ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА ПРИ РАССЕЯНИИ НЕЙТРАЛЬНЫМИ АТОМАМИ С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИИ СТОЛКНОВЕНИЙ

Ю. П. Райзер (Москва)

Путем непосредственного рассмотрения тормозного излучения электрона при столкновениях с нейтральными атомами с учетом корреляции между столкновениями выводится формула для излучательной способности, содержащая частотный множитель. Ранее эта формула выводилась только косвенным путем через коэффициент поглощения, при помощи закона Кирхгофа.

1. В классической электродинамике ускоренно движущийся электрон излучает в спектральном интервале от ω до $\omega + d\omega$ энергию

$$dE_\omega = \frac{8\pi e^2}{3c^3} \mid \mathbf{w}_\omega \mid^2 d\omega \tag{1.1}$$

где $\mathbf{w}_\omega$ — фурье-компонента ускорения $\mathbf{w}(t)$. Если продолжительность взаимодействия электрона с атомом τ_s гораздо меньше периода электромагнитных колебаний, точнее, если $\omega\tau_s \ll 1$, то излучение при одном упругом столкновении не зависит от частоты и определяется [1] только полным изменением вектора скорости электрона [1]

$$dE_\omega = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}(\Delta\, \mathbf{v})^2\, d\omega \tag{1.2}$$

Известно, что формулу (1.2) удобно получить из (1.1), полагая $\mathbf{w}(t) = \Delta\mathbf{v}\delta(t)$.

Когда столкновения происходят относительно редко и среднее время между столкновениями τ таково, что $\omega\tau \gg 1$, отдельные акты тормозного излучения можно считать независимыми. Спектральное излучение электрона в секунду dQ_ω *эрг / сек* при этом вычисляется просто путем усреднения (1.2) по углам рассеяния θ и умножения на число столкновений в секунду $\nu = 1 / \tau$. При упругом рассеянии

$$\langle(\Delta\mathbf{v})^2\rangle = 2v^2(1 - \langle\cos\theta\rangle) \qquad (v \text{ — скорость электрона}) \tag{1.3}$$

Поэтому

$$dQ_\omega = \frac{4}{3\pi}\frac{e^2v^2\nu_{\text{eff}}}{c^3}\, d\omega, \qquad \nu_{\text{eff}} = \nu\,(1 - \langle\cos\theta\rangle) \tag{1.4}$$

(предполагается, что излучаемая энергия мала по сравнению с энергией электрона, так что величина скорости при рассеянии не меняется).

Если найти излучательную способность электрона при помощи закона Кирхгофа и известного выражения для коэффициента поглощения электромагнитных волн в слабоионизованном газе, где основную роль играют столкновения электронов с нейтральными атомами [2], то получается формула [3]

$$dQ_\omega = \frac{4}{3\pi}\frac{e^2v^2\nu_{\text{eff}}}{c^3}\frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2}\, d\omega \tag{1.5}$$

которая отличается от (1.4) наличием частотного множителя $\omega^2 / (\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2)$.

Как заметил Я. Б. Зельдович, при излучении частот ω, сравнимых с частотой столкновений ν_{eff}, существенна корреляция между отдельными столкновениями.

Для лучшего уяснения происхождения и физического смысла частотного множителя в (1.5) интересно вывести формулу (1.5) не косвенным путем через коэффициент поглощения, а непосредственно, путем прямого вычисления тормозного излучения электрона, испытывающего большое число соударений $N \to \infty$. Это и будет сделано ниже.

2. Представим, в соответствии с условием $\omega\tau_s \ll 1$, ускорение электрона в виде

$$\mathbf{w}\,(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta\, \mathbf{v}_k \delta\,(t_k) \tag{2.1}$$

где t_k — момент k-го столкновения, $\Delta\mathbf{v}_k$ — соответствующее изменение скорости.

---

[1] Продолжительность столкновения $\tau_s \sim v / a$, где v — скорость электрона, a — размеры атома. Условие $\omega\tau_s \ll 1$ выполняется для всех частот $\omega < mv^2 / 2\hbar$, излучаемых электронами, энергия которых не превышает нескольких *эв*, т. е. для тепловых электронов в слабоионизованном газе — практически всегда.

Излучение электрона определяется усредненным по всем столкновениям квадратом модуля фурье-компоненты ускорения

$$\langle |\mathbf{w}_\omega|^2\rangle = \left\langle \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (\Delta \mathbf{v}_j \Delta \mathbf{v}_k)\, e^{i\omega(t_j - t_k)} \right\rangle \qquad (2.2)$$

Выделим из двойной суммы члены с одинаковыми индексами $j = k$ и скомбинируем члены с одинаковыми парами индексов.

$$\langle |\mathbf{w}_\omega|^2\rangle = \left\langle \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{N} \left\{ (\Delta \mathbf{v}_j)^2 + 2 \sum_{k=j+1}^{N} (\Delta \mathbf{v}_k \Delta \mathbf{v}_j) \cos \omega (t_k - t_j) \right\} \right\rangle$$

В среднем, ни одно из столкновений ничем не выделяется среди других, поэтому при усреднении сумма по j превратится в N одинаковых слагаемых, а в сумме по k j-е столкновение можно принять за начальное, «нулевое», и вести отсчет времени от него ($j \to 0$, $\Delta \mathbf{v}_j \to \Delta \mathbf{v}_0$, $t_j \to t_0 \to 0$). В результате получим

$$\langle |\mathbf{w}_\omega|^2\rangle = \frac{1}{4\pi^2} N \left\{ \langle (\Delta \mathbf{v}_0)^2 \rangle + 2 \sum_{k=1}^{N} \langle (\Delta \mathbf{v}_k \Delta \mathbf{v}_0) \rangle \langle \cos \omega t_k \rangle \right\} \qquad (2.3)$$

Здесь первые сомножители в слагаемых суммы усредняются по направлениям скоростей, а вторые — по временам столкновений. Отсутствию корреляции соответствует обращение суммы в нуль.

Средние значения скорости электрона после i-го столкновения $\mathbf{v}_{i+1}$ и изменения скорости $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ при фиксированном направлении скорости до столкновения $\mathbf{v}_i$ равны

$$\langle \mathbf{v}_{i+1} \rangle = \mu \mathbf{v}_i, \qquad \langle \Delta \mathbf{v}_i \rangle = -(1-\mu)\mathbf{v}_i \qquad (\mu = \langle \cos \theta \rangle)$$

Будем последовательно «свертывать» выражение $(\Delta \mathbf{v}_k \cdot \Delta \mathbf{v}_0)$, усредняя по направлениям $\mathbf{v}_{k+1}$ при фиксированных $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_{k-1}$, ..., $\mathbf{v}_0$, затем по $\mathbf{v}_k$ при фиксированных $\mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{v}_{k-2}$, ..., $\mathbf{v}_0$, и т. д. В результате получим

$$\langle (\Delta \mathbf{v}_k \Delta \mathbf{v}_0) \rangle = -(1-\mu)^2 \mu^{k-1} v^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (2.4)$$

(при $k \to \infty$ это выражение стремится к нулю: корреляция между отдаленными по времени столкновениями, естественно, исчезает).

Произведем теперь усреднение по времени

$$\langle \cos \omega t_k \rangle = \int_0^\infty P_k(t) \cos \omega t dt \qquad (2.5)$$

где $P_k(t)dt$ — вероятность того, что k-е столкновение произойдет в интервале времени от t до $t + dt$. Очевидно

$$P_k(t)\,dt = \int_0^t P_{k-1}(t')\,dt' P_1(t-t')\,dt$$

где вероятность первого столкновения после данного $P_1(t)dt = \nu e^{-\nu t} dt$. Это дает формулу [1]

$$P_k(t)\,dt = \frac{(\nu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu t} \nu dt \qquad (2.6)$$

Не будем вычислять интеграл (2.5), а подставим (2.4)—(2.6) в (2.3). Сумма по k при $N \to \infty$ представляет собою просто разложение в ряд экспоненты $\exp(\mu \nu t)$. Получающийся в результате суммирования интеграл равен

$$\int_0^\infty e^{-(1-\mu)\nu t} \cos \omega t \nu dt = \frac{(1-\mu)\,\nu^2}{\omega^2 + (1-\mu)^2 \nu^2}$$

[1] Вероятность того, что в интервале от t до $t + dt$ произойдет какое-нибудь столкновение, равна

$$\sum_k P_k(t)\,dt = \nu\,dt = \frac{dt}{\tau}$$

как и должно быть.

Имея в виду, что $(1-\mu)\nu = \nu_{eff}$, найдем

$$\langle |\mathbf{w}_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} N \left\{ 2v^2 (1-\mu) - 2v^2 (1-\mu) \frac{\nu_{eff}^2}{\omega^2 + \nu_{eff}^2} \right\}$$

Подставляя это выражение в (1.1) и поделив dE_ω на время процесса N/ν, получим для излучения в одну секунду формулу (1.5).

Таким образом, интерференция парциальных волн, излученных при различных столкновениях, в среднем приводит к уменьшению интенсивности суммарной волны. Это, как мы видели, связано с тем, что амплитуды двух любых парциальных волн, которые определяются соответствующими значениями $\Delta\nu$, в среднем всегда направлены в противоположные стороны.

На высоких частотах, при $\omega^2 \gg \nu_{eff}^2$ интерференция, в среднем, естественно, стремится к нулю и формула (1.5) превращается в (1.4).

Автор искренне признателен Я. Б. Зельдовичу, обратившему его внимание на эффект корреляции.

Поступила 22 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960,
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
3. Bekefi G., Hirshfield I. L., Brown S. C. Закон Кирхгофа для плазмы с немаксвелловским распределением. Phys. Fluids, 1961, v. 4, No. 2, p. 173.

ИЗМЕРЕНИЕ РАСХОДА ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

А. Е. Якубенко (Москва)

Найдена связь между расходом жидкости в круглой трубе и разностью потенциалов на электродах, представляющих собой дуги окружности, при течении проводящей жидкости с заданным профилем скорости в поперечном магнитном поле.

Рассмотрим течение проводящей жидкости в круглой трубе радиуса R_0 с заданным профилем скорости, зависящим только от r

$$\mathbf{v} = V(r)\mathbf{e}_z, \qquad V(R_0) = 0$$

Здесь z — координата вдоль оси трубы, а r и θ — полярные координаты в некоторой плоскости, перпендикулярной оси трубы.

В дальнейшем будет предполагаться, что все величины от координаты z не зависят.

Пусть индуцированный под действием однородного магнитного поля

$$\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_y$$

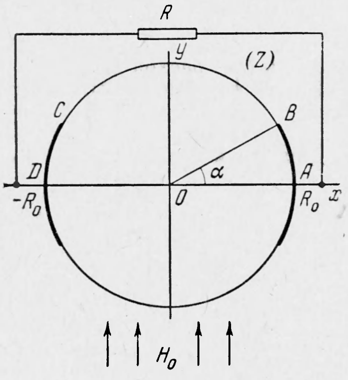
электрический ток снимается с дуг контура (электродов) во внешнюю цепь, как показано на фиг. 1.

Задача состоит в определении связи между разностью потенциалов на внешней нагрузке R с расходом жидкости в круглой трубе.

Для решения задачи запишем закон Ома в полярных координатах

$$j_r = \sigma \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{V(r)H_0}{c}\cos\theta \right)$$

$$j_\theta = \sigma \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{V(r)H_0}{c}\sin\theta \right) \qquad (1)$$



Фиг. 1

Здесь φ — потенциал электрического поля.

Для определения φ из уравнения неразрывности для плотности электрического тока получим

$$\Delta\varphi = -\frac{H_0V'(r)}{c}\cos\theta \qquad (2)$$