

УДК 532.529.534.2

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ОТРАЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ФЛЮИДЕ ОТ НАСЫЩЕННОГО ЭТИМ ФЛЮИДОМ ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. Ш. Шагапов, А. Ш. Султанов, С. Ф. Урманчеев

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mails: shagapov@rambler.ru, aidarsh@mail.ru, imran@anrb.ru

В акустическом приближении получены решения задачи об отражении ступенчатой волны давления в линейно сжимаемом флюиде от плоской границы пористой среды бесконечной протяженности, насыщенной тем же флюидом. На основе аналитических решений выполнен численный анализ с целью выявления особенностей отраженной и проникающей волн в зависимости от пористости и проницаемости пористого полупространства.

Ключевые слова: ступенчатая ударная волна, пористое полупространство, скорость фильтрации, отраженная и проникающая волны.

Введение. Вопросы волновой динамики насыщенных пористых сред вызывают интерес начиная с работ Я. Френкеля и М. Биота [1, 2]. В работах [3–6] развита теория волн для случая, когда в пористой среде содержатся неоднородности в виде трещин или сферических включений. В [7] впервые показано, что в некоторых насыщенных флюидом средах особенности распространения продольных волн в значительной мере определяются межфазным теплообменом. Взаимодействие ударных волн, распространяющихся в газе, с насыщенной пористой перегородкой конечной толщины изучалось в работах [8, 9]. Отметим также ряд исследований волновой динамики насыщенных пористых сред применительно к проблемам геоакустики и механизмов интенсификации добычи нефти [10–15]. Большинство теоретических работ посвящено дисперсионному анализу или поиску численных решений исходной системы уравнений насыщенных сред. В данной работе для предельной ситуации, а именно для случая несжимаемого скелета пористой среды, удалось построить аналитические решения, описывающие взаимодействие ступенчатой волны давления с пористой стенкой.

Основные уравнения и их решение. Рассмотрим процесс отражения плоской одномерной волны давления в линейно сжимаемом флюиде от плоской границы с пористой и проницаемой средой, насыщенной тем же флюидом. Скелет пористой среды будем полагать несжимаемым. Координатная ось направлена перпендикулярно фронту волны, начало ($x = 0$) координат находится на плоскости границы. Тогда уравнения движения в области чистого флюида ($x < 0$) и в пористой среде ($x > 0$) можно записать в виде [16]

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (x < 0), \quad (1)$$

$$\frac{m}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{m\mu}{k} u \quad (x > 0).$$

Здесь u — скорость (в области пористой среды — скорость фильтрации); p — возмущения давления; ρ_0 — плотность газа; m, k — пористость и проницаемость пористой среды; C — скорость звука во флюиде; μ — вязкость флюида. Считаем, что в исходном состоянии в пористой среде флюид неподвижен и давление однородно:

$$u = 0, \quad p = 0 \quad (x > 0, \quad t \leq 0).$$

Пусть в момент времени $t = 0$ на поверхность пористой среды со стороны чистого флюида падает волна давления; $p^{(0)}(t)$ — закон изменения возмущения давления на поверхности стенки. Тогда для скорости движения флюида под действием этой волны в рамках линейной теории имеет место соотношение

$$u^{(0)}(t) = p^{(0)}(t)/(\rho_0 C). \tag{2}$$

После достижения (в момент времени $t = 0$) фронтом волны поверхности $x = 0$ в зоне чистого флюида формируется отраженная волна:

$$p^{(r)} = p^{(r)}(t + x/C), \quad u^{(r)} = -p^{(r)}(t + x/C)/(\rho_0 C). \tag{3}$$

Поэтому суммарные возмущения давления и скорости в этой зоне ($x < 0$) при $t > 0$ могут быть записаны в виде

$$p = p^{(0)}(t - x/C) + p^{(r)}(t + x/C), \quad u = [p^{(0)}(t - x/C) + p^{(r)}(t + x/C)]/(\rho_0 C). \tag{4}$$

На рис. 1 схематично представлена волновая картина, реализующаяся при отражении ударной волны от проницаемой перегородки бесконечной толщины.

Из уравнений (1) следует, что в области пористой среды возмущения давления $p^{(g)}$ и скорости $u^{(g)}$ связаны соотношением

$$u^{(g)}(x, t) = -\frac{m}{\rho_0} \int_0^t \frac{\partial p^{(g)}(x, t')}{\partial x} e^{(t'-t)/t_v} dt', \quad t_v = \frac{\rho_0 k}{m\mu}. \tag{5}$$

В процессе взаимодействия волны давления с границей возмущения давления и скорости флюида со стороны чистого флюида (с левой границы) и со стороны флюида, находящегося в пористой среде (с правой границы), должны быть равны. Тогда для границы $x = 0$ при $t \geq 0$ справедливы соотношения

$$P(t) = p^{(0)}(t) + p^{(r)}(t) = p^{(g)}(0, t), \quad U(t) = u^{(0)}(t) + u^{(r)}(t) = u^{(g)}(0, t),$$

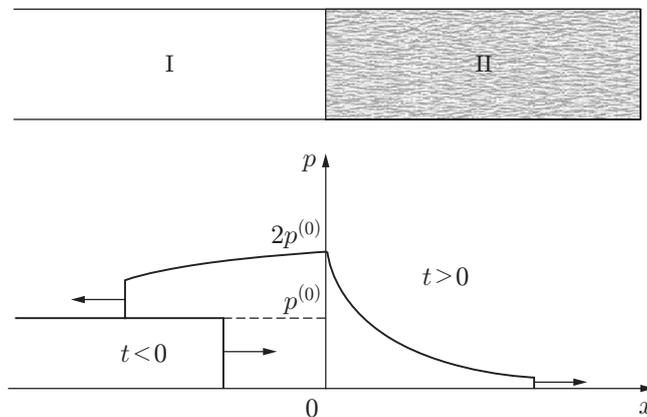


Рис. 1. Волновая картина при отражении ударной волны от проницаемой среды: I — чистый флюид; II — пористая среда

где $P(t)$, $U(t)$ — суммарные возмущения давления и скорости на границе $x = 0$. Отсюда с учетом (2)–(5) получаем

$$2p^{(0)} - P(t) = \rho_0 C U(t), \quad U(t) = -\frac{m}{\rho_0} \int_0^t \frac{\partial p^{(g)}(0, t')}{\partial x} e^{(t'-t)/t_v} dt'. \quad (6)$$

Из уравнений (1) для $p^{(g)}$ следует уравнение

$$\frac{\partial^2 p^{(g)}}{\partial t^2} + \frac{1}{t_v} \frac{\partial p^{(g)}}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 p^{(g)}}{\partial x^2},$$

решение которого, удовлетворяющее начальным и граничному условиям

$$p^{(g)} = 0, \quad \frac{\partial p^{(g)}}{\partial t} = 0 \quad (x > 0, t = 0), \quad p^{(g)} = P(t) \quad (x = 0, t > 0),$$

может быть получено методом преобразования Лапласа в виде [17]

$$p^{(g)}(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\int_0^\infty P(t') e^{-\lambda t'} dt' \right) e^{\lambda t - k(\lambda)x} d\lambda, \quad k(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda t_v (1 + \lambda t_v)}}{C t_v}. \quad (7)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial p^{(g)}(0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} k(\lambda) e^{\lambda(t-t')} d\lambda \right) P(t') dt'. \quad (8)$$

Подставляя (8) в правую часть выражения для $U(t)$ из (6), имеем

$$U(t) = \frac{m}{2\pi i \rho_0} \int_0^t \left[\int_0^\infty \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} k(\lambda) e^{\lambda(t''-t')} d\lambda \right) P(t') dt' \right] e^{(t''-t)/t_v} dt''. \quad (9)$$

Изменим в (9) порядок интегрирования, а именно запишем

$$U(t) = \frac{m e^{-t/t_v}}{2\pi i \rho_0} \int_0^\infty \left[\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\int_0^t e^{t''(\lambda+1/t_v)} dt'' \right) k(\lambda) e^{-\lambda t'} d\lambda \right] P(t') dt'. \quad (10)$$

Тогда выражение (10) можно представить в виде

$$U(t) = \frac{m}{\rho_0 C} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(\lambda) e^{\lambda(t-t')} d\lambda \right) P(t') dt', \quad \varphi(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda t_v}{1 + \lambda t_v}}. \quad (11)$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(\lambda) e^{\lambda(t-t')} d\lambda = -\frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(\lambda) e^{\lambda(t-t')} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (12)$$

интеграл, находящийся под знаком производной по t' в правой части (12), вычислим по известной формуле [18]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sqrt{\frac{\lambda + 2\beta}{\lambda + 2\alpha}} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\lambda} = \left(e^{-\rho t} I_0(\rho t) + 2\beta \int_0^t e^{-\rho \tau} I_0(\rho \tau) d\tau \right) H(t), \quad (13)$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad \rho = \alpha + \beta, \quad r = \alpha - \beta,$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда; $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. В рассматриваемом случае $2\alpha = 1/t_v$ и $\beta = 0$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(\lambda) e^{\lambda(t-t')} \frac{d\lambda}{\lambda} = e^{-(t-t')/(2t_v)} I_0\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) H(t-t'). \quad (14)$$

Подставляя (14) в правую часть (12), из (11) получим

$$U(t) = \frac{m}{\rho_0 C} \int_0^t \frac{e^{-(t-t')/(2t_v)}}{2t_v} \left[I_1\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) - I_0\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) \right] P(t') dt' + \frac{m}{\rho_0 C} P(t). \quad (15)$$

Подставляя (15) в первое уравнение из (6), для $P(t)$ получим следующее интегральное уравнение Вольтерры второго рода типа свертки:

$$2p^{(0)}(t) - (1+m)P(t) = m \int_0^t \frac{e^{-(t-t')/(2t_v)}}{2t_v} \left[I_1\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) - I_0\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) \right] P(t') dt'. \quad (16)$$

Если в интеграле произвести замену переменной $z = (t-t')/(2t_v)$, то интегральное уравнение (16) примет вид

$$2p^{(0)}(t) - (1+m)P(t) = m \int_0^{t/(2t_v)} [I_1(z) - I_0(z)] e^{-z} P(t - 2zt_v) dz. \quad (17)$$

Для функции $I_\nu(z)$ имеет место разложение

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)k!}. \quad (18)$$

Отсюда при $z \rightarrow 0$ имеем

$$I_0(0) = 1, \quad I_1(z) \approx z/2.$$

Тогда из интегрального уравнения (17) предельным переходом при $t \rightarrow 0$ получим

$$P(0) = 2p^{(0)}(0)/(1+m).$$

Пусть при $t \rightarrow \infty$ амплитуда падающей волны имеет конечный предел $p^{(0)}(\infty)$. Тогда в интегральном уравнении (17), переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, имеем

$$2p^{(0)}(\infty) - (1+m)P(\infty) = m \int_0^{\infty} [I_1(z) - I_0(z)] e^{-z} P(\infty) dz. \quad (19)$$

Учитывая, что

$$[I_1(z) - I_0(z)] e^{-z} = [e^{-z} I_0(z)]', \quad I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} [1 + O(1/z)], \quad z \rightarrow \infty,$$

из (19) получаем

$$P(\infty) = 2p^{(0)}(\infty).$$

Уравнение (16) в общем виде представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода типа свертки с ядром

$$K(t-t') = e^{-(t-t')/(2t_v)} \left[I_1\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) - I_0\left(\frac{t-t'}{2t_v}\right) \right].$$

Применяя для уравнения (16) преобразование Лапласа, получим

$$(1+m)\tilde{P}(\lambda) = 2\tilde{p}^{(0)} - \frac{m}{2t_v} \tilde{K}(\lambda)\tilde{P}(\lambda), \quad \tilde{P}(\lambda) = \int_0^\infty P(t) e^{-\lambda t} dt,$$

$$\tilde{p}^{(0)} = \int_0^\infty p^{(0)}(t) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad \tilde{K}(\lambda) = 2t_v \int_0^\infty \left[I_0\left(\frac{t}{2t_v}\right) e^{-t/(2t_v)} \right]' e^{-\lambda t} dt. \quad (20)$$

Интегрируя по частям, ядро интегрального уравнения представим в виде

$$\tilde{K}(\lambda) = 2t_v \left[\lambda \int_0^\infty I_0\left(\frac{t}{2t_v}\right) e^{-(1/(2t_v)+\lambda)t} dt - 1 \right].$$

Используя формулу [18]

$$\int_0^\infty I_n(\alpha z) e^{-\beta z} dz = \frac{(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2})^n}{\alpha^n \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}},$$

для $\tilde{K}(\lambda)$ окончательно можно записать соотношение

$$\tilde{K}(\lambda) = 2t_v(\varphi(\lambda) - 1). \quad (21)$$

Используя (21), на основе (20) для $\tilde{P}(\lambda)$ получаем

$$\tilde{P}(\lambda) = \frac{2\tilde{p}^{(0)}}{1+m\varphi(\lambda)}. \quad (22)$$

Пусть падающая волна является ступенчатой: $p^{(0)}(t) = p^{(0)} = \text{const}$. Тогда вместо (22) можно записать

$$\tilde{P}(\lambda) = \frac{2p^{(0)}}{[1+m\varphi(\lambda)]\lambda}.$$

Отсюда, переходя к обратному преобразованию Лапласа, получим решение уравнения (16)

$$P(t) = \frac{p^{(0)}}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{[1+m\varphi(\lambda)]\lambda}. \quad (23)$$

Для вычисления этого интеграла подынтегральную функцию представим в виде

$$[1+m\varphi(\lambda)]^{-1} = A(\lambda) - B(\lambda),$$

$$A(\lambda) = 1 + \frac{m^2 \lambda t_v}{1 + (1-m^2)\lambda t_v}, \quad B(\lambda) = m \frac{\sqrt{\lambda t_v(1+\lambda t_v)}}{1 + (1-m^2)\lambda t_v}.$$

Тогда выражение для $P(t)$ можно записать следующим образом:

$$P(t) = 2p^{(0)}(J_1 - J_2), \quad J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{A(\lambda) e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{B(\lambda) e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda. \quad (24)$$

При этом для первого интеграла нетрудно получить выражение

$$J_1 = 1 + \frac{m^2 e^{-\gamma t/t_v}}{1 - m^2}, \quad (25)$$

где $\gamma = 1/(1 - m^2)$. Второй интеграл представим в виде

$$J_2 = \frac{m^2}{1 - m^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{\lambda t_v(1 + \lambda t_v)}}{(\lambda t_v + \gamma)\lambda t_v} e^{\lambda t} d\lambda t_v.$$

Отсюда, используя формулу (13), находим

$$J_2 = \frac{m}{1 - m^2} \left[e^{-t/(2t_v)} I_0\left(\frac{t}{2t_v}\right) - \frac{m^2}{1 - m^2} e^{-\gamma t/t_v} \int_0^{t/t_v} e^{(\gamma-1/2)\tau} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau \right]. \quad (26)$$

Подставляя выражения для J_1 и J_2 из (25) и (26) в (24), получим следующее представление решения (23):

$$P(t) = 2p^{(0)} \left[1 + \frac{m^2 e^{-\gamma t/t_v}}{1 - m^2} - \frac{m e^{-t/(2t_v)}}{1 - m^2} I_0\left(\frac{t}{2t_v}\right) + \frac{m^3 e^{-\gamma t/t_v}}{(1 - m^2)^2} \int_0^{t/t_v} e^{(\gamma-1/2)\tau} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau \right]. \quad (27)$$

На основе решения (27) можно получить асимптотическое решение $P(t)$ при $t \rightarrow 0$ ($t \ll t_v$). Для этого надо найти первые два члена ряда Маклорена этой функции:

$$P(t) = P(0) + P'(0)t + o(t), \quad P(0) = 2p^{(0)}/(1 + m). \quad (28)$$

Из (27) нетрудно получить

$$P'(0) = \frac{p^{(0)}m}{(1 + m)^2 t_v}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), получим асимптотику решения $P(t)$ при $t \rightarrow 0$ ($t \ll t_v$):

$$P(t) = \frac{2p^{(0)}}{1 + m} \left(1 + \frac{mt}{(1 + m)2t_v} \right).$$

Используя формулу (18) для $I_0(z)$, из решения (27) нетрудно получить асимптотическое решение для $P(t)$ при $t \rightarrow \infty$ ($t \gg t_v$) в виде

$$P(t) = 2p^{(0)} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_v}{t}} \right). \quad (30)$$

Для численной реализации решения (27) используем следующее интегральное представление функции Бесселя [18]:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{zy} dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Тогда интегральный комплекс, входящий в последнее слагаемое в (27), можно записать в виде

$$\int_0^{t/t_v} e^{(\gamma-1/2)\tau} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{(2\gamma-1+y)t/(2t_v)} dy}{\sqrt{1 - y^2} (2\gamma - 1 + y)} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} (2\gamma - 1 + y)}. \quad (31)$$

Последний интеграл в (31) с использованием известного табличного интеграла [19]

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx) dx}{1 + a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} \right)^n, \quad a^2 < 1$$

вычисляется и имеет вид

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} (2\gamma-1+y)} = \frac{\pi(1-m^2)}{2m}. \quad (32)$$

Подставляя (31) с учетом (32) в (27), окончательно получим представление решения, удобное для численного анализа:

$$P(t) = 2p^{(0)} \left(1 - \frac{m}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{e^{-(y+1)t/(2t_v)} dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1} \right). \quad (33)$$

При расчете была использована формула [20]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} f(y) dy = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2n+1} \right) f \left(\cos \frac{2\pi k}{2n+1} \right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

На рис. 2 представлены зависимости $p/p^{(0)}(t/t_v)$. Видно, что при отражении волны давления ступенчатой формы возмущение давления на границе пористого полупространства ($x=0$) асимптотически увеличивается от значения $P(0) = 2p^{(0)}/(1+m)$ до значения $P(\infty) = 2p^{(0)}$ согласно закону, определяемому формулой (30). Таким образом, амплитуда переднего скачка отраженной волны и величина недосжатия

$$\Delta P_0 = P(\infty) - P(0) = 2p^{(0)}m/(1+m)$$

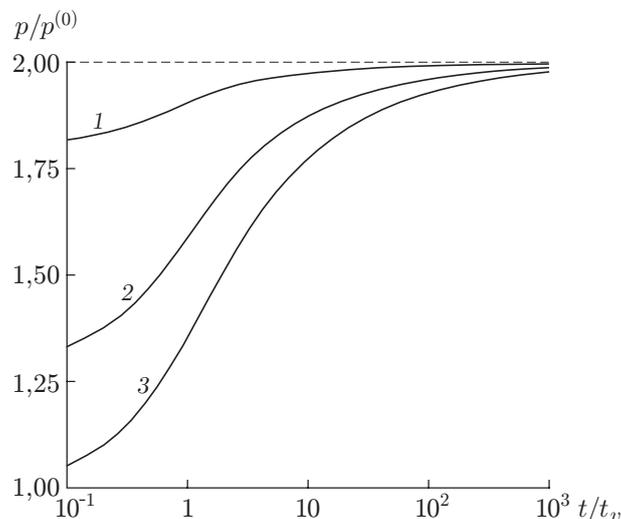


Рис. 2. Давление в пористой среде при различных значениях пористости: 1 — $m = 0,1$; 2 — $m = 0,5$; 3 — $m = 0,9$; штриховая линия — асимптота линий 1–3

определяются лишь пористостью перегородки (значением m). Характерное время достижения асимптотического значения $P(t)/p^{(0)} = 2$ при известных значениях пористости m , вязкости μ и плотности ρ_0 флюида, а также сжимаемости флюида (определяемой скоростью звука согласно формуле для t_v в (5)) определяется лишь значением проницаемости пористой среды.

Определим характерное время релаксации t_* как промежуток, в течение которого недосжатие равно

$$\Delta P_* = P(\infty) - P(t_*) = \varepsilon \Delta P_0 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Тогда, используя для $P(t)$ асимптотическую формулу (30), получим следующее выражение для времени релаксации:

$$t_* = (1 + m)^2 t_v / (\pi \varepsilon^2).$$

В частности, если в качестве флюида использовать воздух и воду при температуре $T_0 = 300$ К и давлении $p_0 = 0,1$ МПа, то для пористой среды с пористостью $m = 10^{-1}$ и проницаемостью $k = 10^{-12}$ м², характерными для горных пород, получим $t_v \approx 10^{-6}$; 10^{-5} с соответственно.

Пусть в течение времени релаксации t_* величина недосжатия уменьшается в 10 раз ($\varepsilon = 10^{-1}$). Тогда для воздуха и воды получим $t_* \approx 3 \cdot 10^{-5}$; $3 \cdot 10^{-4}$ с соответственно. Кроме того, характерные линейные масштабы $x_* = Ct_*$ зон релаксаций в отраженной от пористой среды волне для воздуха ($C = 340$ м/с) и воды ($C = 1500$ м/с) будут равны $x_* = 0,01$; $0,50$ м соответственно. Если использовать менее вязкие жидкости (например, ацетон, бензол или этиловый эфир), то характерное время t_* и расстояние x_* будут еще больше. Приведенные оценки показывают, что эти результаты могут быть использованы при создании методов экспресс-анализа пористости и проницаемости твердых пористых материалов с помощью волн давления.

Проанализируем решение для $p^{(g)}$ и $u^{(g)}$, описывающее динамику волны в пористой среде. Решение (7) для $p^{(g)}$, соответствующее падающей ступенчатой волне, может быть представлено в виде

$$p^{(g)}(x, t) = \frac{p^{(0)}}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t - k(\lambda)x} d\lambda}{[1 + m\varphi(\lambda)]\lambda}. \quad (34)$$

Числитель подынтегральной функции, входящий в (34), представим в виде

$$e^{\lambda t - k(\lambda)x} = e^{\lambda(t-x/C) + (\lambda/C - k(\lambda))x}.$$

Тогда, используя теорему о запаздывании [18], из (34) получим

$$p^{(g)} = H\left(t - \frac{x}{C}\right) \frac{p^{(0)}}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t' + (\lambda/C - k(\lambda))x} d\lambda}{[1 + m\varphi(\lambda)]\lambda}, \quad t' = t - \frac{x}{C}. \quad (35)$$

Нетрудно показать, что в (35) функция под интегралом

$$\Phi(\lambda) = e^{(\lambda/C - k(\lambda))x} \left/ \left[\left(1 + m \frac{\lambda t_v}{\sqrt{\lambda t_v (1 + \lambda t_v)}} \right) \lambda \right] \right.$$

удовлетворяет условию леммы Жордано [17]

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \lambda \notin (-\infty, 0)}} \Phi(\lambda) = 0.$$

Поэтому, применяя метод контурного интегрирования к (35), получаем

$$\frac{p^{(g)}(x, t)}{p^{(0)}} = 2H\left(t - \frac{x}{C}\right) \left(1 - \frac{m}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{\cos[\sqrt{1-y^2}x/(2Ct_v)] e^{-(1+y)t/(2t_v)} dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-y}{1+y} \frac{\sin[\sqrt{1-y^2}x/(2Ct_v)] e^{-(1+y)t/(2t_v)} dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1}\right). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (5) после несложных преобразований, получим решение для скорости в пористой среде

$$\frac{u^{(g)}(x, t)}{u^{(0)}} = \frac{2m}{\pi} H\left(t - \frac{x}{C}\right) \left(\pi e^{(t-x/C)/t_v} + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{\cos[\sqrt{1-y^2}x/(Ct_v)] [e^{-(1+y)t/(2t_v)} - (m+1) e^{-[t-(1-y)x/(2C)]/t_v}] dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1} - \right. \\ \left. - \int_{-1}^1 \frac{1-y}{1+y} \frac{\sin[\sqrt{1-y^2}x/(Ct_v)] e^{-[t-(1-y)x/(2C)]/t_v} dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1} - \right. \\ \left. - m \int_{-1}^1 \frac{\sin[\sqrt{1-y^2}x/(Ct_v)] (e^{-(1+y)t/(2t_v)} - e^{-[t-(1-y)x/(2C)]/t_v}) dy}{(m^2-1)y + m^2 + 1}\right). \quad (37)$$

На рис. 3 показаны изменения во времени волн давления и поля скоростей в пористой среде, рассчитанные по уравнениям (36) и (37) при $m = 0,5$. В расчетах использовалась квадратурная формула (33). Из рис. 3 следует, что передний скачок волны давления, распространяющейся со скоростью C , за время $t \approx 10t_v$ полностью затухает. При $t \gg 10t_v$

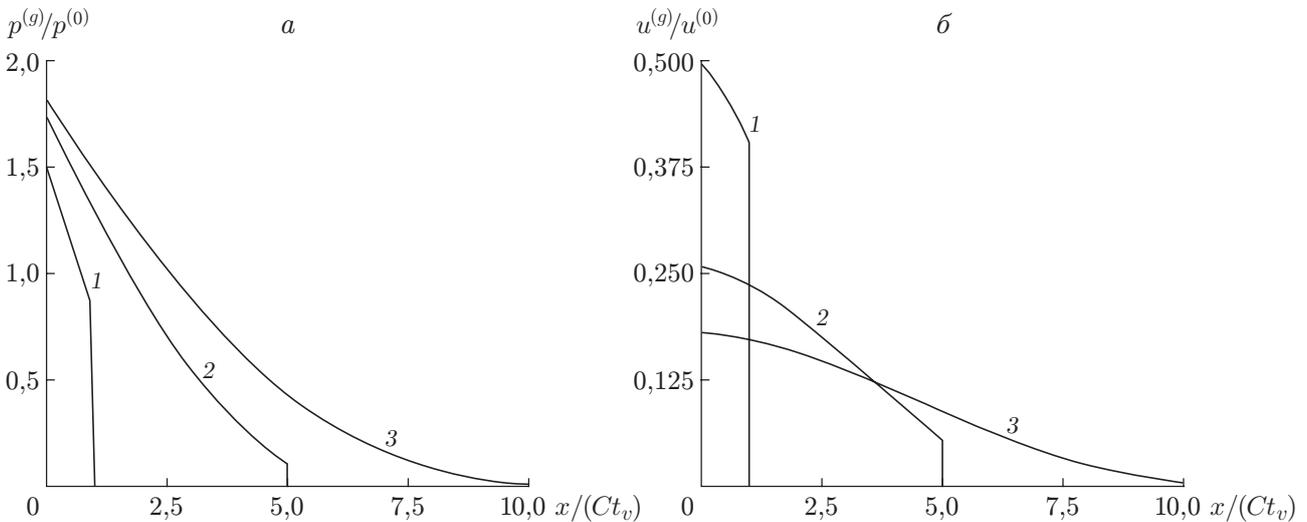


Рис. 3. Эволюция волн давления (а) и распределение скорости в пористой среде (б) при $m = 0,5$:
1 — $t/t_v = 1$; 2 — $t/t_v = 5$; 3 — $t/t_v = 10$

поля давления и скорости принимают вид, описываемый уравнением пьезопроводности, полученным в рамках закона Дарси.

Следует отметить, что результаты расчетов по формулам (33), (36) и (37) хорошо согласуются с результатами численного решения дифференциальных уравнений [8, 9]. Кроме того, при $t_v \rightarrow \infty$ соотношение (33) совпадает с аналитическим решением, приведенным в [8].

Заключение. В линейном приближении получено аналитическое решение, описывающее отражение волны ступенчатой формы от пористого полупространства. В отличие от закона отражения волны от непроницаемой стенки, когда значение давления на ней мгновенно повышается в два раза, в случае отражения волны от пористой стенки увеличение давления в два раза происходит с некоторым запаздыванием в зависимости от пористости, проницаемости среды, а также от вязкости флюида. Поэтому время запаздывания, а также увеличение давления непосредственно после падения волны на стенку позволяют судить о пористости и проницаемости материала. Полученные аналитические решения могут быть использованы также при тестировании результатов численных расчетов волн давления в насыщенных пористых средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Френкель Я. И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–149.
2. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28, N 2. P. 168–191.
3. **Юматов А. Ю., Марков М. Г.** Распространение упругой продольной волны в трещиноватой среде // Геология и геофизика. 1987. № 3. С. 98–104.
4. **Gurevich B., Lopatnikov S.** Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks // Geophys. J. Intern. 1995. V. 121. P. 933–947.
5. **Hudson J. A., Liu E., Crampin S.** The mechanical properties of materials with interconnected cracks and pores // Geophys. J. Intern. 1996. V. 124. P. 105–112.
6. **Губайдуллин А. А., Кучугурина О. Ю.** Распространение слабых возмущений в трещиновато-пористых средах // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 5. С. 816.
7. **Шагапов В. Ш., Хусаинов И. Г., Дмитриев В. Л.** Распространение линейных волн в насыщенных газом пористых средах с учетом межфазного теплообмена // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 114–120.
8. **Кутушев А. Г., Радионов С. П.** Численное исследование влияния параметров слоя насыщенной среды и падающей ударной волны на давление на экранируемой плоской стенке // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 2. С. 105–113.
9. **Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Урманчиев С. Ф.** Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 87–96.
10. **Абрашкин А. А., Авербах В. С., Власов С. Н. и др.** О возможном механизме акустического воздействия на частично насыщенные пористые среды // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 6–19.
11. **Дудин З. С., Николаевский В. Н.** Нелинейные волны в пористых средах, насыщенных “живой” нефтью // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 74–80.
12. **Зайцев В. Ю., Гусев В. Э., Назаров В. Е., Кастаньеде Б.** Взаимодействие акустических волн с трещинами: упругие и неупругие механизмы нелинейности с различными временными масштабами // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 80–92.

13. **Максимов Г. А., Радченко А. В.** Моделирование интенсификации нефтедобычи при акустическом воздействии на пласт из скважины // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 118–132.
14. **Марков М. Г.** Распространение упругих продольных волн в насыщенной пористой среде со сферическими неоднородностями // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 132–140.
15. **Николаевский В. Н., Степанова Г. С.** Нелинейная сейсмика и акустическое воздействие на нефтеотдачу пласта // Акуст. журн. 2005. Т. 51. С. 150–160.
16. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984.
17. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
18. **Карслоу Х., Егер Д.** Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
19. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
20. **Крылов В. И., Шульгина Л. Т.** Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.

*Поступила в редакцию 10/VI 2005 г.,
в окончательном варианте — 3/XI 2005 г.*
