Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 1

КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ СМЕСИ

УДК 532.546

О. Ю. Динариев

Институт физики Земли РАН, 123810 Москва

Динамика пластовой смеси для газоконденсатных месторождений описывается нестационарными уравнениями двухфазной многокомпонентной фильтрации с фазовыми переходами, которые не допускают решений в аналитическом виде. Это усложняет интерпретацию кривых восстановления давления (КВД) для эксплуатационных скважин, так как для обработки экспериментальных данных нужно иметь явную теоретическую формулу с одним или несколькими свободными параметрами, характеризующими свойства пластовой системы.

Рассмотрим случай, когда давление снимается на забое и когда можно пренебречь процессами в объеме скважины. Предположим, что до остановки скважины реализуется стационарное течение двухфазной газоконденсатной смеси, описанное в работах [1–3]. После остановки скважины в пористой среде происходит сложный процесс перераспределения давления и вещества, который заканчивается, когда давление и состав смеси вблизи скважины становятся равными их значениям на контуре питания. Промысловая практика показывает, что процесс выравнивания давления протекает значительно быстрее по сравнению с выравниванием состава. Так, конденсат, скапливающийся в пористой среде вблизи скважины, «рассасывается» на порядки дольше, чем осуществляется наблюдение роста давления. Это дает возможность моделировать восстановление давления в рамках линейной теории возмущений точного стационарного решения, поскольку нелинейность уравнений фильтрации газоконденсатной смеси в основном связана с фазовыми переходами.

Применимость линейной теории возмущений — ключевое предположение настоящей работы. Оно позволяет получить явную асимптотическую формулу для КВД.

Рассмотрим $(M+1)$-компонентную смесь $(M>0)$, и пусть n_i — соответствующие мольные плотности компонентов. Здесь и далее индексы i, j, k пробегают значения $0,\dots,M$, индексы α, β — значения $1,\dots,M$. Везде предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Изучаются только изотермические процессы, и потому не учитывается зависимость от температуры всех механических и термодинамических величин.

Статистическая физика [4] позволяет вычислить для гомогенных состояний смеси свободную энергию на единицу объема $f=f(n_i)$, которая является гладкой и однозначной функцией плотностей компонентов n_i. Справедливы термодинамические соотношения

$$df = æ_i dn_i, \qquad f = -p + æ_i n_i, \tag{1}$$

где $æ_i$ — химические потенциалы; p — давление. Из (1) следует равенство Дюгема

$$dp = n_i dæ_i. \tag{2}$$

Если функция $f=f(n_i)$ выпуклая, то гомогенные состояния смеси термодинамически устойчивы в объеме. Для двухфазной системы типа газ — конденсат эта функция не будет выпуклой. В последнем случае термодинамическая устойчивость гомогенного состояния n_i проверяется в результате рассмотрения виртуальных расслоений на жидкую и газовую фазы n_{il}, n_{ig}:

$$n_i = sn_{il} + (1-s)n_{ig} \tag{3}$$

(s — объемная доля жидкой фазы (конденсата)). Если величина

$$f^* = sf(n_{il}) + (1-s)f(n_{ig}) \tag{4}$$

оказывается меньше $f(n_i)$, то гомогенное состояние термодинамически неустойчиво. Устойчивым будет такое гетерогенное состояние (3), которое обеспечивает минимальное значение величины (4).

Переопределим свободную энергию на единицу объема $f = f(n_i)$ в двухфазной среде по формуле (4), задающей значение свободной энергии в устойчивом гетерогенном состоянии. Таким образом, вместо исходной функции $f = f(n_i)$ рассмотрим ее выпуклую оболочку, обозначая последнюю тем же символом. Новая свободная энергия — дважды дифференцируемая функция. Легко убедиться, что при новом определении свободной энергии термодинамические соотношения (1), (2) по-прежнему выполняются, причем теперь в двухфазной среде æ_i и p — химические потенциалы и давление в каждой из фаз. Таким образом, свободная энергия позволяет вычислить по известным мольным плотностям смеси n_i мольные плотности фаз n_{ig}, n_{il}, объемную долю конденсата s, а также химические потенциалы и давление в смеси.

Пусть имеется нестационарное цилиндрически-симметричное фильтрационное течение в однородном изотропном пласте с пористостью m и проницаемостью k в окрестности эксплуатационной скважины. Обозначим через r расстояние до оси скважины. Имеют место локальные законы сохранения компонентов [5]:

$$\partial_t(mn_i) + r^{-1}\partial_r(rJ_i) = 0. \tag{5}$$

Здесь для потоков J_i в пренебрежении капиллярными силами по закону Дарси справедливы выражения

$$J_i = -kK_i\partial_r p, \qquad K_i = f_g n_{ig}\mu_g^{-1} + f_l n_{il}\mu_l^{-1}. \tag{6}$$

Величины n_i, n_{ig}, n_{il} связаны соотношением (3). В соотношениях (6) $\mu_g = \mu_g(n_{ig})$, $\mu_l = \mu_l(n_{il})$ — сдвиговые вязкости газа и конденсата соответственно; $f_g = f_g(s)$, $f_l = f_l(s)$ — фазовые проницаемости газа и конденсата. Величины s, n_{ig}, n_{il} — термодинамические функции плотностей n_i. Поэтому система уравнений (5) является полной для неизвестных функций $n_i = n_i(t, r)$.

Рассмотрим граничные условия. Пусть r_w — радиус скважины по долоту, r_0 — радиус контура питания. В силу постановки задачи необходимо наложить следующие граничные условия на давление:

$$p\Big|_{r=r_w} = p_w, \quad t \leqslant 0, \qquad \partial_r p\Big|_{r=r_w} = 0, \quad t > 0; \tag{7}$$

$$p\Big|_{r=r_0} = p_0, \qquad p_w < p_0. \tag{8}$$

Для газоконденсатных месторождений характерно явление так называемой ретроградной конденсации [6], когда при понижении давления газовая фаза становится термодинамически неустойчивой, и выпадает жидкий конденсат. Конденсат приобретает гидродинамическую подвижность только вблизи эксплуатационных скважин, где он может занимать значительную часть порового объема. Обозначим через c_{i0} концентрации компонентов газовой фазы, поступающей на контур питания скважины ($c_{i0} > 0$). Если p_d — давление начала конденсации для смеси этого состава, то, вообще говоря, $p_0 \geqslant p_d$.

Наложим граничное условие на состав смеси $c_i = n_i / \sum\limits_{j=0}^{M} n_j$:

$$c_i\Big|_{r=r_0} = c_{i0}. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение величины

$$n_g = \sum_{i=0}^{M} n_{ig}, \quad n_l = \sum_{i=0}^{M} n_{il}, \quad K = \sum_{i=0}^{M} K_i = f_g n_g \mu_g^{-1} + f_l n_l \mu_l^{-1}, \quad C_i = K_i/K.$$

Величины C_i в соответствии с определением можно интерпретировать как концентрации компонентов в смеси, распадающейся при давлении p на те же фазы, что и исходная смесь. Соответствующие полная мольная плотность N, парциальные плотности N_i и доля жидкой фазы S определяются по формулам

$$N = K/(f_g\mu_g^{-1} + f_l\mu_l^{-1}), \quad N_i = NC_i = (1-S)n_{ig} + Sn_{il}, \quad S = f_l\mu_l^{-1}/(f_g\mu_g^{-1} + f_l\mu_l^{-1}). \tag{10}$$

Рассмотрим обратную задачу определения параметров исходной смеси n_i по известным значениям C_i, p. По известным величинам C_i, p термодинамика позволяет найти величины n_{ig}, n_{il}, S. Для определения значения s имеется уравнение (10). Чтобы обеспечить однозначную разрешимость уравнения (10) в рассматриваемом классе процессов, когда обязательно присутствует газовая фаза, предположим отсутствие порога подвижности для жидкой фазы. В последнем случае правая часть уравнения (10) строго монотонно зависит от s при $s < 1$. По известным величинам s, n_{ig}, n_{il}, согласно (3), можно рассчитать парциальные плотности для всей смеси n_i.

Введем координату $\eta = \ln(r/r_w)$. Тогда задача (5)–(9) может быть переписана в виде

$$m\partial_t(r^2 n_i) - k\partial_\eta(KC_i\partial_\eta p) = 0; \tag{11}$$

$$p\Big|_{\eta=0} = p_w, \quad t \leqslant 0, \qquad \partial_\eta p\Big|_{\eta=0} = 0, \quad t > 0; \tag{12}$$

$$p\Big|_{\eta=\zeta} = p_0; \tag{13}$$

$$C_i\Big|_{\eta=\zeta} = c_{i0}, \tag{14}$$

где $\zeta = \ln(r_0/r_w)$. Граничное условие (14) вытекает из (9) с учетом неравенства $p_0 \geqslant p_d$.

Напомним свойства стационарных решений задачи (11)–(14) [1–3], которые получаются, если условие (12) заменить на

$$p|_{\eta=0} = p_w. \tag{15}$$

Из (11), (14) в стационарном случае следует

$$C_i = c_{i0}, \qquad K\partial_\eta p = q = Q/(2\pi kh). \tag{16}$$

Здесь константа интегрирования Q — дебит скважины в молях на единицу времени; h — продуктивная мощность пласта. В соответствии с (16) давление определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $p = p(\eta + \alpha, q, c_{i0})$. Свободные параметры α, q находятся из граничных условий (13), (15).

Итак, если не использовать граничные условия (13), (15), можно получить стационарное решение для плотностей в функциональном виде $n_i = n_i(\eta + \alpha, q, c_{i0})$.

Далее величины, вычисленные для стационарного решения, пометим индексом звездочка. Определим векторные поля $e_i^j = e_i^j(\eta)$ (j — номер поля, i — номер компоненты) по формулам

$$e_i^0(\eta) = \frac{\partial}{\partial\alpha} n_i(\eta+\alpha, q, c_{i0})\Big|_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial n_i}{\partial\eta}\right)_*, \; e_i^\alpha(\eta) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial C_\alpha}\right)_{p*} = m_i^\alpha - m_j^\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial n_j}\right)_*(\partial_\eta p_*)^{-1}e_i^0; \tag{17}$$

$$m_i^\alpha(\eta) = \frac{\partial}{\partial c_{\alpha 0}} n_i(\eta, q, c_{i0}). \tag{18}$$

При дифференцировании по концентрациям в формулах (17), (18) учитывается, что фактически имеется зависимость только от M величин C_α или $c_{\alpha 0}$ в силу нормировочных равенств

$$\sum_{i=0}^{M} C_i = \sum_{i=0}^{M} c_{i0} = 1.$$

Очевидно, что векторные поля $e_i^j(\eta)$ задают базис в $(M+1)$-мерном пространстве при каждом значении η. По этому базису можно разложить любое другое векторное поле. Пусть $\delta n_i = \delta n_i(t, \eta)$ — малые возмущения стационарного решения. Произведем разложение по базису $\delta n_i(t, \eta) = e_i^j(\eta) x_j(t, \eta)$ и подставим его в динамическое уравнение для возмущения, вытекающее из (11): $m\partial_t(r^2 \delta n_i) - k\partial_\eta(\delta K C_i \partial_\eta p + K\delta C_i \partial_\eta p + KC_i \partial_\eta \delta p) = 0$.

Тогда получим систему $(M+1)$ линейных уравнений для $(M+1)$ неизвестных функций $x_j(t, \eta)$, описывающих динамику возмущений:

$$m(kq)^{-1} r^2 G_\alpha^j \partial_t x_j - \partial_\eta x_\alpha = 0; \tag{19}$$

$$m(kq)^{-1} r^2 \rho^j \partial_t x_j - \partial_\eta(\nu^\alpha x_\alpha) - \partial_\eta^2 x_0 = 0 \tag{20}$$
$$\Big(\rho^j = \sum_{i=0}^{M} e_i^j, \quad \nu^\alpha = \Big(\frac{\partial \ln K}{\partial C_\alpha}\Big)_{p*}, \quad G_\alpha^j = e_\alpha^j - c_{i0}\rho^j\Big).$$

Возмущения поля давления представим формулой

$$\delta p = \beta x_0, \quad \beta = \partial_\eta p_*. \tag{21}$$

Граничные и начальные условия для функции $x_j(t, \eta)$ получим из (12)–(14), (21) в виде

$$(\partial_\eta x_0 + \gamma x_0)\Big|_{\eta=0} = -1, \quad t > 0; \tag{22}$$

$$x_i\Big|_{\eta=\zeta} = 0; \tag{23}$$

$$x_i = 0, \quad t \leqslant 0. \tag{24}$$

В соотношениях (22) $\gamma = \partial_\eta \ln\beta\Big|_{\eta=0}$. Задачу (19), (20), (22)–(24) удобно решать методом преобразования Фурье. Произведем разделение переменных:

$$x_0(t, \eta) = \int \exp(i\omega t) z(\omega, \eta)\, d\omega, \quad x_\alpha(t, \eta) = \int \exp(i\omega t) y_\alpha(\omega, \eta)\, d\omega.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (19), (20), (22)–(24), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$i\omega A y + i\omega v_1 z - \partial_\eta y = 0; \tag{25}$$

$$(i\omega h_1 + h_2) y + i\omega f_1 z - \partial_\eta^2 z = 0; \tag{26}$$

$$(\partial_\eta z + \gamma z)\Big|_{\eta=0} = i(2\pi)^{-1}(\omega - i\varepsilon)^{-1}; \tag{27}$$

$$z\Big|_{\eta=\zeta} = 0; \tag{28}$$

$$y\Big|_{\eta=\zeta} = 0. \tag{29}$$

Здесь y — вектор-столбец с компонентами y_α; A — матрица размера $M \times M$ с компонентами $A_{\alpha\beta} = m(kq)^{-1} r^2 G_\alpha^\beta$; v_1 — вектор-столбец с компонентами $v_{1\alpha} = m(kq)^{-1} r^2 G_\alpha^0$; h_1 —

вектор-строка с компонентами $h_{1\alpha} = (m(kq)^{-1}r^2\rho^\alpha - \nu^\beta A_{\beta\alpha})$; h_2 — вектор-строка с компонентами $h_{2\alpha} = (-\partial_\eta \nu^\alpha)$; $f_1 = (m(kq)^{-1}r^2\rho^0 - \nu^\beta v_{1\beta})$; ε — бесконечно малая положительная величина. Отметим, что при давлении p, превышающем давление начала конденсации p_d, матрица A и вектор v_1 тождественно обращаются в нуль.

Рассмотрим неполную задачу (25), (29). Определим матрично-значную функцию $U = U(\eta, \xi)$ как решение следующей задачи Коши: $\partial_\eta U(\eta,\xi) = i\omega A(\eta)U(\eta,\xi)$, $U(\xi,\xi) = 1$.

Решение неполной задачи (25), (29) находится по формуле

$$y(\omega,\eta) = i\omega \int_\eta^\zeta U(\eta,\xi)v_1(\xi)z(\omega,\xi)d\xi,$$

при подстановке которой в уравнение (26) приходим к интегродифференциальному уравнению

$$i\omega(i\omega L_1 + L_2)z + i\omega f_1 z - \partial_\eta^2 z = 0, \tag{30}$$

где операторы L_a $(a = 1, 2)$ определяются формулами

$$(L_a z)(\eta) = \int_\eta^\zeta h_a(\eta)U(\eta,\xi)v_1(\xi)z(\omega,\xi)d\xi.$$

Итак, получена замкнутая задача (27), (28), (30) для определения динамики давления. Будем искать промежуточную асимптотику КВД для случая, когда $\zeta = +\infty$, и заменим условие (28) условием ограниченности функции z на бесконечности. Предположим также, что при $\eta \to +\infty$ функция $r^{-2}f_1(\eta)$ стремится к положительной константе φ, причем функция $f_0(\eta) = (f_1(\eta) - r^2\varphi)$ является быстро убывающей. Определим функцию $\alpha = \alpha(\omega)$ из соотношений $\alpha^2 = i\omega\varphi$, $\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$, и пусть $R = R(\omega)$ — следующий оператор в $L^2(0,+\infty)$:

$$(Rg)(\eta) = \int_0^{+\infty} G(\eta,\eta_1)g(\eta_1)d\eta_1, \quad g \in L^2(0,+\infty).$$

Здесь

$$G(\eta,\eta_1) = \begin{cases} D_1K_0(\alpha r), & \eta \geqslant \eta_1, \\ D_2K_0(\alpha r) + D_3I_0(\alpha r), & \eta < \eta_1; \end{cases}$$

K_a, I_a — функции Макдональда [7]; коэффициенты $D_a = D_a(\eta_1)$ находятся из системы линейных уравнений

$$G(\eta_1+0,\eta_1) - G(\eta_1-0,\eta_1) = 0, \quad (\partial_\eta G + \gamma G)\Big|_{\eta=0} = 0, \quad \partial_\eta G\Big|_{\eta=\eta_1+0} - \partial_\eta G\Big|_{\eta=\eta_1-0} = 1.$$

Тогда из уравнения (30) и граничных условий (27), (28) получим для функции $z(\eta)$ операторное уравнение

$$(1 + i\omega T)z = z_0, \tag{31}$$

где $T = T(\omega) = R(i\omega L_1 + L_2 + f_0)$; $z_0(\omega,\eta) = i(2\pi)^{-1}K_0(\alpha r)/(\gamma K_0(\alpha r_w) - \alpha r_w K_1(\alpha r_w))$.

Напомним, что экспериментально КВД снимаются в диапазоне времен от десятков секунд до часов, что соответствует диапазону частот

$$10^{-4}\ \text{Гц} \leqslant |\omega| \leqslant 10^{-1}\ \text{Гц}. \tag{32}$$

Поэтому для получения асимптотической формулы для КВД достаточно найти аппроксимацию функции z в диапазоне частот (32), а затем, согласно (21), рассчитать восстановление давления по формуле

$$\Delta p(t) = d_1 \int \exp(i\omega t)\psi(\omega)d\omega \qquad (\psi = z\Big|_{\eta=0}, \quad d_1 = \beta\Big|_{\eta=0}).$$

Рассмотрим уравнение (31). Оператор $T(\omega)$ будем интерпретировать как линейное непрерывное отображение в пространстве непрерывных ограниченных функций на полуоси $\eta \geqslant 0$. Его норму можно оценить, осуществляя численное моделирование стационарных течений по методу [2]. В результате оказывается, что в диапазоне (32) $|\omega|\,\|T\| \ll 1$. Поэтому допустимо положить $z \approx z_0$. Оставим теперь в выражении для z_0 только главные члены при низких частотах, используя асимптотические формулы для функций Макдональда [7]:

$$\psi \approx z_0\Big|_{\eta=0} \approx i(2\pi)^{-1}(\omega - i\varepsilon)^{-1}\ln(2^{-1}\alpha r_w)(\gamma\ln(2^{-1}\alpha r_w) + 1)^{-1}.$$

По результатам численного моделирования стационарных течений можно убедиться, что значение $\tau = r_w^2\varphi^{-1}$ по порядку величины близко к 10 с, а безразмерная величина γ в случае, когда забойное давление p_w существенно ниже давления начала конденсации p_d, имеет порядок 10^{-2}. Поэтому в диапазоне (32) $|\gamma\ln(2^{-1}\alpha r_w)| \ll 1$. С учетом последнего замечания приходим к выражению для ψ, которое по аналитической форме совпадает с выражением, полученным в задаче о КВД при однофазной фильтрации [8]. Пользуясь этой аналогией, сразу можно указать асимптотику для КВД

$$\Delta p(t) = 2^{-1}d_1(\ln(t\tau^{-1}) + \mathbf{C}) \tag{33}$$

($\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера). Перепишем эту формулу, выделив зависимость от дебита в явном виде:

$$\Delta p(t) = 2^{-1}qd_2(\ln(t\tau^{-1}) + \mathbf{C}), \quad d_2 = K_*^{-1}\Big|_{\eta=0}. \tag{34}$$

Итак, форма для КВД в случае фильтрации газоконденсатной смеси аналогична форме КВД при фильтрации однофазной жидкости. Однако в отличие от однофазного случая практическое применение (33) или (34) для определения проницаемости k требует независимого численного моделирования стационарного течения (например, для определения величин d_2 и τ).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Динариев О. Ю.** Ретроградная конденсация при стационарной радиальной фильтрации // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 67, № 1-2. С. 98–102.
2. **Бабейко А. Ю., Динариев О. Ю.** Моделирование ретроградной конденсации при стационарной радиальной фильтрации // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 92–97.
3. **Динариев О. Ю.** Многокомпонентные стационарные фильтрационные течения с фазовыми переходами // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 6. С. 78–85.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.
5. **Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др.** Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1992.
6. **Баталин О. Ю., Брусиловский А. И., Захаров М. Ю.** Фазовые равновесия в системах природных углеводородов. М.: Недра, 1992.
7. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
8. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.

Поступила в редакцию 5/X 1995 г.