dimensional blades in nonuniform incompressible flows // Symp. IUTAM sur l'Aeroelasticite dans les turbomachines.— Paris, 1976.
11. **Курзин В. Б., Юдин В. А.** Расчет гидродинамического взаимодействия решеток профилей с учетом эволюции вихревых следов // Современные проблемы механики жидкости и газа.— Иркутск, 1988.
12. **Lorber F., Covert E. E.** Unsteady airfoil pressures produced by periodic aerodynamics interference // AIAA J.— 1982.— N 9.

г. Ленинград *Поступила 3/V 1990 г.*

УДК 533.6.011

А. Д. Хонькин

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

В задачах аэрогидромеханики движение вязкого теплопроводного газа традиционно изучается с помощью уравнений Навье — Стокса, которые являются следствием феноменологического замыкания законов сохранения на основе линейных соотношений переноса, связывающих потоки импульса и энергии с пространственными градиентами скорости и температуры, т. е. законов переноса Навье — Стокса и Фурье. В случае медленных квазистационарных процессов эти законы выведены из кинетического уравнения Больцмана с помощью метода Чепмена — Энскога [1]. Однако в [2, 3] показано, что в случае быстрых нестационарных движений вязкого теплопроводного газа в выражения для потоков импульса и энергии кроме членов с пространственными градиентами скорости и температуры должны быть включены временные производные (ускорения) самих потоков, характеризующие эффекты временной памяти. Полученные в этих работах обобщенные уравнения гидродинамики, названные уравнениями гидродинамики быстрых процессов, применялись к исследованию задач о распространении малых возмущений, структуре ударной волны, диффузии и др., с их помощью был получен ряд важных результатов.

В настоящей работе в рамках уравнений гидродинамики быстрых процессов изучаются нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических трубах круглого сечения. Найдены и проанализированы точные решения задачи о пульсирующем движении жидкости под действием гармонически изменяющегося градиента давления и задачи о внезапном приведении в движение первоначально покоящейся жидкости.

1. Для непрерывных сред самого общего вида законы сохранения массы, импульса и энергии записываются как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k}=0,\quad \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k},$$
$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k}=-p\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-P_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial Q_k}{\partial x_k}, \tag{1.1}$$

где ρ — плотность; u_i ($i=1, 2, 3$) — составляющая скорости вдоль оси x_i декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3); p — давление; e — внутренняя энергия; P_{ik} — поток импульса (тензор напряжений); Q_i — тепловой поток (поток энергии). Чтобы получить из законов сохранения (1.1) замкнутую систему уравнений, требуется выразить потоки импульса и энергии через параметры гидродинамического состояния ρ, u_i, e.

В рамках ньютоновской механики сплошных сред используются феноменологические линейные законы переноса Навье — Стокса и Фурье: $P_{ij}=-\mu D_{ij}$, $Q_i=-\lambda\partial T/\partial x_i$. Здесь μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; $D_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$ — тензор скоростей деформаций.

В [3, 4] показано, что эти законы справедливы для описания медленных квазистационарных движений и что для описания быстро изменяющихся во времени процессов линейные алгебраические связи потоков с градиентами следует заменить дифференциальными связями:

$$\tau_p\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}+u_k\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}\right)=-P_{ij}-\mu D_{ij},$$

$$\tau_q\left(\frac{\partial Q_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial Q_i}{\partial x_k}\right)=-Q_i-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

(τ_p и τ_q — времена релаксации). В случае одноатомного совершенного газа $\tau_p=\mu/p$, $\tau_q=\lambda/c_p p$ (c_p — теплоемкость при постоянном давлении).

2. Чтобы получить некоторое представление о тех изменениях, которые дает использование гидродинамики быстрых процессов в сравнении с навье-стоксовской гидромеханикой, в этом и следующем пунктах рассмотрены две задачи нестационарной гидродинамики.

Изучим сначала нестационарное движение несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения (классическую постановку и решение см., например, в [5]). Для течений несжимаемой жидкости полная система уравнений гидромеханики быстрых процессов принимает вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0,\quad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k},$$

$$\tau\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial t}+u_k\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k}\right)=-\mu D_{ij}-P_{ij}.$$

Параметр τ, как и вязкость μ, будем считать постоянной величиной. Направим ось $x_3=z$ вдоль оси трубы, а оси $x_1=x$ и $x_2=y$ расположим в плоскости поперечного сечения. Полагая $u_1=u_2=0$, $u_3=w$, из уравнения неразрывности имеем $\partial w/\partial z=0$, $w=w(x,\ y)$. Оставшаяся пара уравнений дает

$$\rho\partial w/\partial t=-\partial p/\partial z-\partial P_{zx}/\partial x-\partial P_{zy}/\partial y,$$

$$(1+\tau\partial/\partial t)P_{ij}=-\mu D_{ij}\ \ ((ij)=(zx)\text{ или }(zy)),$$

откуда вытекает

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\nu\Delta_2 w. \tag{2.1}$$

Здесь Δ_2 — оператор Лапласа в плоскости поперечного сечения, который при введении в ней полярных координат r, φ дает

$$\Delta_2 w=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

так как w не зависит от φ. Уравнение (2.1) является основным уравнением нестационарных движений несжимаемой вязкой жидкости с памятью по цилиндрической трубе. Оно позволяет найти распределение продольной скорости по сечению трубы при заданном градиенте давления $\partial p/\partial z$ как функции времени t.

Теперь рассмотрим пульсирующее движение, соответствующее гармоническому закону изменения перепада давления в трубе: $-\partial p/\partial z=\rho A\cos\omega t$, $A=\mathrm{const}$. Тогда (2.1) принимает вид

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}-A\cos\omega t\right)=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right).$$

Исследуем установившийся режим. Начальные условия при этом теряют свое значение и требуется удовлетворить лишь граничному условию прилипания на стенке: $w=0$ при $r=a$ (a — радиус трубы). Положим

$$w(r,\ t)=u(r,\ t)+(A/\omega)\sin\omega t. \tag{2.2}$$

Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2.3}$$

с граничным условием

$$u(a,\ t)=-(A/\omega)\sin\omega t. \tag{2.4}$$

Применим метод разделения переменных в виде

(2.5) $$u(r,\ t) = \operatorname{Re}[CR(r)\exp(i\omega t)]$$

(C — постоянная). Из (2.3) и (2.5) следует

(2.6) $$r^{-1}(rR')' + i\alpha R = 0,\ \alpha = (\omega/\nu)(1 - i\omega\tau).$$

Конечное при $r = 0$ (на оси трубы) решение уравнения (2.6) имеет вид

(2.7) $$R(r) = J_0(r\sqrt{i\alpha}),$$

где $J_0(x)$ — бесселева функция первого рода нулевого порядка от комплексного аргумента x [6], которая определяется, например, рядом

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!!)^2} x^{2k}.$$

В соответствии с (2.6), (2.7) аргумент x представим как $x = r\sqrt{i\alpha} = r\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2}(1 + \omega^2\tau^2)^{1/4}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right]$ ($\beta = \operatorname{arctg}\omega\tau$). Следовательно,

$$x^{2k} = \left(r^2\frac{\omega}{\nu}\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\right)^k \exp\left[ik\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right].$$

Таким образом, (2.7) имеет структуру $R(r) = Z_0(r) - iZ_1(r)$. Здесь действительные функции Z_0 и Z_1 даются рядами

$$Z_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!!)^2}\left(r^2\frac{\omega}{\nu}\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - \beta k\right),$$

$$Z_1(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!!)^2}\left(r^2\frac{\omega}{\nu}\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2} - \beta k\right).$$

Отметим, что при $\tau = 0$

$$[Z_0(r)]_{\tau=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n!!)^2}\left(r^2\frac{\omega}{\nu}\right)^{2n} = \operatorname{ber}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right),$$

$$[Z_1(r)]_{\tau=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(4n+2)!!]^2}\left(r^2\frac{\omega}{\nu}\right)^{2n+1} = \operatorname{bei}\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right)$$

($\operatorname{ber}(x)$ и $\operatorname{bei}(x)$ — функции Кельвина [6]).

Запишем теперь решение уравнения (2.3) в виде действительной части выражения (2.5) с комплексной константой $C = C_r + iC_i$:

$$u(r,\ t) = (C_rZ_0 + C_iZ_1)\cos\omega t + (C_iZ_0 - C_rZ_1)\sin\omega t.$$

Из граничного условия (2.4) вытекает

$$C_r = \frac{A}{\omega}\frac{Z_{1a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2},\quad C_i = -\frac{A}{\omega}\frac{Z_{0a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2}$$

$$(Z_{0a} = Z_0(a),\ Z_{1a} = Z_1(a)).$$

Подставляя полученные результаты в (2.2), имеем

(2.8) $$w(r,\ t) = \frac{A}{\omega}\left\{\left[1 - \frac{Z_{0a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2}Z_0(r) - \frac{Z_{1a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2}Z_1(r)\right]\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{Z_{1a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2}Z_0(r) - \frac{Z_{0a}}{Z_{0a}^2 + Z_{1a}^2}Z_1(r)\right]\cos\omega t\right\}.$$

Отметим, что при $\tau = 0$ (2.8) переходит в соответствующее решение уравнений Навье — Стокса [5]. В данном случае гидродинамика быстрых процессов тождественна гидромеханике неньютоновской жидкости с максвелловским реологическим законом вязкости.

3. Рассмотрим задачу о приведении в движение первоначально покоящейся в цилиндрической трубе несжимаемой вязкой жидкости под действием внезапно приложенного заданного постоянного перепада давления. Навье-стоксовское решение этой задачи можно найти, например, в [7].

В рамках гидродинамики быстрых процессов скорость $w(r,\ t)$ вдоль оси z по-прежнему подчиняется уравнению (2.1), в котором $\partial p/\partial z = -\Delta p/l$ (Δp — перепад давления на длине l трубы), однако теперь для выделения однозначного решения в дополнение к классическим условиям $w = 0$ при $t = 0$, $w = 0$ при $r = a$ необходимо задать еще одно начальное условие, например, для ускорения $\partial w/\partial t$ при $t = 0$. Этот вопрос обсуждается более подробно несколько ниже, после получения решения задачи при произвольных начальных данных.

Запишем решение задачи

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\Delta p}{\rho l}\right)=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

в виде

$$w(r,\ t)=u(r,\ t)+\frac{a^2\Delta p}{4\mu l}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right). \tag{3.1}$$

Тогда функция u удовлетворяет однородному уравнению

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{3.2}$$

с условиями

$$u(a,\ t)=0,\quad u(r,\ 0)=-\frac{a^2\Delta p}{4\mu l}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right).$$

Применим метод разделения переменных, полагая $u = T(t)R(r)$. Из (3.2) имеем

$$\frac{\tau\ddot{T}(t)+\dot{T}(t)}{T}=\frac{\nu}{rR}(rR')'=-\alpha, \tag{3.3}$$

где точкой и штрихом обозначаются производные по t и r соответственно; α — положительная постоянная. Из (3.3) находим $R(r) = J_0(r\sqrt{\alpha/\nu})$. Используя граничное условие $R(a) = 0$, получим, что параметр α может принимать дискретные значения: $\alpha_k = \nu\lambda_k^2/a^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (λ_k — абсциссы нулей функции Бесселя: $J_0(\lambda_k) = 0$). Далее следуем стандартной процедуре: $\tau\ddot{T}_k + \dot{T}_k + \alpha_k T_k = 0$, $T_k = A_k \exp(s_{1k}t) + B_k \exp(s_{2k}t)$. Здесь $s_{1k} = (-1 + \sqrt{1-4\alpha_k\tau})/2\tau$; $s_{2k} = (-1 - \sqrt{1-4\alpha_k\tau})/2\tau$.

Таким образом,

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\exp(s_{1k}t)+B_k\exp(s_{2k}t)]\,J_0\left(\lambda_k\frac{r}{a}\right). \tag{3.4}$$

Согласно начальному условию,

$$u(r,\ 0)=-\frac{a^2\Delta p}{4\mu l}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\,J_0\left(\lambda_k\frac{r}{a}\right). \tag{3.5}$$

Для определения коэффициента $A_k + B_k$ воспользуемся результатами теории рядов Фурье — Бесселя, согласно которой произвольную функцию $f(x)$ вещественной переменной x можно представить в виде ряда

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0(\lambda_kx), \tag{3.6}$$

где

$$a_k=\frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\int_0^1 xf(x)\,J_0(\lambda_kx)\,dx. \tag{3.7}$$

Формула (3.7) — следствие соотношения ортогональности для функций Бесселя:

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)\,J_\nu(\lambda_m x)\,dx = \frac{[J_{\nu+1}(\lambda_k)]^2}{2}\,\delta_{km}$$

(λ_k — корни уравнения $J_\nu(\lambda_k) = 0$).

Умножим (3.5) на $xJ_0(\lambda_k x)$ ($x = r/a$) и проинтегрируем по x от 0 до 1. В соответствии с (3.7) получим

$$A_k + B_k = \frac{-a^2\Delta p}{2\mu l\,[J_1(\lambda_k)]^2}\int_0^1 (x - x^3)\,J_0(\lambda_k x)\,dx. \tag{3.8}$$

Для вычисления интеграла в (3.8) используем представление $J_p(x)$ в виде ряда

$$J_p(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(s+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p},$$

подставляя которое в (3.8), найдем

$$\int_0^1 (x + x^3)\,J_0(\lambda_k x)\,dx = \frac{2}{\lambda_k^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda_k^{2s+2}}{s!\,(s+2)!\,2^{2s+2}} = \frac{2J_2(\lambda_k)}{\lambda_k^2}.$$

Подставляя этот результат в (3.8) и используя формулу $J_2(x) = (2/x)J_1(x) - J_0(x)$ с $x = \lambda_k$ и условие $J_0(\lambda_k) = 0$, имеем

$$A_k + B_k = -\frac{2a^2\Delta p}{\mu l\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}. \tag{3.9}$$

Для нахождения дополнительной связи между постоянными A_k и B_k необходимо располагать еще одним начальным условием, например значением ускорения $\partial w/\partial t$ при $t = 0$. В случае навье-стоксовской гидродинамики эта величина получается в результате решения

$$\partial w/\partial t|_{t=0} = \Delta p/\rho l, \tag{3.10}$$

тогда как теперь она может задаваться произвольно. В целях сравнения с навье-стоксовским решением сформулируем недостающее начальное условие в виде (3.10). Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\Delta p}{\rho l} = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k s_{1k} + B_k s_{2k})\,J_0(\lambda_k x). \tag{3.11}$$

Используя известную формулу $\int xJ_\nu(x)\,dx = xJ_{\nu+1}(x)$ с $\nu = 0$, из (3.6) и (3.7) имеем

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2J_0(\lambda_k x)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)}. \tag{3.12}$$

Согласно (3.11) и (3.12),

$$A_k s_{1k} + B_k s_{2k} = \frac{2\Delta p}{\rho l\lambda_k J_1(\lambda_k)}. \tag{3.13}$$

Из уравнений (3.9) и (3.13) находим константы A_k и B_k:

$$A_k = \frac{2\Delta p\tau\,(1 + s_{2k}/\alpha_k)}{\rho l\lambda_k J_1(\lambda_k)\sqrt{1 - 4\alpha_k\tau}},\quad B_k = \frac{-2\Delta p\tau\,(1 + s_{1k}/\alpha_k)}{\rho l\lambda_k J_1(\lambda_k)\sqrt{1 - 4\alpha_k\tau}}.$$

Отметим, что при $4\alpha_k\tau > 1$ величины s_{1k} и s_{2k} становятся комплексными, однако выражение (3.4) все равно остается действительным. Это нетрудно проверить, учитывая, что $s_{1k} = \bar{s}_{2k}$. Соответствующие члены ряда содержат осциллирующие компоненты с затуханием вида

$$\exp(-t/2\tau)(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t), \quad \omega_k = \frac{\sqrt{|1-4\alpha_k\tau|}}{2\tau}.$$

Рассмотрим теперь случай малых τ. Разлагая найденные результаты в ряды Тейлора, получим

$$s_{1k} = -\alpha_k - \alpha_k^2\tau + O(\tau^2), \quad s_{2k} = -\tau^{-1} + \alpha_k + O(\tau),$$

$$A_k = \frac{-2\Delta p a^2}{\mu l \lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}[1 + O(\tau^2)], \quad B_k = \frac{2\Delta p \alpha_k \tau^2}{\rho l \lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}[1 + O(\tau)].$$

Подставляя эти оценки в (3.1), (3.4), находим, что с точностью $O(\tau^2)$

$$w(r,t) = \frac{a^2\Delta p}{4\mu l}\left\{1 - \frac{r^2}{a^2} - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{a}\right)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}\exp[-\alpha_k t(1+\alpha_k\tau)]\right\}.$$

Полагая здесь $\tau = 0$, имеем навье-стоксовское решение задачи [7]:

$$w(r,t) = \frac{a^2\Delta p}{4\mu l}\left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{a}\right)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}\exp\left(-\nu\lambda_k^2 t/a^2\right)\right].$$

Таким образом, при малых τ отличие полученного нами решения от навье-стоксовского содержится в основном (по крайней мере, в членах порядка ниже τ^2) в экспоненте, разложение которой по малости τ дало бы секулярный член типа τt.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
2. **Хонькин А. Д.** Об уравнениях гидродинамики быстрых процессов // ДАН СССР.— 1973.— Т. 210, № 5.
3. **Хонькин А. Д.** О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов // Аэромеханика.— М.: Наука, 1976.
4. **Хонькин А. Д.** Асимптотические методы в теории уравнения Больцмана и уравнения гидродинамики // Тр. ЦАГИ.— 1977.— Вып. 1894.
5. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1974.— Т. 2.
7. **Слезкин Н. А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИТТЛ, 1955.

г. Жуковский *Поступила 30/V 1990 г.*

УДК 533.6.011

В. А. Гудков

ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ НА ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

При обтекании тела потоком жидкости или газа вблизи его поверхности образуется тонкий пограничный слой, поведение которого определяет гидродинамическое сопротивление. При отрыве пограничного слоя от поверхности обтекаемого тела резко увеличивается сопротивление [1, 2]; чтобы его уменьшить, необходимо затянуть отрыв, т. е. сместить линию отрыва пограничного слоя как можно дальше к задней критической точке, благодаря чему удается сузить область застойного течения позади тела (след за телом) и уменьшить гидродинамическое сопротивление. В этой связи актуальны исследования нестационарного обтекания тела потоком жидкости. В [2] рассмотрено разгонное движение тела цилиндрической формы, когда оно ускоряется в покоящейся жидкости. В первые моменты после начала разгонного движения наблюдается безотрывное обтекание тела, затем, когда цилиндр пройдет путь $s = 0{,}351\ R$