УДК 539,374

А. М. Коврижных

К ВОПРОСУ ОХРУПЧИВАНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

В настоящее время хорошо известен экспериментальный факт различия угла наклона линий скольжения в металлах при растяжении и сжатии [1]. Качественное объяснение этого факта и количественное определение возникающих при этом пластических деформаций возможны с позиции теории [2], учитывающей разную сопротивляемость материалов пластическому деформированию при растяжении и сжатии. В [2] для металлов в области растягивающих напряжений применяется условие пластичности Кулона—Мора, которое позволяет при наличии дополнительной характеристики материала угла внутреннего трения установить точное соответствие между пределами текучести при одноосном растяжении и кручении. В [2] также показано, что рост пластической деформации приводит к увеличению угла внутреннего трения — охрупчиванию металла. Традиционные методы решения статически определимых задач [3, 4] основаны на условии пластичности Треска — Сен-Венана.

В данной работе для решения некоторого класса таких задач предлагается использовать для металлов условие пластичности Кулона—Мора, которое ранее применялось в статике сыпучих сред [5]. С этой позиции рассматриваются задачи плоской деформации жесткопластической среды: растяжение и сжатие полосы, ослабленной вырезами, и волочение полосы сквозь короткую матрицу.

1. Обозначим главные нормальные напряжения σ_i, $i = 1, 2, 3$, причем пронумеруем главные оси тензора напряжений 1, 2, 3 так, что $\sigma_1 \geqslant \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Тогда условие пластичности Кулона — Мора можно записать в виде

$$T/\cos\varphi + \sigma \operatorname{tg}\varphi = k, \tag{1.1}$$

где $T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$; $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$; φ — угол внутреннего трения; k — пластическая постоянная. Плоскости, на которых достигается условие (1.1), называют плоскостями скольжения, они проходят через второе главное направление и составляют с первым углы $\pm(\pi/4 + \varphi/2)$ [5]. Угол внутреннего трения отражает влияние нормального напряжения на предельное значение касательного напряжения на этих плоскостях. Пластическая постоянная $k = 0{,}5(1 + \sin\varphi)\sigma_s/\cos\varphi$ (σ_s — предел текучести при одноосном растяжении).

Если τ_s — предел текучести при кручении, то из (1.1) $\sin\varphi = 0{,}5\times \times\sigma_s/\tau_s - 1$. Для условия пластичности Треска — Сен-Венана $\varphi = 0$. Из условия пластичности Мизеса $\sigma_s/\tau_s = \sqrt{3}$, поэтому для тех металлов, начало пластичности которых лучше описывается условием Мизеса, чем Треска, следует принять $\sin\varphi = 0{,}15$ ($\varphi = 9°$).

Известно, что ассоциированный закон течения [6, 7] приводит к необратимому изменению объема материала — дилатансии. Однако этот факт, характерный для большинства горных пород и сыпучих сред, не столь существен при однократном нагружении пластичных металлов, изменение объема которых происходит упруго. В связи с чем в [2] предлагается теория пластичности, которая независимо учитывает эффекты внутреннего трения и дилатансии, основываясь на дополнительных экспериментальных данных. Это обстоятельство позволяет для пластически несжимаемых металлов использовать условие пластичности Кулона — Мора (1.1).

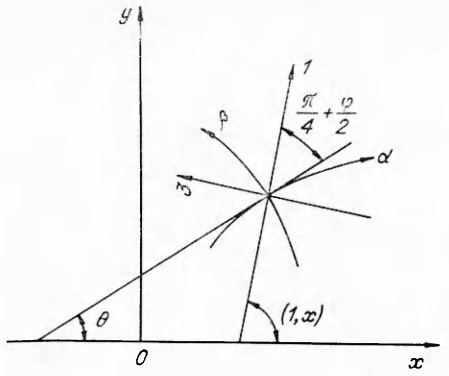

Рис. 1

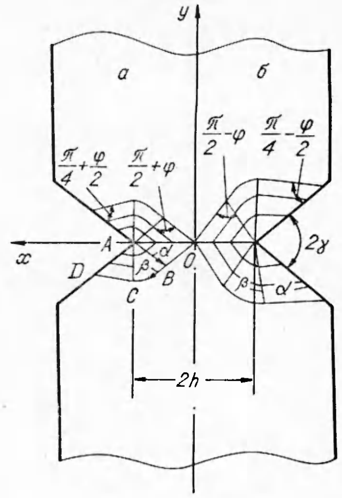

Рис. 2

Изучим плоскую деформацию идеальной пластической среды в рамках жесткопластической схемы [3, 4]. Ограничимся определением поля напряжений в задачах о растяжении и сжатии полосы с вырезами и волочении полосы сквозь короткую матрицу.

Рассмотрим произвольную ортогональную систему координат x, y, z (рис. 1). Ось z является главной и совпадает с направлением *2*. В системе координат x, y имеем

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2(1,\, x), \tag{1.2}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2(1,\, x), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2(1,\, x)$$

($(1,\, x)$ — угол, который образует первое главное направление с осью x).

Линией скольжения в плоскости x, y называют линию, в каждой своей точке касающуюся плоскости скольжения [5]. Очевидно, что имеется два семейства таких линий: α и β (α отклоняется вправо от первого главного направления на угол $\pi/4 + \varphi/2$, β — влево на тот же угол).

Обозначим θ угол, который образует α-линия с осью x, тогда, как видно из рис. 1, $(1,\, x) = \pi/4 + \varphi/2 + \theta$. С учетом этой замены из (1.2) следует

$$\sigma_x = \sigma - T\sin(2\theta + \varphi), \tag{1.3}$$

$$\sigma_y = \sigma + T\sin(2\theta + \varphi),\quad \tau_{xy} = T\cos(2\theta + \varphi).$$

Основными уравнениями при определении поля напряжений в пластической зоне являются прежде всего уравнения плоского равновесия

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0, \tag{1.4}$$

$$\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y = 0,$$

которые вместе с (1.1) и граничными условиями в напряжениях составляют статически определимую задачу [5].

Подставляя (1.3) в (1.4), получим

$$(1 + \sin\varphi\sin(2\theta + \varphi))\partial\sigma/\partial x - 2T\cos(2\theta + \varphi)\partial\theta/\partial x - \sin\varphi\cos(2\theta + \varphi)\partial\sigma/\partial y - 2T\sin(2\theta + \varphi)\partial\theta/\partial y = 0, \tag{1.5}$$

$$-\sin\varphi\cos(2\theta+\varphi)\partial\sigma/\partial x - 2T\sin(2\theta+\varphi)\partial\theta/\partial x +$$
$$+(1-\sin\varphi\sin(2\theta+\varphi))\partial\sigma/\partial y + 2T\cos(2\theta+\varphi)\partial\theta/\partial y = 0$$
$$(T = (\sigma_1-\sigma_3)/2 = k\cos\varphi - \sigma\sin\varphi).$$

Система уравнений (1.5) гиперболическая, ее характеристики совпадают с линиями скольжения α, β. Дифференциальные уравнения семейств α, β соответственно равны

(1.6) $$dy/dx = \mathrm{tg}\theta,\quad dy/dx = -\mathrm{ctg}(\theta+\varphi).$$

Уравнения равновесия могут быть заменены соотношениями на характеристиках, полученными впервые Кёттером в 1903 г.:

(1.7) $$\mathrm{ctg}\varphi\ln(1-(\sigma/k)\mathrm{tg}\varphi) + 2\theta = \xi \text{ вдоль } \alpha\text{-линии},$$
$$\mathrm{ctg}\varphi\ln(1-(\sigma/k)\mathrm{tg}\varphi) - 2\theta = \eta \text{ вдоль } \beta\text{-линии}.$$

2. Рассмотрим задачу растяжения (сжатия) полосы с угловыми вырезами в условиях плоской деформации. В традиционной постановке для металлов ($\varphi = 0$) решение приводится, например, в [3, 4], и в этом случае как для растяжения, так и для сжатия поле линий скольжения одно и то же. Предельная нагрузка P вычисляется по формуле

$$P/(2h\sigma_s) = q/\sigma_s = 1 + \pi/2 - \gamma.$$

Если $\varphi > 0$, то пластическая зона и геометрия линий скольжения для растяжения полосы и для ее сжатия будут разными. На рис. 2, *а*, *б* приводятся сетки линий скольжения соответственно для растяжения и для сжатия полосы с угловыми вырезами.

Пусть в направлении y (рис. 2, *а*) осуществляется растяжение полосы с угловыми вырезами. Поскольку боковые вырезы свободны от напряжений, то из граничного условия на AD находим $\theta = -\gamma - \pi/4 - \varphi/2$, $\sigma = k\cos\varphi/(1+\sin\varphi)$. На AO имеем $\theta = -3\pi/4 - \varphi/2$, $\sigma_y = q^+ = k\cos\varphi + \sigma^+(1-\sin\varphi)$. Используя теперь вдоль β-линии $OBCD$ соотношение (1.7), получим

$$\mathrm{ctg}\,\varphi\ln\left(1-\frac{\sigma^+}{k}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right) + 2\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= \mathrm{ctg}\,\varphi\ln\left(1-\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right) + 2\left(\gamma + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда следует, что

(2.1) $$\frac{q^+}{\sigma_s} = \frac{1+\sin\varphi}{2\sin\varphi}\left(1 - \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\,e^{-(\pi-2\gamma)\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right).$$

Предельная нагрузка P^+ для растяжения полосы с вырезами определяется по формуле $P^+ = 2q^+h$.

В случае сжатия полосы (см. рис. 2, *б*), не останавливаясь на легко выполняемых вычислениях, приходим к следующему значению предельной нагрузки $P^- = 2q^-h$:

(2.2) $$\frac{q^-}{\sigma_c} = \frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,e^{(\pi-2\gamma)\,\mathrm{tg}\,\varphi} - 1\right)$$

(σ_c — предел текучести при одноосном сжатии).

В таблице для материалов с различными углами внутреннего трения приводятся результаты расчета предельных нагрузок по формулам (2.1) и (2.2) для растяжения и сжатия полосы с углами $\gamma = 0, 30°$. Из анализа приведенных результатов следует, что угол внутреннего трения существенно влияет на величину предельной нагрузки как при растяжении полосы, так и при сжатии.

3. Большой интерес для процессов обработки металлов давлением представляет класс задач, в которых напряжения и скорости в каждой точке плоскости течения x, y не изменяются со временем, а пластическое

φ	q^+/σ_s	q^-/σ_c	q^+/σ_s	q^-/σ_c
	$\gamma=0$		$\gamma=30°$	
0	2,57	2,57	2,05	2,05
5°	2,26	2,97	1,88	2,25
10°	2,01	3,50	1,73	2,51
15°	1,82	4,21	1,62	2,83
20°	1,66	5,19	1,51	3,24

течение является установившимся. Рассмотрим одну из таких задач. Приступим к изучению поля напряжений в жесткопластической полосе при волочении ее между неподвижными гладкими стенками матрицы, образующими углы γ с осью x (рис. 3). Обозначим начальную толщину полосы H, конечную — h. Предположим, что матрица имеет небольшую длину, а пластическая зона состоит из областей, изображенных на рис. 3. Аналогичная задача для идеально пластического материала в традиционной постановке ($\varphi = 0$) решена в [3]. Сформулируем граничные условия рассматриваемой задачи для верхней половины полосы, считая, что вдоль всей контактной прямой AO действует равномерно распределенное давление. Для упрощения решения задачи трением на плоскостях контакта полосы и матрицы пренебрежем. Таким образом, на AO у вектора напряжения есть лишь нормальная составляющая, равная $-q$. Поэтому в треугольнике AOC имеем $\theta = -\gamma - \varphi/2 - \pi/4$, $\sigma = \sigma^C = -q/(1 + \sin\varphi) + k\cos\varphi/(1 + \sin\varphi)$.

На основе соотношения (1.7) вдоль линий скольжения CD и BD получим

$$\ln\left[\left(1 - \frac{\sigma^C}{k}\operatorname{tg}\varphi\right)\Big/\left(1 - \frac{\sigma^B}{k}\operatorname{tg}\varphi\right)\right] = 2\operatorname{tg}\varphi\,(2\alpha + \gamma).$$

С другой стороны, используя (1.7) на линиях CF и BF, запишем

$$\ln\left[\left(1 - \frac{\sigma^C}{k}\operatorname{tg}\varphi\right)\Big/\left(1 - \frac{\sigma^B}{k}\operatorname{tg}\varphi\right)\right] = 2\operatorname{tg}\varphi\,(2\psi - \gamma).$$

Из двух найденных соотношений следует, что $\psi = \alpha + \gamma$. Аналогичное соотношение между углами ψ, α и γ имеет место в известном решении Хилла Р. и др. [3] для металлов без внутреннего трения.

Из рис. 3 легко видеть, что максимальная степень деформации $\varepsilon = (H - h)/H$ достигается, когда $\alpha = 0$. Тогда точка C сливается с D, точка B с F. Рассмотрим подробнее этот частный случай, для которого задача решается аналитически (рис. 4). На OB

$$\theta = -\pi/4 - \varphi/2,\ \sigma = \sigma^B,\quad \sigma_x = \sigma^B(1 - \sin\varphi) + k\cos\varphi,\quad \sigma_y = \sigma^B(1 + \sin\varphi) - k\cos\varphi,\ \tau_{xy} = 0. \tag{3.1}$$

Используя соотношение (1.7) вдоль α-линии ADB, получим

$$\sigma^B = k\operatorname{ctg}\varphi(1 - (1 - (\sigma^C/k)\operatorname{tg}\varphi)\,e^{-2\gamma\operatorname{tg}\varphi}). \tag{3.2}$$

Определяя из граничного условия на AO σ^C через q и подставляя в (3.2), в результате с учетом (3.1) можно найти горизонтальную составляющую усилия на AO, равную $p = q(H - h)$. Отсюда

$$\frac{q}{\sigma_s} = \frac{(1 + \sin\varphi)\left((1 + \sin\varphi + \operatorname{ctg}\varphi)(1 + \sin\varphi)\,e^{2\gamma\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right)}{2\cos\varphi\,(2\sin\gamma\,(1 + \sin\varphi)\,e^{\gamma\operatorname{tg}\varphi} + \cos\varphi)}. \tag{3.3}$$

В рассматриваемом частном случае из геометрии линий скольжения ясно, что

$$(H - h)/h = 2\sin\gamma\operatorname{ctg}(\pi/4 + \varphi/2)/e^{\gamma\operatorname{tg}\varphi}. \tag{3.4}$$

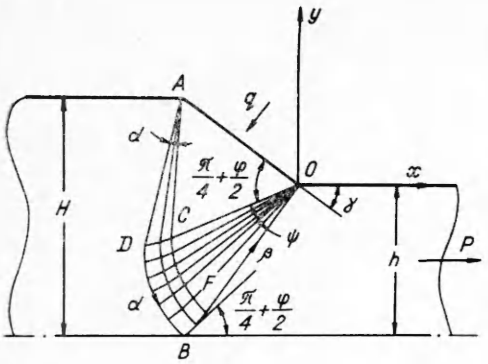

Рис. 3

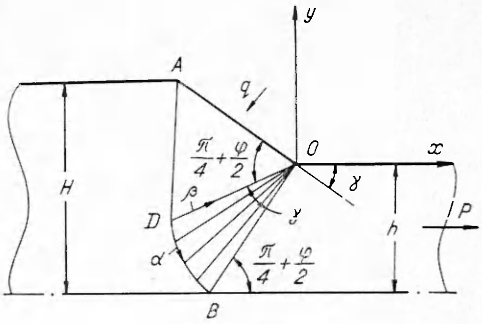

Рис. 4

Для того чтобы процесс волочения полосы проходил устойчиво, без разрыва правой части, необходимо выполнение условия $p < \sigma_s h$. Откуда с использованием (3.3) и (3.4) получим, что вытяжка осуществима, когда

$$\sin\gamma < \frac{\cos\varphi e^{\gamma \operatorname{tg}\varphi}}{((1+\sin\varphi)^2 + (1-\sin\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)\, e^{2\gamma\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi}. \tag{3.5}$$

Если $\varphi = 0$, то из (3.5) следует, что вытяжка полосы осуществима при углах $\gamma < \gamma_* = 42°$ [3, 4]. С изменением угла внутреннего трения будет изменяться предельный угол γ_*, определяемый неравенством (3.5), а также и максимальная степень деформаций ε_*, получаемая на основе (3.4). В качестве иллюстрации приведем значения γ_* и ε_* для трех углов внутреннего трения:

$$\begin{aligned} &\varphi = 0, && \gamma_* = 42°, && \varepsilon_* = 0{,}57, \\ &\varphi = 10°, && \gamma_* = 36°, && \varepsilon_* = 0{,}47, \\ &\varphi = 20°, && \gamma_* = 28°, && \varepsilon_* = 0{,}36. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из анализа результатов (3.6) видно, что с ростом угла φ диапазон углов γ, для которых вытяжка осуществима, сужается. При этом уменьшается и ε_*. Таким образом, можно сделать вывод, что рост угла внутреннего трения, приводящего к охрупчиванию металла при пластическом течении, ухудшает условия и параметры процесса волочения полосы через короткую матрицу.

Вернемся теперь к рассмотрению общей задачи, когда пластическая зона состоит из областей, указанных на рис. 3. В этом случае решение строится численно на ЭВМ. Используемый метод основан на переходе от дифференциальных соотношений (1.6), (1.7) к конечно-разностным соотношениям и учете тех или иных свойств линий скольжения (в общей форме этот метод развит Массо в 1899 г.) [3].

Разобьем угол γ на $l - 1$ равных частей величиной $\delta = \gamma/(l-1)$. Без ограничения общности будем рассматривать задачу для углов $\alpha = (m-1)\,\delta$ и $\psi = (n-1)\delta$, поскольку всегда с достаточной степенью точности можно подобрать такое δ за счет выбора l. Из соотношения, полученного ранее для α, ψ и γ, следует, что $n = m + l - 1$. Пусть индекс i постоянен вдоль β-линии, а j — вдоль α-линии, тогда $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Для четырехугольника $CDFB$ имеем начальную характеристическую задачу. В точке пересечения α- и β-линий $\theta_{i,j} = -\pi/4 - \varphi/2 - \gamma + (i - j)\delta$. Заменяя дифференциальные соотношения (1.6) разностными и принимая угол θ равным среднему значению, в исходной и конечной точках можно построить сетку линий скольжения.

Заранее не известное на AO давление q определяется из условия того, что сумма горизонтальных составляющих отдельных усилий на линии OFB равна усилию вытяжки $p = q(H - h)$. В итоге для определенного γ можно численно установить зависимости p и q от $\varepsilon = (H - h)/H$.

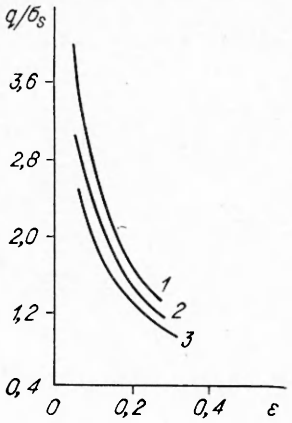

Рис. 5

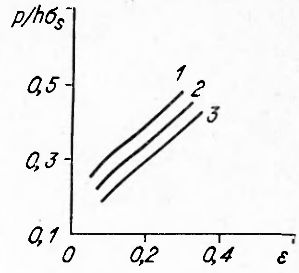

Рис. 6

На рис. 5 приводятся зависимости q от ε для $\gamma = 15°$ и для $\varphi = 10°$; $5°$; 0 (кривые *1—3*). Крайняя правая точка соответствует аналитическому решению (см. рис. 4), а крайняя левая — началу выдавливания металла с левой стороны от матрицы [3, 4]. Эта критическая точка получается на основе использования решения о сжатии полосы с угловыми вырезами (см. п. 2).

На рис. 6 представлены зависимости p от ε для $\gamma = 15°$ и для $\varphi = 10°$; $5°$; 0 (кривые *1—3*). Опять же крайняя правая точка отвечает аналитическому решению (см. рис. 4), а крайняя левая — началу выдавливания металла слева от матрицы.

Из приведенных на рис. 5 и 6 результатов следует, что увеличение угла внутреннего трения приводит к увеличению как давления на стенки матрицы, так и усилия вытяжки. Из количественного сопоставления решения для определенного γ и разных φ с результатами для различных γ [3, 4] видно, что увеличение φ на $5°$ соответствует изменению усилия вытяжки и давления на стенки матрицы на такую же величину, как и при изменении угла γ на аналогичный угол.

В заключение отметим, что широко используемый в механике горных пород для полухрупких тел угол внутреннего трения при его незначительной величине для металлов заметно влияет на силовые параметры при пластическом деформировании многих металлических конструкций. Экспериментальные наблюдения на металлах [1, 8] показывают, что наиболее значительно это влияние тогда, когда преобладающими в деформируемом теле являются растягивающие напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: ИЛ, 1954.
2. **Коврижных А. М.** Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 4.
3. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности.— М.: ГИТТЛ, 1956.
4. **Соколовский В. В.** Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
5. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды.— М.: Физматгиз, 1960.
6. **Drucker D. C., Prager W.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math.— 1952.— V. 10, N 2. Рус. пер.: Определяющие законы механики грунтов.— М.: Мир, 1975.
7. **Новожилов В. В.** О пластическом разрыхлении // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 4.
8. **Губкин С. И.** Пластическая деформация металлов.— М.: Металлургиздат, 1961.— Т. 2.

г. Новосибирск *Поступила 13/IV 1988 г.*