УДК 532.62; 536.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ В ТОНКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ НА НЕСТАЦИОНАРНО РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ ВО ВЛАЖНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

М. М. Хайдер, А. М. Меджахед

Университет г. Бенха, 13518 Бенха, Египет
E-mails: mohamedmbd@yahoo.com, ah_mg_sh@yahoo.com

Теоретически и численно исследуется задача о течении и теплопередаче на нестационарно растягивающейся пластине, расположенной в пористой среде, при наличии теплового излучения. С использованием метода вариационных итераций уравнения непрерывности, импульса и энергии, которые являются связанными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, приводятся к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучена сходимость предложенного метода, получена оценка его погрешности. Исследовано влияние различных параметров, таких как параметр Дарси, параметр теплового излучения и число Прандтля, на профили скорости течения и температуры, а также на локальный коэффициент поверхностного трения и локальное число Нуссельта. Показано, что результаты, полученные методом вариационных итераций, хорошо согласуются с данными, полученными методом Рунге — Кутты совместно с методом пристрелки.

Ключевые слова: метод вариационных итераций, течение в тонкой пленке, растягивающаяся поверхность, пористая среда, тепловое излучение.

Введение. Изучение течения и теплопередачи в тонкой пленке на нестационарно растягивающейся пластине представляет интерес при моделировании таких производственных процессов, как экструзия, непрерывная разливка металлов, нанесение покрытия на провода и световоды, охлаждение большой металлической пластины в охладительном канале, конструирование различных теплообменников, выращивание кристаллов, нанесение покрытия из олова на медную проволоку, а также в реакторах с псевдоожиженным слоем, химическом технологическом оборудовании и т. д. В работе [1] получено точное автомодельное решение задачи о стационарном двумерном течении в пограничном слое, обусловленном растяжением пластины, которая движется в своей плоскости со скоростью, линейно зависящей от расстояния от некоторой неподвижной точки. Задача о течении, теплопередаче и переносе массы на растягивающейся пластине при наличии отсоса или вдува исследована в [2]. В [3] с использованием результатов работы [1] исследованы различные особенности течения и теплопередачи, происходящей в бесконечной по протяженности области жидкости, окружающей растягивающуюся пластину.

В последние годы изучению течения жидкости и теплопередачи в пористых средах уделяется значительное внимание, что обусловлено многочисленными разработками энергетического оборудования для осуществления различных процессов, таких как извлечение геотермальной энергии, хранение радиоактивных отходов атомной промышленности, предотвращение загрязнения в грунтовой воде, восстановление масел, геофизическая теплоизоляция, охлаждение электронных блоков, производство продуктов питания, отливка и сварка, предотвращение распространения загрязняющих веществ в химической промышленности. В работе [4] рассмотрена задача естественной конвекции на вертикальной непроницаемой плоской пластине в пористой среде Дарси. Комбинированное течение на наклонной поверхности в пористой среде при естественной и вынужденной конвекции исследовано в [5]. В работе [6] изучались двойственные решения задачи смешанной конвекции для течения на вертикальной поверхности в пористой среде с постоянной температурой поверхности при наличии противотока. В [7] рассмотрены режимы вдува и отсоса на поверхности вертикальной пластины при смешанной конвекции в пористых средах. Естественная конвекция в пористой среде на вертикальной пластине с заданным на ее поверхности тепловым потоком изучалась в [8]. В работе [9] численно исследовано влияние равномерного поперечного потока массы при естественной конвекции на конусе, погруженном во влажную пористую среду. В [10] изучено влияние массопереноса на поверхности при смешанной конвекции неньютоновских жидкостей в пористых средах.

Во всех указанных выше работах рассматривалось уравнение пограничного слоя, а граничные условия ставились на пластине и на бесконечности в жидкости. В [11] впервые при исследовании задачи о течении в тонкой пленке ньютоновской жидкости на нестационарно растягивающейся поверхности использовано преобразование подобия, чтобы свести управляющие дифференциальные уравнения в частных производных к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром нестационарности. В работе [12] задача [11] была обобщена на случай теплопереноса. В [13] представлены точные аналитические решения для нахождения импульса и теплопереноса в случае нестационарного движения жидкой пленки, вызванного только одноосным растяжением горизонтальной упругой пластины. В работе [14] решение, полученное в [12], обобщено на более общее распределение температуры, заданной на растягивающейся пластине. Совместное влияние вязкой диссипации и магнитного поля на течение и теплопередачу в жидкой пленке на нестационарно растягивающейся поверхности изучено в работе [15]. В [16] исследовано влияние термокапиллярности и магнитного поля в тонкой жидкой пленке на нестационарно растягивающейся упругой пластине. Полученные методом гомотопического анализа решения задачи о нестационарном течении в случае пластины конечной толщины представлены в [17].

В настоящей работе для поиска приближенных решений уравнений применяется относительно новый аналитический метод — метод вариационных итераций (МВИ). В этом методе решение имеет форму сходящегося ряда с легко вычисляемыми членами. В последнее время метод вариационных итераций играет важную роль при проведении исследований в этой области. Данный метод, предложенный в [18] в качестве модификации общего метода лагранжевых множителей, позволяет получить последовательность функций, сходящуюся к точному решению задачи. Показано, что МВИ является мощным инструментом для решения задач различного типа [19–25]. Этот метод позволяет решать задачи без дискретизации переменных, поэтому он не влияет на погрешность округления при вычислении, не требует большого объема памяти компьютера и больших временных затрат на расчеты. Кроме того, МВИ позволяет получить решение задачи в замкнутом виде, в то время как сеточные методы, такие как метод конечных разностей [26], обеспечивают приближение только в узлах сетки. Во многих работах отмечено, что МВИ позволяет избежать проблем, возникающих при вычислении многочленов методом декомпозиции Адомиана [23–25].

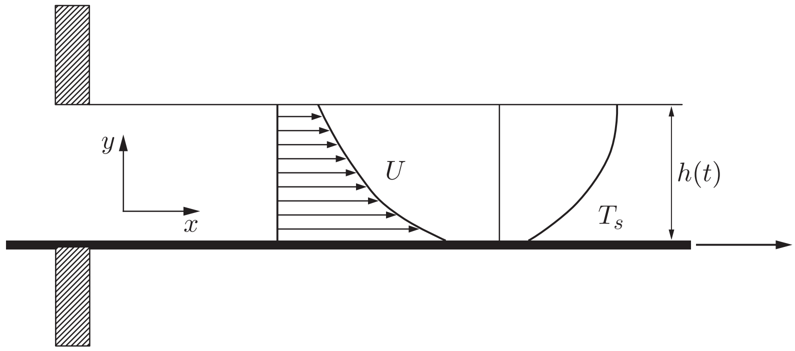

Рис. 1. Схема задачи

1. Формулировка задачи. Рассмотрим нестационарное течение ньютоновской жидкости в тонкой пленке на растягивающейся поверхности. Упругая пластина выходит из узкого разреза в начале декартовой системы координат (рис. 1). Сплошная поверхность, ориентированная вдоль оси x при $y = 0$, движется в своей плоскости со скоростью $U(x, t)$ при температуре $T_s(x, t)$. Тонкая жидкая пленка постоянной толщины $h(t)$ находится на горизонтальной поверхности. Уравнения пограничного слоя, определяющие скорость течения и теплоперенос, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\rho k}\,u, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\varkappa}{\rho c_p}\,\frac{\partial q_r}{\partial y}, \end{gathered} \tag{2}$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; ρ — плотность жидкости; T — температура жидкости; t — время; μ — вязкость жидкости; $k = k_0(1 - at)$ — проницаемость пористой среды; k_0 — параметр проницаемости; $\varkappa$ — теплопроводность; q_r — радиационный тепловой поток; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} y = 0&: \qquad u = U, \quad v = 0, \quad T = T_s, \\ y = h&: \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь h — толщина жидкой пленки; U — скорость поверхности растягивающейся пластины. Течение вызвано растяжением упругой поверхности при $y = 0$, т. е. сплошная пластина движется в направлении x со скоростью

$$U = \frac{bx}{1 - at}. \tag{3}$$

Здесь a, b — положительные константы, с$^{-1}$ ($at \ll 1$, поскольку обратная величина $at \geqslant 1$ не имеет физического смысла); T_s — температура поверхности растягивающейся пластины, изменяющаяся в зависимости от расстояния x вдоль пластины и времени t по закону

$$T_s = T_0 - T_{ref}[bx^2/(2\mu/\rho)](1 - at)^{-3/2}, \tag{4}$$

T_0 — температура в разрезе; T_{ref} — постоянная исходная температура при $at \ll 1$.

Выражение для радиационного теплового потока q_r используется в приближении Росселанда [27]:

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*}\frac{\partial T^4}{\partial y}$$

(σ^* — постоянная Стефана — Больцмана; k^* — среднее значение коэффициента поглощения). Следуя [28], предположим, что перепад температур в потоке небольшой и поэтому может быть выражен в виде линейной функции температуры. Разлагая T^4 в ряд Тейлора при T_0 и пренебрегая членами высшего порядка, имеем

$$T^4 \simeq 4T_0^3 T - 3T_0^4.$$

Выражения для скорости (3) и температуры поверхности (4) позволяют преобразовать систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) в систему связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием следующих преобразований подобия [16]:

$$\begin{gathered} \eta = (b\rho/\mu)^{1/2}(1-at)^{-1/2}\beta^{-1}y, \qquad u = bx(1-at)^{-1}f'(\eta), \\ v = -(\mu b/\rho)^{1/2}(1-at)^{-1/2}\beta f(\eta), \qquad T = T_0 - T_{ref}[bx^2/(2\mu/\rho)](1-at)^{-3/2}\theta(\eta). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь неизвестная постоянная β — безразмерная толщина пленки, определенная в [16]:

$$\beta = (b\rho/\mu)^{1/2}(1-at)^{-1/2}h(t). \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) справедливы только при $at \ll 1$. С помощью уравнений (5) математическая задача, определяемая уравнениями (1), (2), преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f''' + \gamma[ff'' - S\eta f''/2 - f'^2 - (S+\mathrm{D})f'] = 0, \\ \mathrm{Pr}^{-1}(1+R)\theta'' + \gamma(f\theta' - 2f'\theta - S\eta\theta'/2 - 3S\theta/2) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad \theta(0) = 1; \tag{8}$$

$$f''(1) = 0, \qquad \theta'(1) = 0; \tag{9}$$

$$f(1) = S/2, \tag{10}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по η; $S = a/b$ — параметр нестационарности; $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\varkappa$ — число Прандтля; $\gamma = \beta^2$ — безразмерная толщина пленки; $R = 16\sigma^* T_0^3/(3k^*\varkappa)$ — параметр излучения; $\mathrm{D} = \mu/(\rho b k_0)$ — число Дарси.

Величинами, имеющими физический смысл, являются коэффициент поверхностного трения C_f и локальное число Нуссельта Nu_x:

$$C_f = (2/\beta)f''(0)\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}, \qquad \mathrm{Nu}_x = [2\beta(1-at)]^{-1/2}\theta'(0)\,\mathrm{Re}_x^{3/2}$$

($\mathrm{Re}_x = \rho U x/\mu$ — локальное число Рейнольдса).

2. Анализ метода вариационных итераций. Чтобы выполнить анализ вариационного метода итераций, рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида [25]

$$L_1 u + R_1 u + N_1(u) + F_1(u,v) = 0, \qquad L_2 v + R_2 v + N_2(v) + F_2(u,v) = 0 \tag{11}$$

с заданными начальными условиями, где L_i, R_i — линейные ограниченные операторы (можно найти числа $m_i > 0$, $n_i > 0$ $(i = 1, 2)$, такие что $\|L_i u\| \leqslant m_i \|u\|$, $\|R_i u\| \leqslant n_i \|u\|$). Нелинейные члены $N_1(u)$, $N_2(v)$ непрерывны по Липшицу:

$$|N_1(u) - N_1(\theta)| \leqslant r_1\,|u - \theta|, \qquad |N_2(v) - N_2(\theta)| \leqslant r_2\,|v - \theta| \qquad \forall t \in J = [0, T].$$

Связанные нелинейные члены $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ также непрерывны по Липшицу:

$$|F_1(u, v) - F_1(\theta, v)| \leqslant s_1 |u - \theta|, \qquad F_2(u, v) - F_2(u, \theta)| \leqslant s_2 |v - \theta|$$

для некоторых постоянных $r_i > 0$, $s_i > 0$ $(i = 1, 2)$.

С использованием метода вариационных итераций решение системы (11) можно записать в виде следующих итерационных формул $(n \geqslant 0)$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= u_n(t) + \int\limits_0^t \lambda_1(\tau)[L_1 u_n + R_1 \tilde{u}_n + N_1(\tilde{u}_n) + F_1(\tilde{u}_{n-1} \tilde{v}_n)]\, d\tau, \\ v_{n+1}(t) &= v_n(t) + \int\limits_0^t \lambda_2(\tau)[L_2 v_n + R_2 \tilde{v}_n + N_2(\tilde{v}_n) + F_2(\tilde{u}_{n-1} \tilde{v}_n)]\, d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Последовательные приближения u_n, v_n при $n > 0$ (нижний индекс n обозначает приближение n-го порядка) можно получить, найдя общие множители лагранжа λ_1 и λ_2, которые определяются с помощью вариационной теории [29–31]. Функции $\tilde{u}_n$ и $\tilde{v}_n$ являются функциями ограниченной вариации, т. е. $\delta \tilde{u}_n = \delta \tilde{v}_n = 0$. Сначала путем интегрирования по частям определяются лагранжевы множители. Последовательные приближения решений u_n, v_n $(n \geqslant 0)$ нетрудно получить, выбирая любые функции u_0 и v_0. Обычно в качестве нулевого приближения используются начальные значения u_0 и v_0. Следовательно, точные решения могут быть получены по формулам

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n, \qquad v = \lim_{n \to \infty} v_n.$$

Для того чтобы найти значения лагранжевых множителей λ_1, λ_2, рассмотрим случай оператора $L_i = d/dt$ $(i = 1, 2)$.

Налагая условие стационарности на приведенный выше поправочный функционал и учитывая, что $\delta \tilde{u}_n = \delta \tilde{v}_n = 0$, получаем

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int\limits_0^t \lambda_1(\tau)[\dot{u}_n + R_1\, \tilde{u}_n + N_1(\tilde{u}_n) + F_1(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)]\, d\tau =$$

$$= \delta u_n(t) + \int\limits_0^t [\lambda_1(\tau) \delta \dot{u}_n]\, d\tau = \delta u_n(t) + [\lambda_1 \delta u_n]_{\tau = t} - \int\limits_0^t [\delta u_n \dot{\lambda}_1]\, d\tau = 0,$$

$$\delta v_{n+1}(t) = \delta v_n(t) + \delta \int\limits_0^t \lambda_2(\tau)[\dot{v}_n + R_2 \tilde{v}_n + N_2(\tilde{v}_n) + F_2(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)]\, d\tau =$$

$$= \delta v_n(t) + \int\limits_0^t [\lambda_2(\tau) \delta \dot{v}_n]\, d\tau = v_n(t) + [\lambda_2 \delta v_n]_{\tau = t} - \int\limits_0^t [\delta v_n \dot{\lambda}_2]\, d\tau = 0,$$

где $\delta\tilde{u}_n$, $\delta\tilde{v}_n$ — ограниченные вариации. Из уравнения $\delta\tilde{u}_n = \delta\tilde{v}_n = 0$ следуют условия стационарности

$$\dot{\lambda}_1(\tau) = 0, \quad 1 + \lambda_1(\tau)\big|_{\tau=t} = 0, \qquad \dot{\lambda}_2(\tau) = 0, \quad 1 + \lambda_2(\tau)\big|_{\tau=t} = 0. \tag{13}$$

Уравнения (13) называются уравнениями Эйлера — Лагранжа с естественными граничными условиями, поэтому множители Лагранжа равны

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = -1. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), получаем следующие формулы для вариационных итераций ($n \geqslant 0$):

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= u_n(t) - \int\limits_0^t [L_1 u_n + R_1 u_n + N_1(u_n) + F_1(u_n, v_n)]\, d\tau, \\ v_{n+1}(t) &= v_n(t) - \int\limits_0^t [L_2 v_n + R_2 v_n + N_2(v_n) + F_2(u_n, v_n)]\, d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

С использованием начального приближения и итерационных формул (15) можно непосредственно получить компоненты решения.

3. Анализ сходимости метода вариационных итераций. В данном пункте представлены достаточные условия сходимости МВИ, доказана сходимость рекуррентной последовательности, которая получается методом вариационных итераций при решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для того чтобы доказать сходимость МВИ, запишем уравнения (15) в операторной форме

$$u_n = A_1[u_{n-1}], \qquad v_n = A_2[v_{n-1}], \tag{16}$$

где

$$A_1[u] = -\int\limits_0^t [L_1 u + R_1 u + N_1(u) + F_1(u, v)]\, d\tau,$$

$$A_2[v] = -\int\limits_0^t [L_2 v + R_2 v + N_2(v) + F_2(u, v)]\, d\tau.$$

Теорема 1 (теорема сходимости). *Предположим, что X — банахово пространство и A_i: $X \to X$ $(i = 1, 2)$ являются нелинейными отображениями. Предположим, что при некоторых постоянных $0 < \alpha_i < 1$ $(\alpha_i = (m_i + n_i + r_i + s_i)T)$*

$$\|A_i[u] - A_i[v]\| \leqslant \alpha_i \|u - v\| \quad \forall u \in X,\ v \in X.$$

Тогда операторы A_i $(i = 1, 2)$ имеют единственную неподвижную точку. Кроме того, с помощью МВИ с произвольным выбором $u_0 \in X$, $v_0 \in X$ последовательности в (16) *сходятся к неподвижной точке A_i:*

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &\leqslant \frac{\alpha_1^m}{1 - \alpha_1}\, \|u_1 - u_0\|; \\ \|v_n - v_m\| &\leqslant \frac{\alpha_2^m}{1 - \alpha_2}\, \|v_1 - v_0\|. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим через $(C[J], \|\cdot\|)$ банахово пространство всех непрерывных функций на J с нормой

$$\|f(t)\| = \max_{t\in J} |f(t)|.$$

Докажем, что в этом банаховом пространстве последовательности $\{u_n\}$ являются последовательностями Коши:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\| &= \max_{t\in J} |u_n - u_m| = \\
&= \max_{t\in J} \Big| -\int_0^t [L_1(u_{n-1} - u_{m-1}) + R_1(u_{n-1} - u_{m-1}) + N_1(u_{n-1}) - N_1(u_{m-1}) + \\
&\qquad + F_1(u_{n-1}, v) - F_1(u_{m-1}, v)]\, d\tau \Big| \leqslant \\
&\leqslant \max_{t\in J} \int_0^t [|L_1(u_{n-1} - u_{m-1})| + |R_1(u_{n-1} - u_{m-1})| + |N_1(u_{n-1}) - N_1(u_{m-1})| + \\
&\qquad + |F_1(u_{n-1}, v) - F_1(u_{m-1}, v)|\,]\, d\tau \leqslant \\
&\leqslant \max_{t\in J} \int_0^t [(m_1 + n_1 + r_1 + s_1)|u_{n-1} - u_{m-1}|\,]\, d\tau \leqslant \alpha_1 \|u_{n-1} - u_{m-1}\|.
\end{aligned}$$

Пусть $n = m + 1$, тогда

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leqslant \alpha_1 \|u_m - u_{m-1}\| \leqslant \alpha_1^2 \|u_{m-1} - u_{m-2}\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha_1^m \|u_1 - u_0\|.$$

При $n > m$ из неравенства треугольника и формул для суммы геометрической прогрессии следует

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\| &\leqslant \|u_{m+1} - u_m\| + \|u_{m+2} - u_{m+1}\| + \ldots + \|u_n - u_{n-1}\| \leqslant \\
&\leqslant [\alpha_1^m + \alpha_1^{m+1} + \ldots + \alpha_1^{n-1}\,]\, \|u_1 - u_0\| \leqslant \\
&\leqslant \alpha_1^m [\,1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_1^{n-m-1}\,]\, \|u_1 - u_0\| \leqslant \alpha_1^m \, \frac{1 - \alpha_1^{n-m}}{1 - \alpha_1} \, \|u_1 - u_0\|.
\end{aligned}$$

Так как $0 < \alpha_1 < 1$, то $1 - \alpha_1^{n-m} < 1$. Тогда

$$\|u_n - u_m\| \leqslant \frac{\alpha_1^m}{1 - \alpha_1} \, \|u_1 - u_0\|.$$

Однако $\|u_1 - u_0\| < \infty$, так как $m \to \infty$. Тогда $\|u_n - u_m\| \to 0$. Следовательно, $\{u_n\}$ — последовательность Коши в $C[J]$, поэтому последовательность сходится. Аналогично можно доказать сходимость второй последовательности в уравнении (16) и получить соотношение (17). Теорема доказана.

Теорема 2 (теорема оценки погрешности)**.** *Максимальные абсолютные погрешности приближенных решений* u_n, v_n *в задаче* (11) *оцениваются по формулам*

$$\max_{t\in J} |u_{ex} - u_n| \leqslant \beta_1, \qquad \max_{t\in J} |v_{ex} - v_n| \leqslant \beta_2,$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1^m T(m_1\|u_0\| + h_1 + k_1)}{1 - \alpha_1}, \qquad \beta_2 = \frac{\alpha_2^m T(m_2\|v_0\| + h_2 + k_2)}{1 - \alpha_2},$$

$$h_1 = \max_{t\in J} |N_1(u_0)|, \qquad h_2 = \max_{t\in J} |N_2(v_0)|, \qquad k_i = \max_{t\in J} |F_i(u_0, v_0)| \quad (i = 1, 2).$$

Доказательство приведено в [25].

4. Решение методом вариационных итераций. В данном пункте с помощью МВИ решается нелинейная система (7) с граничными условиями (8)–(10).

С использованием МВИ запишем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\eta) &= f_n(\eta) + \int_0^\eta \lambda_1(\tau)\Big[f_n''' + \gamma\Big(\tilde f_n \tilde f_n'' - \frac{S}{2}\,\tau\,\tilde f_n'' - \tilde f_n'^{\,2} - (S+\mathrm{D})\tilde f_n'\Big)\Big]\,d\tau, \\ \theta_{n+1}(\eta) &= \theta_n(\eta) + \int_0^\eta \lambda_2(\tau)\Big[\theta_n'' + \frac{\gamma\,\mathrm{Pr}}{1+R}\,\Big(\tilde f_n\tilde\theta_n' - 2\tilde f_n'\tilde\theta_n - \frac{S}{2}\,\tau\tilde\theta_n' - \frac{3}{2}\,S\tilde\theta_n\Big)\Big]\,d\tau, \end{aligned} \tag{18}$$

где λ_1, λ_2 — общие лагранжевы множители.

Налагая условие стационарности на поправочный функционал:

$$\delta f_{n+1}(\eta) = \delta f_n(\eta) + \delta\int_0^\eta \lambda_1(\tau)\Big[f_n''' + \gamma\Big(\tilde f_n \tilde f_n'' - \frac{S}{2}\,\tau\tilde f_n'' - \tilde f_n'^2 - (S+\mathrm{D})\tilde f_n'\Big)\Big]\,d\tau =$$

$$= \delta f_n(\eta) + \int_0^\eta \big[\lambda_1(\tau)\delta f_n'''\big]\,d\tau =$$

$$= \delta f_n(\eta) + \big[\delta f_n''\lambda_1 - \delta f_n'\lambda_1' + \delta f_n\lambda_1''\big]_{\tau=\eta} - \int_0^\eta \big[\delta f_n \lambda_1'''\big]\,d\tau = 0,$$

$$\delta\theta_{n+1}(\eta) = \delta\theta_n(\eta) + \delta\int_0^\eta \lambda_2(\tau)\Big[\theta_n'' + \frac{\gamma\,\mathrm{Pr}}{1+R}\Big(\tilde f_n\tilde\theta_n' - 2\tilde f_n'\tilde\theta_n - \frac{S}{2}\,\tau\tilde\theta_n' - \frac{3}{2}\,S\tilde\theta_n\Big)\Big]\,d\tau =$$

$$= \delta\theta_n(\eta) + \int_0^\eta \big[\lambda_2(\tau)\delta\theta_n''\big]\,d\tau =$$

$$= \delta\theta_n(\eta) + \big[\delta\theta_n'\lambda_2 - \delta\theta_n\lambda_2'\big]_{\tau=\eta} + \int_0^\eta \big[\delta\theta_n\lambda_2''\big]\,d\tau = 0,$$

где $\delta\tilde f_n$, $\delta\tilde\theta_n$ — ограниченные вариации, т. е. $\delta\tilde f_n = \delta\tilde\theta_n = 0$, получаем следующие условия стационарности:

$$\begin{gathered} \lambda_1'''(\tau) = 0, \qquad 1 + \lambda_1''(\tau)\big|_{\tau=\eta} = 0, \qquad \lambda_1'(\tau)\big|_{\tau=\eta} = 0, \qquad \lambda_1(\tau)\big|_{\tau=\eta} = 0, \\ \lambda_2''(\tau) = 0, \qquad 1 - \lambda_2'(\tau)\big|_{\tau=\eta} = 0, \qquad \lambda_2(\tau)\big|_{\tau=\eta} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Уравнения (19) называются уравнениями Эйлера — Лагранжа с естественными граничными условиями, поэтому множители Лагранжа записываются в виде

$$\lambda_1(\tau) = -(\tau-\eta)^2/2, \qquad \lambda_2(\tau) = \tau - \eta. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (18), получаем следующие вариационные итерационные формулы:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\eta) &= f_n(\eta) - \frac{1}{2}\int_0^\eta (\tau-\eta)^2\Big[f_n''' + \gamma\Big(f_n f_n'' - \frac{S}{2}\,\tau f_n'' - f_n'^2 - (S+\mathrm{D})f_n'\Big)\Big]\,d\tau, \\ \theta_{n+1}(\eta) &= \theta_n(\eta) + \int_0^\eta (\tau-\eta)\Big[\theta_n'' + \frac{\gamma\,\mathrm{Pr}}{1+R}\Big(f_n\theta_n' - 2f_n'\theta_n - \frac{S}{2}\,\tau\theta_n' - \frac{3}{2}\,S\theta_n\Big)\Big]\,d\tau. \end{aligned} \tag{21}$$

Запишем начальные приближения

$$f_0(\eta) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,\eta + \frac{f''(0)}{2!}\,\eta^2 = \eta + 0{,}5A\eta^2, \qquad \theta_0(\eta) = \theta(0) + \frac{\theta'(0)}{1!}\,\eta = 1 + B\eta$$

для некоторых постоянных $A = f''(0)$, $B = \theta'(0)$. С использованием итерационных формул (21) можно непосредственно получить первые компоненты решения (7):

$$f_0(\eta) = \eta + 0{,}5A\eta^2,$$

$$f_1(\eta) = f_0(\eta) - 0{,}5(-0{,}333\,333\gamma\eta^3 - 0{,}333\,333\mathrm{D}\gamma\eta^3 - 0{,}333\,333S\gamma\eta^3 - 0{,}083\,333\,3A\gamma\eta^4 - {}$$
$$- 0{,}083\,333\,3A\mathrm{D}\eta^4\gamma - 0{,}125AS\gamma\eta^4 - 0{,}016\,666\,7\gamma A^2\eta^5),$$

$$\theta_0(\eta) = 1 + B\eta,$$

$$\theta_1(\eta) = \theta_0(\eta) + \frac{\gamma\,\mathrm{Pr}}{1+R}\,\eta^2(1 + 0{,}166\,667B\eta + A\eta(0{,}333\,333 + 0{,}125B\eta) + S(0{,}75 + 0{,}333\,333B\eta))$$

и т. д. Неизвестные величины A и B вычисляются, если выполняются граничные условия (9). При $R = 0$, $\mathrm{Pr} = 1$, $S = 1$, $\mathrm{D} = 0$ $A = -1{,}013\,54$, $B = -1{,}446\,91$.

Результаты численного решения рассматриваемой модельной задачи показывают, что предлагаемый метод позволяет решать задачи с высокой скоростью сходимости. Во всех расчетах использовались три итерации ($n = 3$) итерационных формул (21). Результаты численного решения получены с использованием пакета Mathematica (версия 6).

5. Результаты расчетов и обсуждение. Чтобы оценить точность представленной методики, результаты решения рассматриваемой задачи сравнивались с данными, полученными в [16] при $R = 0$ и $\mathrm{D} = 0$ (т. е. в отсутствие влияния термокапиллярности и магнитного поля), и с данными [17] в случае ньютоновской жидкости (табл. 1). Из табл. 1 следует, что результаты расчетов хорошо согласуются.

Значения безразмерной толщины пленки γ, коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и локального числа Нуссельта $-\theta'(0)$ при различных параметрах, управляющих потоком и теплопередачей, представлены в табл. 2–5.

Из табл. 2, 3 следует, что увеличение числа Дарси D и параметра нестационарности S приводит к уменьшению толщины пленки γ и величины теплового потока $-\theta'(0)$ и к увеличению значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$. Очевидно, что увеличение числа Прандтля Pr приводит к увеличению теплового потока $-\theta'(0)$ при постоянных значениях коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и толщины пленки γ (см. табл. 4). Из табл. 5 следует, что при постоянных значениях коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и толщины пленки γ с увеличением параметра излучения R величина теплового потока $-\theta'(0)$ уменьшается.

На рис. 2 показано влияние параметра Дарси D на профиль скорости. Видно, что с увеличением параметра Дарси вблизи пластины скорость уменьшается, а вдали от нее

Таблица 1

Значения $f''(0)$ и γ, полученные в [16, 17] и в настоящей работе

S	Данные [16]		Данные [17]		Данные настоящей работы	
	γ	$f''(0)$	γ	$f''(0)$	γ	$f''(0)$
1,4	0,674 089	−1,012 781	0,764 097	−1,012 781	0,674 493	−1,012 773
1,6	0,331 976	−0,642 412	0,331 977	−0,642 410	0,331 975	−0,642 430
1,8	0,127 013	−0,309 138	0,127 014	−0,309 138	0,127 017	−0,309 142

Таблица 2

Значения γ, $f''(0)$, $-\theta'(0)$, полученные с использованием МВИ и метода пристрелки при $S = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях D

D	МВИ			Метод пристрелки		
	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0	5,568 80	−2,916 68	2,617 12	5,568 82	−2,916 62	2,617 19
0,2	4,919 78	−2,905 72	2,428 29	4,919 77	−2,905 61	2,428 27
0,4	4,430 18	−2,904 28	2,274 74	4,430 17	−2,904 20	2,274 70
0,6	4,056 61	−2,902 34	2,149 48	4,056 63	−2,902 30	2,149 44

Таблица 3

Значения γ, $f''(0)$, $-\theta'(0)$, полученные с использованием МВИ и метода пристрелки при $\mathrm{D} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях S

S	МВИ			Метод пристрелки		
	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0,8	4,919 78	−2,905 71	2,428 29	4,919 78	−2,905 72	2,428 28
1,0	2,178 51	−1,983 98	1,644 28	2,178 54	−1,983 99	1,644 27
1,2	1,153 88	−1,440 29	1,184 91	1,153 85	−1,440 28	1,184 92
1,4	0,616 09	−1,010 72	0,823 13	0,616 08	−1,010 72	0,823 12
1,6	0,306 29	−0,516 07	0,641 58	0,306 20	−0,516 04	0,641 57

Таблица 4

Значения γ, $f''(0)$, $-\theta'(0)$, полученные с использованием МВИ и метода пристрелки при $S = 0{,}8$, $\mathrm{D} = 0{,}2$, $R = 1$ и различных значениях Pr

Pr	МВИ			Метод пристрелки		
	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
0,7	4,919 789	−2,9057	1,939 89	4,919 788	−2,9057	1,939 81
1,0	4,919 789	−2,9057	2,428 29	4,919 788	−2,9057	2,428 28
2,0	4,919 789	−2,9057	3,608 76	4,919 788	−2,9057	3,608 77
3,0	4,919 789	−2,9057	4,453 89	4,919 788	−2,9057	4,453 88

Таблица 5

Значения γ, $f''(0)$, $-\theta'(0)$, полученные с использованием МВИ и метода пристрелки при $S = 0{,}8$, $\mathrm{D} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$ и различных значениях R

R	МВИ			Метод пристрелки		
	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	γ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	4,919 789	−2,9057	2,428 29	4,919 789	−2,9057	2,428 27
3	4,919 789	−2,9057	1,545 51	4,919 789	−2,9057	1,545 52
5	4,919 789	−2,9057	1,150 24	4,919 789	−2,9057	1,150 23
7	4,919 789	−2,9057	0,919 55	4,919 789	−2,9057	0,919 55

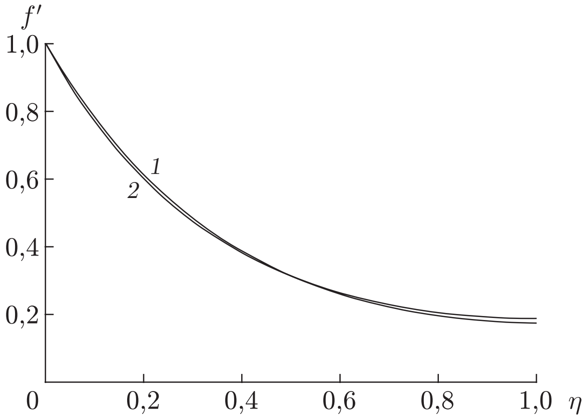

Рис. 2

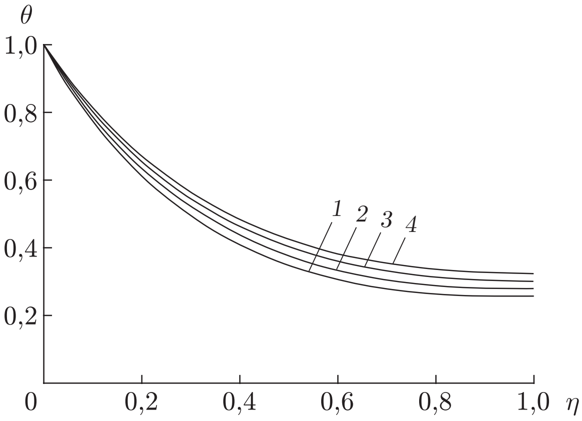

Рис. 3

Рис. 2. Профили скорости при $S = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях D:
1 — $\mathrm{D} = 0$; *2* — $\mathrm{D} = 2$

Рис. 3. Профили температуры при $S = 0{,}8$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях D:
1 — $\mathrm{D} = 0$; *2* — $\mathrm{D} = 0{,}2$; *3* — $\mathrm{D} = 0{,}4$; *4* — $\mathrm{D} = 0{,}6$

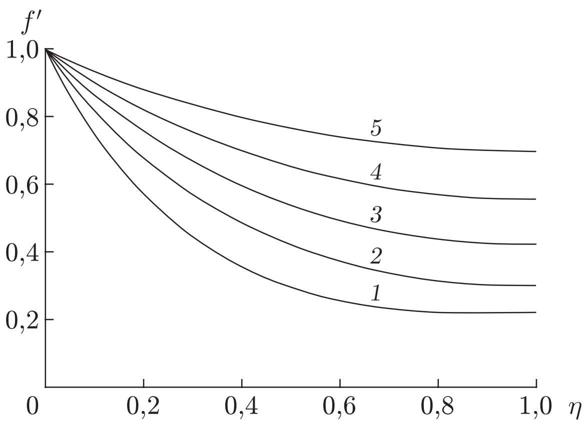

Рис. 4

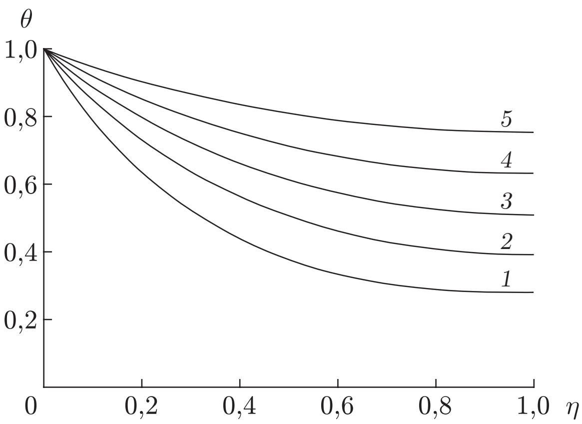

Рис. 5

Рис. 4. Профили скорости при $\mathrm{D} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях S:
1 — $S = 0{,}8$; *2* — $S = 1{,}0$; *3* — $S = 1{,}2$; *4* — $S = 1{,}4$; *5* — $S = 1{,}6$

Рис. 5. Профили температуры при $\mathrm{D} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$, $R = 1$ и различных значениях S:
1 — $S = 0{,}8$; *2* — $S = 1{,}0$; *3* — $S = 1{,}2$; *4* — $S = 1{,}4$; *5* — $S = 1{,}6$

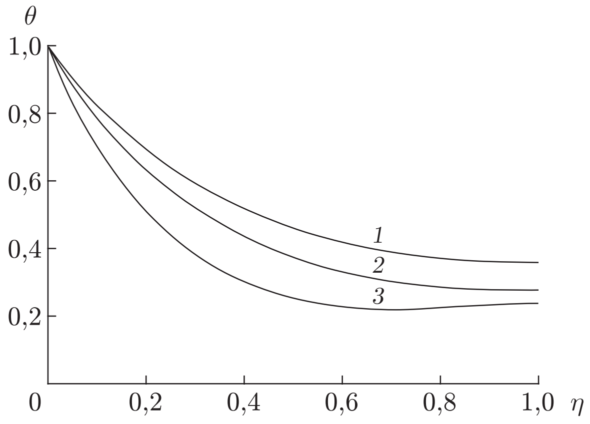

Рис. 6

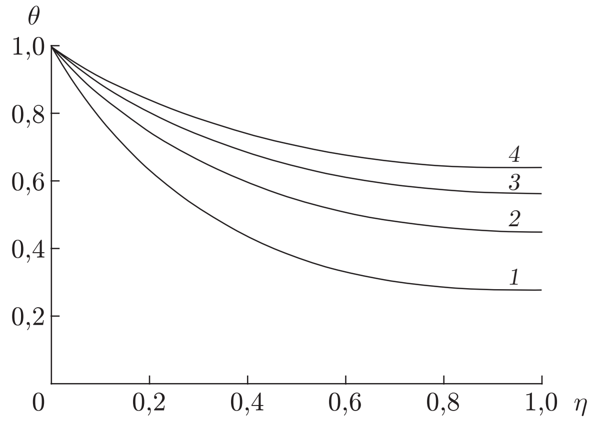

Рис. 7

Рис. 6. Профили температуры при $S = 0{,}8$, $\mathrm{D} = 0{,}2$, $R = 1$ и различных значениях Pr:
1 — $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; *2* — $\mathrm{Pr} = 1{,}0$; *3* — $\mathrm{Pr} = 2{,}0$

Рис. 7. Профили температуры при $S = 0{,}8$, $\mathrm{D} = 0{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$ и различных значениях R:
1 — $R = 1$; *2* — $R = 3$; *3* — $R = 5$; *4* — $R = 7$

увеличивается. На рис. 3 приведены безразмерные профили температуры $\theta(\eta)$ при различных значениях D. Видно, что с увеличением D температура увеличивается. Это обусловлено тем, что в пористой среде возникает сила, подобная силе сопротивления, которая вызывает уменьшение скорости жидкости и увеличение температуры.

На рис. 4, 5 показано влияние параметра нестационарности S на профили скорости и температуры соответственно. Видно, что с увеличением параметра нестационарности S скорость и температура увеличиваются.

На рис. 6 представлена зависимость безразмерной температуры θ от η при различных значениях числа Прандтля Pr. Видно, что с увеличением числа Прандтля температура уменьшается. Это обусловлено тем, что при больших числах Прандтля жидкость обладает большой теплоемкостью и, следовательно, увеличивается теплопередача.

На рис. 7 показано влияние параметра излучения R на безразмерную температуру $\theta(\eta)$. Видно, что увеличение параметра излучения R приводит к увеличению температуры в любой точке. Это происходит вследствие того, что с увеличением параметра излучения величина теплового потока на поверхности увеличивается, поэтому температура жидкости также увеличивается.

Заключение. В работе выполнено теоретическое и численное исследование влияния теплового излучения на течение и теплоперенос в тонкой жидкой пленке на нестационарно растягивающейся пластине, погруженной в пористую среду. С помощью преобразований дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие задачу, сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовался приближенный метод вариационных итераций. Представленные результаты показывают, что приближенное решение хорошо согласуется с решениями, полученными методом Рунге — Кутты совместно с методом пристрелки и другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plane // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canad. J. Chem. Engng. 1977. V. 55. P. 744–746.
3. **Dutta B. K., Gupta A. S.** Cooling of a stretching sheet in a viscous flow // Ind. Engng Chem. Res. 1987. V. 26. P. 333–336.
4. **Cheng P., Minkowycz W. J.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. P. 2040–2044.
5. **Cheng P.** Combined free and forced convection flow about inclined surfaces in porous media // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1977. V. 20. P. 807–814.
6. **Merkin J. H.** On dual solutions occurring in mixed convection in a porous medium // J. Engng Math. 1985. V. 20. P. 171–179.
7. **Hooper W. B., Chen T. S., Armaly B. F.** Mixed convection from a vertical plate in porous media with surface injection or suction // Numer. Heat Transfer. 1993. V. 25. P. 317–329.
8. **Wright S. D., Ingham D. B., Pop I.** On natural convection from a vertical plate with a prescribed surface heat flux in porous media // Transport Porous Media. 1996. V. 22. P. 181–193.
9. **Yih K. A.** The effect of uniform lateral mass flux on free convection about vertical cone embedded in a saturated porous medium // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 1997. V. 24. P. 1195–1205.
10. **Gorla R. S. R., Takhar H. S.** Mixed convection in non-Newtonian fluids along a vertical plate in porous media with surface mass transfer // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 1997. V. 7. P. 596–608.
11. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching surface // Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. P. 601–610.
12. **Andersson H. I., Aarseh J. B., Dandapat B. S.** Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 69–74.
13. **Wang C.** Analytic solutions for a liquid thin film on an unsteady stretching surface // Heat Mass Transfer. 2006. V. 42. P. 759–766.
14. **Liu I. C., Anderson H. I.** Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching sheet // Intern. J. Thermal Sci. 2008. V. 47. P. 766–772.
15. **Subhas Abel M., Mahesha N., Tawade J.** Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching surface with viscous dissipation in presence of external magnetic field // Appl. Math. Modelling. 2009. V. 33. P. 3430–3441.
16. **Noor N. F. M., Hashim I.** Thermocapillarity and magnetic field effects in a thin liquid film on an unsteady stretching surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2044–2051.
17. **Wang C., Pop I.** Analysis of the flow of a power-law fluid film on an unsteady stretching surface by means of homotopy analysis method // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2006. V. 138. P. 161–172.
18. **He J. H.** Variational iteration method — a kind of non-linear analytical technique: Some examples // Intern. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34. P. 699–708.
19. **Abassy T. A., Magdy A. El-Tawil, El Zoheiry H.** Solving nonlinear partial differential equations using the modified variational iteration Padé technique // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 207. P. 73–91.
20. **Biazar J., Ghazvini H.** He's variational iteration method for solving hyperbolic differential equations // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2007. V. 8, N 3. P. 311–314.

21. **Goha S. H., Noorani M. S. M., Hashim I.** Introducing variational iteration method to a biochemical reaction model // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2010. V. 11. P. 2264–2272.
22. **He J. H.** Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems // Appl. Math. Comput. 2000. V. 114, N 2/3. P. 115–123.
23. **Sweilam N. H., Khader M. M.** Variational iteration method for one dimensional nonlinear thermoelasticity // Chaos, Solitons Fractals. 2007. V. 32. P. 145–149.
24. **Sweilam N. H., Khader M. M., Al-Bar R. F.** Numerical studies for a multi-order fractional differential equation // Phys. Lett. A. 2007. V. 371. P. 26–33.
25. **Sweilam N. H., Khader M. M.** On the convergence of VIM for nonlinear coupled system of partial differential equations // Intern. J. Comput. Math. 2010. V. 87, N 5. P. 1120–1130.
26. **Butcher J. C.** Numerical methods for ordinary differential equations. S. l.: John Wiley and Sons, 2003.
27. **Raptis A.** Flow of a micropolar fluid past a continuously moving plate by the presence of radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1998. V. 41. P. 2865–2866.
28. **Raptis A.** Radiation and viscoelastic flow // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 1999. V. 26. P. 889–895.
29. **Agarwal R. P.** Fixed point theory and applications / R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2001.
30. **Kelley W.** The theory of differential equations: classical and qualitative / W. Kelley, A. Petterson. Upper Saddle River: Pearson Educat. Inc., 2004.
31. **Kreyszig E.** Introductory functional analysis with applications. N. Y.: John Wiley and Sons, 1989.

Поступила в редакцию 14/III 2011 г.,
в окончательном варианте — 25/V 2011 г.