = \Lambda(\rho,\ \delta_r)|\partial u/\partial r - u/r|, \tag{4}$$

где $\rho$ — плотность среды; $u$ — массовая скорость; $r$ — радиус; $t$ — время; $\Lambda(\rho, \sigma_r)$ — скорость дилатансии [4]. На фронте волны разрушения принимаются условия сохранения массы и импульса

$$u_ф(t) = \varepsilon_ф(t)\dot{R}(t); \tag{5}$$

$$p_ф(t) - p_h = \rho_0\varepsilon_ф(t)\dot{R}^2(t), \tag{6}$$

где $R(t)$, $\dot{R}(t)$ — радиус и скорость фронта; $p_h = 9{,}81\cdot\rho_0 h$ — литостатическое давление на глубине $h$; $\varepsilon_ф = 1 - \rho_0/\rho_ф$ — скачок уплотнения на фронте; $p_ф = -\sigma_ф$ — давление на фронте. Здесь и далее индексом ф обозначены значения величин на фронте, индексом 0— в невозмущенной среде.

Удобно записать уравнения (2) — (4) в лагранжевых переменных $(r_0, t)$. Обозначая новые неизвестные функции от переменных $(r_0, t)$ теми же буквами $u$, $\rho$, $\sigma_r$, $r$, получим с учетом (1), что в области за фронтом ($t > t_1(r_0)$, где $t_1(r_0)$ — функция, обратная к функции $R(t)$), выполняются уравнения

(7) $$\frac{\partial}{\partial r_0}\left[r^{\alpha}\left(p - \frac{k}{3m}\right)\right] = \rho_0 r_0^2 r^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial t};$$

(8) $$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{r_0^2}{r^2}\frac{\rho_0}{\rho};$$

(9) $$\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\ln(\rho r^3) + \frac{\partial}{\partial t}\ln\rho = 0,$$

где $\alpha = 6m/(2m+1)$; $p(r_0, t) = -\sigma_r(r_0, t)$.

Уравнение дилатансии (9) получено в предположении, что в (4) $\partial u/\partial r \leqslant 0$.

Сделано два дополнительных предположения, позволивших перейти от уравнений в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

1. Скорость дилатансии $\Lambda$ является константой. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^{\Lambda+1}r^{3\Lambda}) = 0,$$

при котором оно интегрируется явно

(10) $$\rho(r_0, t) = \rho_ф(t_1(r_0))\left(\frac{r_0}{r(r_0, t)}\right)^{2-n},$$

где $n = (2-\Lambda)/(1+\Lambda)$.
Интегрирование (8) дает

(11) $$R^{n+1}(t) - r^{n+1}(r_0, t) = (n+1)\rho_0\int\limits_{r_0}^{R(t)}\frac{\xi^n}{\rho_ф(t_1(\xi))}d\xi,$$

откуда следует, что

(12) $$u(r_0, t) \equiv \frac{\partial r(r_0, t)}{\partial t} = \varepsilon_ф(t)\left(\frac{R(t)}{r(r_0, t)}\right)^n\dot{R}(t).$$

2. Разрушаемая порода па фронте достигает своего предельного сжатия, т. е. $\rho_ф(t) = \text{const}$ [5]. В этом случае уравнение (11) переходит в

(13) $$r^{n+1}(r_0, t) = (1-\varepsilon_ф)r_0^{n+1} + \varepsilon_ф R^{n+1}(t),$$

а формула (10) разуплотнения среды может быть записана через эйлеровы координаты

$$\rho(r, t) = \frac{\rho_ф^{\Lambda+1}}{\rho_0^{\Lambda}}\left[1 - \varepsilon_ф\left(\frac{R(t)}{r}\right)^{n+1}\right]^{\Lambda},$$

где

$$\left((1-\varepsilon_ф)a_0^{n+1} + \varepsilon_ф R^{n+1}(t)\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant r \leqslant R(t).$$

Введем безразмерные величины $\tau = t/\beta$, $x_0 = r_0/a_0$, $y(x_0, \tau) = r(a_0x_0, \beta\tau)/a_0$, $Y(\tau) = R(\beta\tau)/a_0$, $\pi(x_0, \tau) = p(a_0x_0, \beta\tau)/p_{k0}$, где за единицу времени взята

$$\beta = \frac{10}{\sqrt{9{,}80665}}a_0\sqrt{\frac{\rho_0}{p_{k0}}};$$

$a_0$, м; $\rho_0$, г/см$^3$; $p_{k0}$, кбар; $\beta$, мс. Уравнение (7) после интегрирования в пределах от $r_0$ до $R(t)$ с учетом (12), (13), (5), (6) принимает вид

(14) $$A\left(\frac{x_0}{Y}\right)Y\ddot{Y}+B\left(\frac{x_0}{Y}\right)\dot{Y}^2+C(x_0,\tau)=0,$$

где $$A\left(\frac{x_0}{Y}\right)=\int\limits_{x_0/Y}^{1}\xi^2 z^{\alpha-n-2}(\xi)\,d\xi;$$

$$z(\xi)=(\varepsilon_\text{ф}+(1-\varepsilon_\text{ф})\,\xi^{n+1})^{\frac{1}{n+1}};$$

$$B\left(\frac{x_0}{Y}\right)=1+nA\left(\frac{x_0}{Y}\right)-\varepsilon_\text{ф}n\int\limits_{x_0/Y}^{1}\xi^2 z^{\alpha-2n-3}(\xi)\,d\xi;$$

$$C(x_0,\tau)=\frac{1}{\varepsilon_\text{ф}}\frac{\rho_0 h}{p_{k0}}10^{-4}-c_1-z^\alpha\left(\frac{x_0}{Y}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_\text{ф}}\pi(x_0,\tau)-c_1\right];$$

$$c_1=\frac{1}{\varepsilon_\text{ф}}\frac{k}{3mp_{k0}}10^{-3};$$

$k$, кг/см$^2$; $h$, м.

Полагая $x_0=1$ и задавая закон изменения давления $\pi(1,\tau)$ на взрывной полости, (14) можно использовать как дифференциальное уравнение относительно безразмерного радиуса фронта $Y(\tau)$. При этом начальными данными будут

$$Y(0)=1,\quad \dot{Y}(0)=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\text{ф}}\left(1-\frac{\rho_0 h}{p_{k0}}10^{-4}\right)}.$$

После нахождения $Y(\tau)$ уравнение (14) позволяет рассчитывать давление $\pi(x_0,\tau)$ во всей зоне, по которой прошла волна, $1\leqslant x_0\leqslant Y(\tau)$.

В данной работе условие на взрывной полости бралось в двух видах:

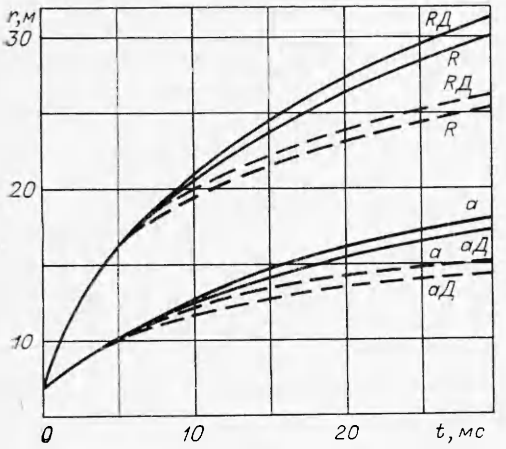
(15) $$\pi(1,\tau)=(a_0/r(a_0,t))^{3\gamma}\equiv y^{-3\gamma}(1,\tau),$$

что соответствует предположению об адиабатическом расширении полости с постоянной адиабаты $\gamma$ [6], и на основании экспериментально установленной зависимости из работы [7], которая в наших обозначениях имеет вид

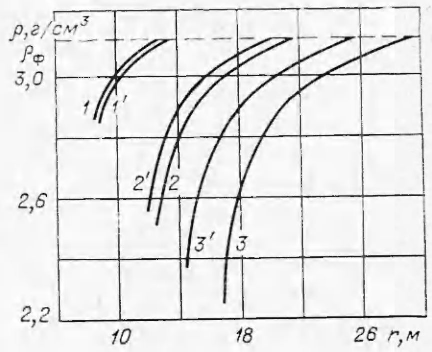
(16) $$\pi(1,\tau)=\left(1+\frac{\beta}{t_r}\tau\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left(1-\left(1+\frac{\beta}{t_r}\tau\right)^2\right)\right),$$

где $t_r$ — постоянная, мс.

На фиг. 1—4 приводятся некоторые результаты вычислений, полученные при следующих исходных данных [7]: $p_{k0}=62$ кбар; $m=0{,}45$; $k=0{,}35$ кг/см$^2$; $\rho_0=2{,}5$ г/см$^3$; $h=1000$ м; $\varepsilon_\text{ф}=0{,}2$; $a_0=7$ м; $\gamma=1{,}5$; $t_r=2$ мс; $\Lambda=0{,}14$ или $\Lambda=0$. Зависимости радиусов фронта $R$ и полости $a$ от времени $t$ приводятся на фиг. 1, где сплошные линии соответствуют краевому условию (15), а штриховые — краевому условию (16). Буква *Д* здесь и далее относится к случаю учета дилатансии ($\Lambda\neq 0$). Разуплотнение разрушаемой породы за счет дилатансии иллюстрируется на фиг. 2, кривые *1* и *1'* относятся к моменту времени 2,7; *2* и *2'* — 10,8; *3* и *3'* — 26 мс. Кривые *1—3* соответствуют краевому условию (15), а *1'—3'* — краевому условию (16). Радиальное напряжение $\sigma_r$ в зависимости от эйлеровой координаты $r$ показано на фиг. 3 для краевого условия (15) и на фиг. 4 —




Фиг. 1

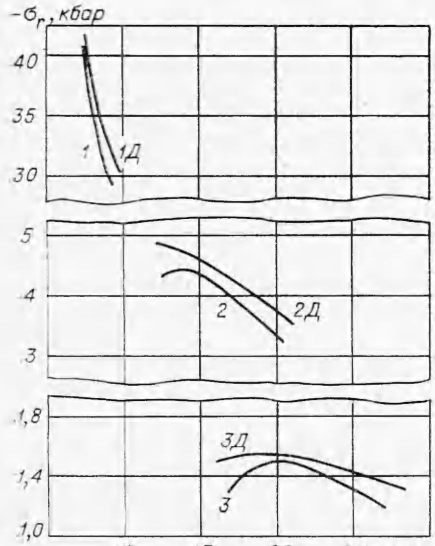



Фиг. 2

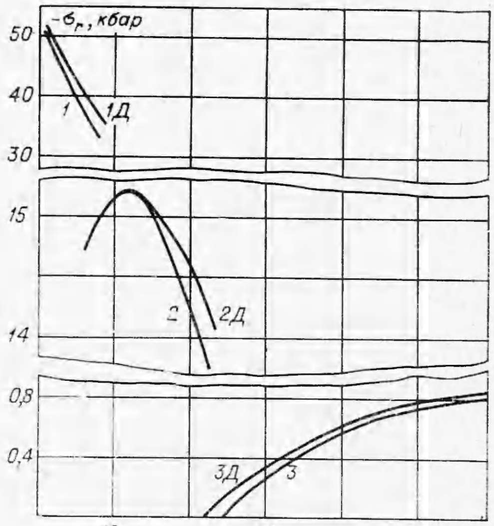
для краевого условия (16). На фиг. 3 кривые *1* и *1Д* относятся к моменту времени 0,9; *2* и *2Д* — 9,9; *3* и *3Д* — 22,5 мс. Для фиг. 4 соответствующие времена равны 0,9; 2,7; 16,2 мс.

Вычисления показали, что с некоторого момента времени в раздавливаемой породе образуется внутренняя зона пересжатия (максимум на кривых *2*, *3*, *3Д* фиг. 3 и на кривых *2*, *2Д*, *3*, *3Д* фиг. 4). Это явление численно наблюдается с учетом и без учета дилатансии. Как видно, учет дилатансии приводит к возрастанию скорости фронта и уменьшению скорости расширения полости (см. фиг. 1), а также к увеличению давления в породе (см. фиг. 3, 4). Разуплотнение породы за счет дилатансии может достигать значительных размеров (до 30% от плотности на фронте, фиг. 2).

Проведенные расчеты при других значениях $p_{k0}$, $\varepsilon_ф$, $\gamma$, $\Lambda$ дали примерно такой же качественный результат.




Фиг. 3




Фиг. 4

Авторы выражают благодарность Б. Л. Рождественскому, Е. Е. Ловецкому и В. К. Сироткину за обсуждение и интерес к работе.

*Поступила 12 VII 1977*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Григорян С. С.** Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, № 4.
2. **Багдасарян А. Б.** Точные решения задачи о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой твердой среде.— «Изв. АН АрмССР. Механика», 1968, т. 21, № 5.
3. **Багдасарян А. Б.** Расчет действия взрыва в хрупкой горной породе.— ПМТФ. 1970, № 5.
4. **Николаевский В. Н.** О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волн в мягких грунтах.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 175, № 5.
5. **Андрианкин Э. И., Корявов В. П.** Ударная волна в переменно уплотняемой пластической среде.— «Докл. АН СССР», 1959, т. 128, № 2.
6. **Компанеец А. С.** Ударные волны в пластической уплотняющейся среде.— «Докл. АН СССР», 1956, т. 109, № 1.
7. **Фачиоли Э., Анг А. Х.— С.** Дискретная эйлерова модель распространения сферической волны в сжимаемой среде.— В кн.: Действие ядерного взрыва. М., «Мир», 1971.

---

УДК 624.131 + 539.215

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПРЕГРАДОЙ

*Г. М. Ляхов, К. С. Султанов*

(*Москва*)

В работах [1, 2] предложена модель грунта как вязкопластической среды. Ниже на основе этой модели получено решение задачи о взаимодействии плоской одномерной волны с неподвижной и смещающейся преградами, проведенное с помощью ЭВМ методом характеристик. Задача о распространении волн на основе этой же модели решена в [2, 3]. Результаты измерения параметров взрывных волн, свидетельствующие о существенном влиянии на закономерности их распространения вязких и пластических свойств грунтов, приведены в работах [2, 4—6].

В соответствии с моделью [1] в плотных средах учитываются две предельные нелинейные диаграммы объемного сжатия $\sigma_D(\varepsilon)$ и $\sigma_S(\varepsilon)$, соответствующие динамическому ($\dot\varepsilon \to \infty$) нагружению и равновесному состоянию среды ($\dot\varepsilon \to 0$) (статическому нагружению). Разгрузка протекает по другим уравнениям, чем нагрузка, что приводит к образованию остаточных деформаций. Общая деформация элемента $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, где величина $\varepsilon_1$ связана с мгновенным сжатием, а $\varepsilon_2$ со сжатием, протекающим в конечное время (деформация переукладки).

При малых нагрузках предельные зависимости принимаются линейными и поведение среды [1, 2] определяется последовательностью уравнений:
при ударном нагружении (на скачке)

$$\sigma = E_D\varepsilon; \tag{1}$$