

В проделанном выше анализе не учитывалась возможная зависимость коэффициента восстановления скорости при ударе λ от параметров столкновения. Согласно [2], $\Delta = \tau \lambda u_p$. Если $\lambda = \lambda_0 u_p^{-\gamma}$ в некотором диапазоне скоростей соударения, то параметр экранирования, выше которого происходит потеря устойчивости пылевого слоя, есть $\Phi_m = (1 - \gamma)^{-1}$. Таким образом, коллапс не будет наблюдаться в области перехода от неупругого к упругому удару, где $\gamma \geq 1$.

Для оценки влияния параметра эрозии E_0 на критические значения расхода частиц были проведены специальные расчеты, которые показали, что это влияние является незначительным. Так, при изменении E_0 на два порядка, от 0,1 до 10, критический расход p^* снижается примерно на 27% при $a = 20$.

Коэффициент эрозии E сильно убывает с ростом параметра экранирования, поэтому в экспериментах на эрозию в гиперзвуковых потоках с запыленностью выше критической следует ожидать значительного снижения наблюдаемых разрушений по сравнению с теоретическими оценками, основанными на данных по единичному соударению. Пылевой слой, образующийся в лобовой части тела, может не только частично, но и полностью заэкранировать поверхность от воздействия высокоскоростных частиц. При этом результирующий объем эрозионных повреждений поверхности будет определяться начальным периодом формирования пылевого слоя с характерным временем процесса $\Delta t_{\text{эп}} \sim 1/2pk_c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laderman A. J., Lewis C. H., Byron S. R. Two-phase plume impingement effects. — AIAA J., 1970, vol. 8, N 10.
2. Трунев А. П., Фомин В. М. Эрозия тупого тела в запыленном гиперзвуковом потоке. — ПМТФ, 1984, № 4.
3. Kuby W. C., Lewis C. H. Experimental study of the effects of particle cloud impingement. — AIAA J., 1968, vol. 6, N 7.
4. Яценко Н. Н., Солоухин Р. Н., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.

Поступила 6/X 1982 г.

УДК 532.529

РАСЧЕТ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ

А. Е. Крошилин, В. Е. Крошилин
(Москва)

Одной из центральных проблем механики многофазных дисперсных сред является проблема определения межфазного взаимодействия. Простейший способ решения этой проблемы — использование зависимостей, справедливых для одиночного включения, движущегося в безграничной несущей среде. Однако такой подход не учитывает влияния включений друг на друга через несущую среду, что может приводить к существенным ошибкам при определении межфазных взаимодействий [1, 2].

Влияние включений друг на друга легко учесть в рамках ячеечного подхода, который проанализирован в [1]. Метод ячеек применим для исследования сред с регулярной структурой. Дисперсные среды, как показано в [1], в различных условиях имеют различные микроструктуры: регулярную, когда расстояние между соседними включениями одинаково, хаотическую, когда включения располагаются случайным образом, и др.

В общем случае среднее межфазное силовое взаимодействие находится путем усреднения силы межфазного взаимодействия по всем положениям включений. Однако функция распределения положений включений зависит от силы межфазного взаимодействия. Таким образом, для определения среднего межфазного взаимодействия необходимо решить очень сложную задачу.

За редким исключением [3], при решении этой задачи предполагается, что дисперсная среда имеет либо регулярную, либо хаотическую структуру. Однако даже после этого предположения определить среднее межфазное взаимодействие сложно, так как сложно определить межфазное взаимодействие при конкретном расположении

включений. Поэтому многие авторы при расчете среднего межфазного взаимодействия используют различные упрощающие предположения [4—6], причем в рамках их подхода не удастся оценить вносимую этими предположениями погрешность. Более достоверными являются результаты, получаемые с использованием точного решения задачи о взаимодействии нескольких включений с несущей средой [7, 8].

В настоящей работе рассматривается задача о движении сферических включений в идеальной несущей среде. Излагается методика расчета средних характеристик взаимодействия включений с несущей средой. Эта методика используется для расчета присоединенной массы сферических включений в дисперсной среде.

Ранее присоединенная масса включений в дисперсных средах m изучалась в нескольких работах. В [1] классическим методом ячеек получена формула для присоединенной массы включения в среде регулярной структуры $m = (2/3)\pi R^3 \rho$, где R — радиус включения; ρ — плотность жидкости. Из этой формулы следует, что присоединенная масса не зависит от объемной концентрации.

Несколько отличный метод ячеек использовался в [9], где получено $m = (2/3)\pi R^3 \rho (1 + 3\alpha_2)$ (α_2 — объемная концентрация включений).

Эта формула дает увеличение присоединенной массы с ростом объемной концентрации включений, что кажется на первый взгляд неправильным. Однако точное решение задачи о движении двух пузырей в идеальной жидкости дает как уменьшение, так и увеличение присоединенной массы пузырей в зависимости от их относительного положения. Эти наводящие соображения показывают, что возрастание усредненной присоединенной массы с ростом объемной концентрации в принципе возможно.

В [10] для сред с хаотической структурой получена формула

$$m = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho (1 + 2,78\alpha_2).$$

Метод, использованный в этой работе, близок к методу данной работы, однако автору [10] удалось довести выкладки до конца и получить результат лишь в рамках диспольного приближения для силы взаимодействия. Видно, что присоединенная масса также возрастает с ростом α_2 .

Дисперсные среды хаотической структуры рассматривались также в [11], где была получена формула для присоединенной массы

$$m = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho \left[1 - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \left(3 + \frac{\frac{2}{3} \ln \alpha_2}{1 - \alpha_2} \right) \right] \left[1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \left(1 + \frac{\frac{1}{3} \ln \alpha_2}{1 - \alpha_2} \right) \right]^{-1}.$$

Автор [11] использовал приближенный метод самосогласованного взаимодействия. Из полученной формулы следует, что присоединенная масса частицы в дисперсной среде меньше, чем присоединенная масса одиночной частицы при $0 < \alpha_2 < 0,0025$, причем присоединенная масса минимальна при $\alpha_2 = 0,00092$ и составляет 99,97% присоединенной массы одиночной частицы. При $\alpha_2 > 0,0025$ присоединенная масса включения в дисперсной среде больше, чем присоединенная масса одиночного включения.

1. Основные уравнения и допущения. Силы межфазного взаимодействия при конкретном расположении включений зависят от скоростей включений, которые в свою очередь зависят от сил взаимодействия. Рассчитать силы в общем случае очень сложно. Поэтому представляет интерес расчет сил с использованием различных упрощающих гипотез. При этом естественно ожидать, что использование физически обоснованных гипотез позволит качественно верно отразить основные закономерности точного решения. Задача существенно упрощается, если считать скорость пузырей заданной. Например, можно рассмотреть случай постоянной скорости движения пузырей, не зависящей от их расположения. Однако, вероятно, более последовательной схемой является следующая. Будем считать, что сила взаимодействия включений между собой мала по сравнению с силами, действующими на одиночный пузырь. В этом случае скорость движения пузырей определяется балансом силы Архимеда, одинаковой для всех пузырей, и силы трения включения о несущую среду. Сила трения определяется скоростью движения пузырей относительно жидкости. Откуда следует постоянство скоростей движения пузырей относительно жидкости при любых расположениях пузырей.

Приведенные выше рассуждения не являются строгими. Их следует рассматривать, скорее, как наводящие соображения, показывающие разумность используемой ниже гипотезы о постоянной относительной скорости. Отметим, что эта гипотеза качественно верно отражает основные закономерности движения включений в несущей среде. Например, при всплытии

пузырей в жидкости использование гипотезы о постоянстве относительной скорости позволяет описать эффект более быстрого перемещения двух пузырьков, движущихся друг за другом по сравнению с перемещением одиночного пузыря. Аналогичная гипотеза успешно использовалась в [12].

Задание относительной скорости движения включений позволяет определить поле скоростей несущей среды при конкретном расположении включений. После этого можно найти среднюю силу. При усреднении предполагалось, что включения расположены «случайным образом», как это понималось в [8].

Для определения понятия скорости движения включений относительно несущей среды рассмотрим потенциальные течения несущей среды вокруг включений. Тогда в окрестности любого включения при произвольном положении остальных включений можно разложить потенциал течения по сферическим гармоникам:

$$(1.1) \quad \varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi) \left(A_{jm} r^j + \frac{B_{jm}}{r^{j+1}} \right),$$

где P_j^m — присоединенная функция Лежандра первого рода порядка j ; θ и r — угол радиус-вектора $\mathbf{r}$ (из начала координат в точку, в которой определяется потенциал) с осью z и его модуль соответственно; α_{jm} , β_{jm} , A_{jm} , B_{jm} — константы.

В случае движения одиночной сферической частицы радиуса R со скоростью $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$ в неподвижной безграничной несущей среде справедливы соотношения

$$(1.2) \quad \alpha_{10} B_{10} = -R^3 \Delta v_z / 2, \quad \alpha_{11} B_{11} = -R^3 \Delta v_x / 2, \\ \beta_{11} B_{11} = -R^3 \Delta v_y / 2.$$

Остальные коэффициенты при движении одиночного включения равны нулю. По аналогии со случаем одиночного включения формулу (1.2) будем использовать как определение скорости относительного движения сферического включения в дисперсной среде по известным коэффициентам разложения (1.1).

Рассмотрим течение дисперсной среды в области G с границей Γ_0 . Потенциал течения идеальной жидкости φ вокруг сферических включений удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \varphi = 0 \text{ при } r \in G$$

и граничным условиям

$$\partial \varphi / \partial n|_{\Gamma_0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0(\Gamma_0), \quad \partial \varphi / \partial n|_{\Gamma_i} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе; $\mathbf{v}_0$ — скорость на границе области; Γ_i — граница i -го пузыря; $\mathbf{v}_i$ — скорость движения i -го включения. Векторы $\mathbf{v}_i$ подбираются из условия, чтобы скорость движения включений относительно жидкости была равна $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ($\Delta \mathbf{v}(\mathbf{r})$ — заданная плавная функция координат).

Потенциал течения жидкости φ будем строить путем последовательных приближений, отражая возмущения от одних включений относительно других [13].

Первое приближение φ^1 отыскивается в виде

$$\varphi^1 = \sum_{i=1}^N \varphi_i^1,$$

где φ_i^1 — потенциал течения при движении только i -го пузыря в безграничной жидкости; φ_i^1 находится как решение уравнения

$$\Delta \varphi_i^1 = 0, \quad \varphi_i^1 \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \varphi_i^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n},$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра i -го включения; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки,

в которой определяется потенциал. Значение $\mathbf{v}_i$ подбирается из условия, чтобы скорость движения включения относительно жидкости, построенная по потенциалу φ^1 совпадала с заданной (формулы (1.1), (1.2)).

Второе приближение φ^2 отыскивается таким образом, чтобы сумма $\varphi^1 + \varphi^2$ удовлетворяла условиям на границе Γ_0 области G , занятой смесью:

$$\Delta\varphi^2 = 0, \quad \partial\varphi^2/\partial n|_{\Gamma_0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0 - \partial\varphi^1/\partial n|_{\Gamma_0}.$$

Третье приближение представляется в виде

$$\varphi^3 = \sum_{i=1}^N \varphi_i^3,$$

где φ_i^3 отыскиваются таким образом, чтобы сумма $\varphi^1 + \varphi^2 + \varphi_i^3$ удовлетворяла уравнению и граничному условию на поверхности i -го включения

$$\Delta\varphi_i^3 = 0, \quad \varphi_i^3 \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial\varphi_i^3}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i}.$$

При этом скорость включения $\mathbf{v}_i$ подбирается из условия, чтобы скорость движения включения относительно жидкости, построенная по потенциалу $\varphi^1 + \varphi^2 + \varphi_i^3$, совпадала с заданной (формулы (1.1), (1.2)). Следующие приближения находятся аналогично.

Отметим, что построенный таким способом потенциал течения жидкости φ около двух движущихся включений, как показано в [13], очень быстро сходится к точному потенциалу при любых (включая случай соприкосновения) расстояниях между включениями.

Из построения φ следует, что φ представляется в виде ряда, члены которого либо не зависят от расположения ни одного из включений (такое слагаемое есть в φ^2), либо зависят от расположения только одного (φ_i^1), либо от двух включений и т. д. Выделим пробное фиксированное включение с центром в точке $\mathbf{r}_0$, вокруг которого расположены внешние включения. Удобно присуммировать по аналогии с [8] слагаемые в φ , зависящие от расположения именно l внешних включений ($l = 0, 1, \dots, N$), тогда

$$(1.3) \quad \varphi(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{l=0}^N \chi_l^0(\mathbf{r}), \quad \chi_0^0 = \chi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

$$\chi_l^0 = \sum_{w_{r_{i1}, \dots, r_{il}}}^N \chi_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{i1}, \dots, \mathbf{r}_{il}),$$

где χ_l^0 зависит от расположения только l внешних включений; $w_{r_{i1}, \dots, r_{il}}^N$ — сочетания l из N включений (выбраны включения $i_1, \dots, i_l$), $\chi_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{i1}, \dots, \mathbf{r}_{il})$ зависит только от расположения включений $i_1, \dots, i_l$ и пробного. Величину χ_l^0 будем называть l -частичным взаимодействием.

Силу $\mathbf{F}$, действующую на пузырь, в рассматриваемом случае невязкой жидкости легко рассчитать по формуле

$$(1.4) \quad \mathbf{F} = - \int_S p d\mathbf{s},$$

где S — поверхность пробного пузыря; p — давление в жидкости. Давление p определим из интеграла Коши — Лагранжа для жидкости около пробного включения

$$(1.5) \quad p = \rho f(t) + \rho U - \rho \partial\varphi/\partial t - \rho(\text{grad } \varphi)^2/2,$$

где φ — потенциал течения жидкости; ρ — плотность жидкости; t — время; $f(t)$ — функция времени; U — потенциал массовой силы.

Для простоты ниже ограничимся одномерной постановкой задачи и будем предполагать отсутствие градиентов средних параметров среды, т. е. скорость движения включений относительно жидкости направлена вдоль оси z , все средние характеристики течения не зависят от координат.

Подставим (1.5) в (1.4). Первый член (1.5) дает нулевой вклад в силу F , второй дает силу Архимеда F_A . Полученное уравнение усредним по положению всех пузырей, кроме пробного, т. е. умножим на функцию распределения и проинтегрируем по пространству состояний. Окончательное выражение для средней по положению центров других включений силы $\langle F \rangle$, действующей на пробное включение при одномерном (вдоль оси z) течении, имеет вид

$$(1.6) \quad \langle F \rangle = F_A + \rho \left\langle \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta ds \right\rangle + \frac{\rho}{2} \left\langle \int_S (\text{grad } \varphi)^2 \cos \theta ds \right\rangle,$$

$$F_A = -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g,$$

где g — ускорение свободного падения. Можно показать, что третье слагаемое (1.6) в случае отсутствия градиентов средних характеристик течения равно нулю. Поэтому ниже рассматривается только второе слагаемое, которое с учетом (1.3) можно представить в виде

$$(1.7) \quad \left\langle \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta ds \right\rangle = \sum_{l=0}^N (\alpha_2)^l \frac{1}{l!} \left(\frac{3}{4\pi R^3} \right)^l \frac{1}{V_0} \int \int \int_{r_1, \dots, r_l} \frac{\partial}{\partial t} \chi_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) f_{l+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) \cos \theta ds d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_l,$$

где f_{l+1} — $(l+1)$ -частичная функция расположения центров пузырей; V_0 — объем смеси.

Сумма (1.7) правильно разлагает исходный интеграл в ряд по степеням α_2 в случае, когда существуют конечные пределы интегралов в правой части (1.7) при $V_0 \rightarrow \infty$ и $\alpha_2 \rightarrow 0$. В [8] показано, что для сред с регулярной структурой это не так.

2. Доказательство корректности разложения (1.7) при $l \geq 2$. Величину χ_l можно представить в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое χ_l^b не учитывает границу, второе слагаемое χ_l^r появляется за счет границы $\chi_l = \chi_l^b + \chi_l^r$.

Изучим структуру χ_l^b . Для оценки сходимости интегралов в (1.7) важно знать поведение χ_l^b далеко от центров включений $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l$. Для этого удобно использовать разложение χ_l^b по сферическим гармоникам. При анализе сходимости можно оставить только старшие сферические гармоники, которые убывают наиболее медленно. Каждое нечетное приближение после первого (третье, пятое и т. д.) меняет коэффициенты разложения при всех сферических гармониках, кроме нулевой (коэффициент при которой равен нулю) и, как показано выше, первой гармоники (коэффициент при которой определяется скоростью относительного движения и остается постоянным (1.1), (1.2)). Поэтому старшими сферическими гармониками χ_l^b (при $l \geq 2$) будут квадруполь. Квадруполь при $r \rightarrow \infty$ убывает как $1/r^3$. Можно показать, что при отражении диполя или квадруполя мощности q в i -м включении возникает квадруполь мощности $q \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)^4$ или $q \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)^5$ соответственно. Тогда для величины χ_l^b справедлива оценка

$$\chi_l^b = k \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)^4 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right)^5 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4|} \right)^5 \dots \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_{l-1} - \mathbf{r}_l|} \right)^5 \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}|^3},$$

где первый множитель описывает интенсивность квадруполя во втором включении, наведенного диполем в первом, последний множитель описывает величину потенциала, наведенного в точке $\mathbf{r}$ квадруполем в l -м включении, а остальные множители описывают интенсивность квадруполей в i -м включении, наведенных квадруполем $(i-1)$ -м включении. Величина k зависит от скоростей пузырей и косинусов углов между векторами

$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_l - \mathbf{r}$ — осями координат. Тогда с учетом того, что при вычислении важен $\nabla \partial \varphi / \partial t$, можно показать, что если реализуются конечные ускорения (жидкости и пузырей), то справедлива следующая оценка:

$$(2.1) \quad \int_S \frac{\partial \chi_i^b}{\partial t} \cos \theta ds \leq R^2 \frac{R}{|\mathbf{r}_l|} k_1 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)^4 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right)^5 \dots \\ \dots \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_{l-1} - \mathbf{r}_l|} \right)^5 \frac{1}{|\mathbf{r}_l|^4},$$

где k_1 — константа для всего объема V_0 .

Интегралы в разложении (1.7) зависят от поведения $l+1$ -частичной функции распределения $f_{l+1}(r_0, r_1, \dots, r_l)$. Очевидные свойства функции $f_{l+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l)$ для хаотического распределения включений ($f_{l+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) \leq C$, $f_{l+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) = 0$ при $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < 2R$) с учетом (2.1) позволяют окончательно получить

$$(2.2) \quad \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l} \int_S \frac{\partial \chi_l^b}{\partial t} \cos \theta ds f_{l+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_l < c_1,$$

где c_1 — константа, не зависящая от α_2 и V_0 , что и доказывает корректность разложения (1.7).

Аналогично исследуется влияние границы области. Для плоской границы функция χ_i^r строится явно методом отражения относительно плоскости границы. Соответствующие оценки легко проводятся аналогично случаю отсутствия границ. Для произвольной области учесть границу сложнее, однако можно показать, что, например, для выпуклых областей V_0 оценки типа (2.2) также справедливы.

Приведенные выкладки и рассуждения доказывают, что сумма (1.7) правильно разлагает $\left\langle \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta ds \right\rangle$ в ряд по степеням $(\alpha_2)^l$ при $l \geq 2$.

Это означает, что для определения средней силы с точностью до α_2 достаточно рассмотреть первые два слагаемых в (1.7).

3. Вычисление вклада в силу межфазного взаимодействия от первых двух приближений φ . Для расчета первых двух слагаемых в правой части (1.7) необходимо использовать все приближения итерационного метода построения потенциала φ . Ниже показано, что вклад от первых двух приближений φ_1 и φ_2 очень сложно вычислить непосредственно по формуле (1.7). Поэтому вклад от φ_1 и φ_2 вычисляется с использованием специального приема. Последующие приближения φ учтены непосредственно по формуле (1.7).

Из построения φ_1 и φ_2 можно получить следующую формулу:

$$(3.1) \quad \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \left[\frac{R^3}{2} \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}_i)}{\partial t} \frac{\cos \theta}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^2} + \frac{\Delta v(\mathbf{r}_i) R^3}{2} (v(\mathbf{r}_i) - v(0)) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} \right] + \frac{\partial \varphi^2}{\partial t},$$

где θ — угол между вектором $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ и осью z ; $v(\mathbf{r}_i)$ — скорость движения i -го включения.

Подстановка отдельных слагаемых правой части (3.1) в (1.7) приводит к расходящимся интегралам при $V_0 \rightarrow \infty$. Это связано с тем, что равномерно распределенные во всем бесконечном объеме диполи будут вызывать бесконечные скорости жидкости.

В реальных задачах бесконечные скорости не будут возникать за счет граничных условий, т. е. за счет $\partial \varphi^2 / \partial t$. Это означает, что интеграл в (1.7) при $(\alpha_2)^1$ от всего выражения (3.1) будет конечен, хотя от каждого из слагаемых (3.1) интегралы бесконечны. Определить φ^2 при произвольной геометрии V_0 и произвольных граничных условиях сложно. Чтобы обойти

эту сложность будем связывать $\left\langle \int_S \frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial t} \cos \theta ds \right\rangle$ со средними параметрами жидкости в соответствующем элементарном объеме. Для этого воспользуемся теоремой Грина [14], которая записывается в виде

$$(3.2) \quad \int_V (\psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left(\psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds.$$

В качестве области V используем объем, занятый смесью, за исключением объема пробного включения. Отметим, что V включает в себя объемы внешних включений. В качестве ψ и Φ используем функции $\partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$ и $\cos \theta/r^2$ соответственно. Из (3.1) следует, что $\nabla^2 \psi$ представляется в виде суммы дельта-функций и их производных. Это позволяет вычислить левую часть (3.2) и усреднить (3.2) по положению внешних включений. Окончательная формула имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \int_{S_f} \int \frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial t} \frac{2}{R^3} \cos \theta ds f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N = \\ & = - \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \int_{S_f} \int \frac{\cos \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial t} \right] ds f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N - \\ & - \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \int_{\Gamma_0} \left[\psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] ds f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N + \\ & + \frac{4\pi R^3}{2} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{3 \cos^2 \theta_1 - 1}{(r_1)^3} \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}_1)}{\partial t} n \bar{g}(0, r_1) d^3 \mathbf{r}_1 - \frac{4\pi R^3}{2} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{9 \cos \theta_1 - 15 \cos^3 \theta_1}{(r_1)^4} \times \\ & \quad \times \Delta v(\mathbf{r}_1) [v(\mathbf{r}_1) - v(0)] n g(0, r_1) d^3 \mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

где g — бинарная коррелятивная функция для случая хаотического распределения включений [15]; θ_1, r_1 — координаты вектора $\mathbf{r}_1$; S_f — поверхность пробного пузыря. Формула (3.3) позволяет вычислить вклад φ^1 и φ^2 в среднюю силу межфазного взаимодействия.

Первое слагаемое правой части (3.3) можно определить, если применить формулу Грина (3.2), в которой в качестве объема V и функций ψ и Φ использовать объем пробного включения, $\partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$ и $r \cos \theta$ соответственно. Остальные слагаемые правой части (3.3) можно существенно упростить, если еще один раз применить формулу Грина, в которой в качестве объема V и функций ψ и Φ использовать объем, занятый смесью V_0 , $\partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$ и $\cos \theta/r_2$ соответственно. Причем в этом случае рассматриваются такие распределения центров включений, при которых начало координат находится в несущей среде. Окончательно формула (3.3) примет вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \int_{S_f} \int \frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial t} \frac{3}{R^3} \cos \theta f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) ds d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N = \\ & = - \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \int_{\Gamma_0} \left\{ [\psi f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) - \psi_1 f_N(0 | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) - \right. \\ & - \left. \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) - \frac{\partial \psi_1}{\partial n} f_N(0 | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right] \frac{\cos \theta}{r^2} \right\} ds d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N + \\ & + \frac{4\pi R^3}{2} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{3 \cos^2 \theta_1 - 1}{(r_1)^3} \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}_1)}{\partial t} n (g - g_1) d^3 \mathbf{r}_1 - \frac{4\pi R^3}{2} \int_{\mathbf{r}_1} \frac{9 \cos \theta_1 - 15 \cos^3 \theta_1}{(r_1)^4} \times \\ & \quad \times \Delta v(\mathbf{r}_1) (v(\mathbf{r}_1) - v(0)) n (g - g_1) d^3 \mathbf{r}_1 + 4\pi \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} f_N(0 | \mathbf{r}_1, \dots, \\ & \quad \dots, \mathbf{r}_N) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N - 4\pi \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta v}{\partial t}, \end{aligned}$$

где ψ и ψ_1 равны $\partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$, когда в начале координат есть и нет включения соответственно; $f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ и $f_N(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — функции распределения включений для случая, когда в начале координат есть и нет включения соответственно; g_1 — одночастичная функция распределения включений при условии, что в начале координат находится несущая среда.

Проведя довольно громоздкие выкладки, можно показать, что первое слагаемое в правой части (3.4) стремится к нулю при $V_0 \rightarrow \infty$.

В [16] показано, что для случая хаотического расположения включений с точностью до α_2 функции g и g_1 можно аппроксимировать ступенчатыми функциями:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{при } r < 2R, \\ 1 & \text{при } r > 2R, \end{cases} \quad g_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ 1 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Тогда, ограничиваясь первой производной в разложении подынтегральных функций во втором и третьем слагаемых в правой части (3.4), можно показать, что вторые и третьи слагаемые в (3.4) также равны нулю.

Четвертое слагаемое в правой части (3.4) свяжем со средним ускорением жидкости $\langle dv_l/dt \rangle$:

$$\int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} f_N(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N = \left\langle \frac{dv_l}{dt} \right\rangle.$$

Окончательно вклад первых двух приближений в силу межфазного взаимодействия равен

$$(3.5) \quad F_1 = \left\langle \int_S \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} \cos \alpha \, ds \right\rangle = -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{2} \frac{\partial v_l}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi R^3 \left\langle \frac{dv_l}{dt} \right\rangle.$$

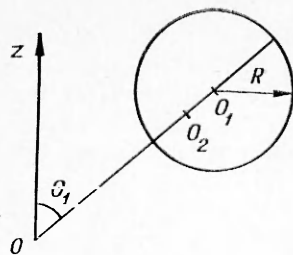
Вычисления показывают, что в рассматриваемой постановке выполняется равенство $\frac{d}{dt} \langle v_l \rangle = \left\langle \frac{dv_l}{dt} \right\rangle$.

4. Учет одночастичного взаимодействия, возникающего в высших приближениях. Можно показать, что границу необходимо учитывать лишь во втором приближении, что было сделано в п. 3. Одночастичное взаимодействие совпадает с точным решением задачи о движении двух включений в безграничной жидкости. Выше было показано, что высшие приближения не меняют убывающие дипольные гармоники вокруг включения. Это обеспечивает быстрое убывание поправок к потенциалу, возникающих в высших приближениях с увеличением расстояния между включениями, достаточное для сходимости интегралов в (1.7). Потенциал течения жидкости при движении в ней двух включений построим методом последовательных приближений. В [13] построено решение задачи о движении шара в поле скоростей источника. Это решение позволяет рассчитать течение при движении шара в поле диполя.

Пусть в поле диполя, расположенного в начале сферической системы координат, расположен диполь мощности Q , направленный вдоль оси Oz . В поле диполя находится сфера радиуса R , центр которой O_1 имеет координаты (θ_1, f) . Тогда можно показать, что течение жидкости является течением, создаваемым диполем и следующими особенностями внутри сферы. В точке O_2 на оси OO_1 (см. фигуру) находится точечный диполь, имеющий проекции: $-\cos \theta_1(R/f)Q$ и $\sin \theta_1(R/f)^3Q$ на ось OO_1 и ось, перпендикулярную OO_1 , соответственно. Точка O_2 определяется из условия $(O_2O_1) = R^2/f$. На отрезке O_1O_2 находятся распределенные диполи, направленные перпендикулярно оси OO_1 с линейной мощностью $Q \sin \theta_1(R/f)^3(x/Rf)$, где x — расстояние от точки O_1 .

Приведенное решение позволяет путем последовательных приближений [13] построить точное решение задачи о движении двух включений.

При вычислении интегралов в (1.7) необходимо вклад от построенного решения усреднить по всем положениям двух включений. После проведе-



ния усреднения по угловым переменным вклад F_2 в силу межфазного взаимодействия от высших приближений представим в виде

$$F_2 = \int_{2R}^{\infty} c(f) df.$$

Для случая больших расстояний между включениями ($R/f \ll 1$) можно ограничиться первым слагаемым разложения $c(f)$ в ряд по R/f , которое удается вычислить аналитически

$$(4.1) \quad c = -\frac{20}{3} \pi \alpha_2 \left(\frac{R}{f} \right)^8 R^2 \frac{d\Delta v}{dt}.$$

Для случая маленьких расстояний f величина c рассчитывалась численно. Расчеты показали, что при $R/f > 3$ точное значение c совпадает с (4.1).

Окончательно

$$(4.2) \quad F_2 = -0,193 \alpha_2 R^3 d\Delta v/dt.$$

Отметим, что использование лишь аналитического результата (4.1) без проведения численных расчетов приводит к замене константы 0,193 на 0,13, что говорит о хорошей точности приближения (4.1).

Формулы (3.5), (4.2) позволяют получить окончательное выражение для силы межфазного взаимодействия, которое в инерциальной системе координат имеет вид

$$(4.3) \quad F = F_1 + F_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \left(g - \left\langle \frac{dv_l}{dt} \right\rangle \right) - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{2} \frac{d\Delta v}{dt} (1 + 0,092 \alpha_2).$$

Первое слагаемое соответствует силе Архимеда, второе — силе за счет присоединенной массы. Из формулы (4.3) видно, что присоединенная масса сферических включений в дисперсной среде несколько больше присоединенной массы одиночного включения. Формула (4.3) получена для случая отсутствия градиентов параметров смеси. Предложенный метод позволяет получить выражение для силы, действующей на включение в смеси с градиентами параметров.

В заключение авторы выражают благодарность Р. И. Нигматулину за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основные механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
2. Ханпель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
3. Batchelor G. K., Green J. T. The determination of bulk stress in suspension of spherical particles to order c^2 .— J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 3.
4. Головин А. М., Чижов В. Е. К расчету скорости осаждения однородной суспензии.— ПММ, 1978, № 1.
5. Нигматулин Б. И., Крошилин А. Е., Крошилин В. Е. Влияние взаимодействия включений в газожидкостной смеси на межфазный тепломассообмен.— ТВТ, 1979, № 4.
6. Бувевич Ю. А., Корнеева Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде.— ПМТФ, 1974, № 4.
7. Jeffrey D. J. Conduction through a random suspension of spheres.— Proc. Roy. Soc. London, A, 1973, vol. 335, N 1602.
8. Крошилин А. Е., Крошилин В. Е., Нигматулин Б. И. Влияние объемной концентрации включений на управления пульсаций пузырей в газожидкостных средах.— ПМТФ, 1980, № 3.
9. Zuber N. On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime.— J. Chem. Eng. Sci., 1964, vol. 19, N 11.
10. Prosperetti A., Van Wijngaarden L. On the characteristics of the equation of motion for a bubbly flow and the related problem of critical flow.— J. Eng. Math., 1976, vol. 10.
11. Buyevich Yu. A. Statical hydromechanics of disperse systems. Pt 1. Physical background and general equation.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 49, pt 3.

12. Струминский В. В., Смирнов Л. П. и др. Законы механики дисперсных сред и двухфазных систем в связи с проблемами повышения эффективности технологических процессов. Препринт № 1. М.: Сектор механики неоднородных сред АН СССР, 1979.
13. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
16. Головин А. М., Чижов В. Е. К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе. — ПММ, 1977, № 6.

Поступила 7/VII 1983 г.

УДК 533.06

СТРУКТУРА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ОТСОСОМ

С. К. Бетяев

(Москва)

Использование отсоса пограничного слоя в целях увеличения аэродинамического качества крыла имеет два назначения: ламинаризацию потока и устранение или затягивание его отрыва. Как исследование устойчивости течения, так и постановка варпационной задачи об определении энергетически оптимальной скорости отсоса должны базироваться на анализе течения в пристеночной области, где имеются потери давления и происходит переход от резких изменений скорости к непрерывному (осредненному) распределению. Такой анализ проведен в рамках уравнения Навье — Стокса с помощью комбинированного метода разных масштабов и сращивания асимптотических разложений при максимальных упрощениях, касающихся постановки задачи и схемы системы отсоса. Определены условия, необходимые для отсоса распределенного расхода жидкости, который считается заданным.

1. Выберем в качестве базовых единичных параметров хорду профиля, скорость невозмущенного потока и плотность жидкости. В локально-декартовой системе координат x_1, y_1 с осью x_1 , направленной вдоль контура профиля, уравнение переноса завихренности — $\Delta\psi$ (ψ — функция тока, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial y_1^2$) в плоском течении имеет вид $L(\Delta\psi) = 0$, где $\delta^{-2} = 1/\nu$ — число Рейнольдса; ν — коэффициент кинематической вязкости; квазилинейный дифференциальный оператор

$$(1.1) \quad L = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} - \delta^2 \Delta.$$

Скорость отсоса пограничного слоя v_{01} по порядку величины равна толщине пограничного слоя:

$$(1.2) \quad v_{01} = \delta v_0(x_1).$$

Если v_{01} меньше этой величины, то влияние отсоса на пограничный слой несущественно. Наоборот, если v_{01} больше $O(\delta)$, то реализуется невязкое течение [6].

Примем, что отсос осуществляется через регулярную решетку поперечных щелей с полупериодом $\tau = B(x_1)\delta^n$, где $0 < n \leq 2$. При $n > 2$ масштабы возмущений настолько малы, что вследствие проявления молекулярных эффектов уравнение Навье — Стокса становится неприменимым. Случай $n \rightarrow 0$ соответствует дискретному отсосу. Коэффициент проницаемости $x_0 = x_{01}/\tau$, где x_{01} — полуширина щели, будем считать произвольным ($0 \leq x_0 \leq 1$).

Применительно к отсосу жидкости через пористые стенки рассматриваемая ниже модель перетекания жидкости не учитывает стохастического расположения пор и их формы, однако имеет идеологическое оправдание, так как модель Дарси, широко апробированная практикой в задачах фильтрации потенциальных потоков, неприменима при отсосе завихренных потоков, т. е. при отсосе пограничного слоя.

Концепция пограничного слоя справедлива, если длина участка отсоса по порядку величины равна $O(1)$, число Рейнольдса велико, т. е. $\delta \ll 1$, а нормальная составляющая скорости удовлетворяет условию