

УДК 539.3

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Н. А. Богульская\*, И. О. Богульский\*\*,\*\*

\* Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия

\*\* Красноярский государственный аграрный университет, 660049 Красноярск, Россия  
E-mails: nbogulskaaya@sfu-kras.ru, bogul.io@ya.ru

Предложена модель движения гранулированной среды, основанная на упругом взаимодействии частиц, каждая из которых представляет собой абсолютно твердое тело (диск в плоском случае, шар в пространственном случае) массой  $m$  и радиусом  $r$ , окруженное упругой оболочкой небольшой толщины. Изложен алгоритм решения сформулированной задачи. На каждом шаге вычисляются силы и моменты сил, действующие на частицу вследствие ее взаимодействия с соседними частицами. Для полученной системы дифференциальных уравнений численно решается задача Коши. На основе математической модели создан комплекс программ, реализующий модели движения сыпучих сред в подвижных сосудах.

Ключевые слова: гранулированная среда, численные методы, компьютерное моделирование, упругое взаимодействие.

DOI: 10.15372/PMTF20200211

**Введение.** Несмотря на то что сыпучие материалы широко распространены в природе и используются в промышленности, их свойства изучены недостаточно.

Сыпучая среда может течь подобно жидкости, при наличии напряжений может оставаться в состоянии покоя подобно твердому телу, при высокой интенсивности воздействия ее движение может быть подобно движению газа. Известно большое количество подходов к теоретическому описанию поведения сыпучей среды с использованием методов механики сплошных сред [1]. В работе [2] описано движение сыпучей среды в рамках гидродинамической модели с достаточно сложной реологией. В [3] используются формулировки моделей сыпучих и пористых сред в виде вариационных неравенств для гиперболических операторов с ограничениями, описывающими физически нелинейный процесс перехода материала в пластическое состояние и различное сопротивление сыпучего или пористого материала при растяжении и сжатии. В [4] сформулирована математическая модель, описывающая способность среды накапливать энергию внутренних напряжений. В [5] построена модель сдвигового течения между параллельными пластинами, описывающая, в частности, стадию рекомбинации гранул. Работы [6–8] посвящены исследованию кластеров частиц. Подход к построению модели гранулированной среды, предложенный в [9], наиболее близок к подходу, описанному в настоящей работе. Несмотря на проведение интенсивных исследований в этой области, общая теория, предсказывающая изменение поведения сыпучего материала, до сих пор не разработана.

В данном случае компьютерное моделирование, заключающееся в решении динамической задачи и отслеживании траектории каждой частицы, является достаточно эффективным методом исследования поведения сыпучей среды. В предлагаемом методе сложная задача о движении сыпучей среды как целого сводится к большому количеству достаточно простых и хорошо исследованных задач о механическом контакте и взаимодействии отдельных частиц. Это приводит к необходимости применения современных технологий программирования.

**1. Математическая модель.** Предлагается следующая модель гранулированной среды [10, 11]. Рассматривается случай плоского движения частиц в виде круглого абсолютно твердого диска с определенными диаметром и массой, окруженного тонким упругим ободом. Движение каждой частицы описывается классическими уравнениями движения абсолютно твердого тела, взаимодействие гранул характеризуется упругим сжатием и силой трения. Рассмотрим каждую частицу и выясним, какие из остальных частиц взаимодействуют с ней в данный момент времени. Вычислим силы и моменты сил, возникающие при взаимодействии данной частицы с соседними частицами. Численно решим полученную систему дифференциальных уравнений.

Пусть сосуд содержит  $N$  элементов, координаты центров которых  $x_i, y_i$ , скорости центров  $u_i, v_i$  и угловые скорости  $\omega_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$  известны.

Определим элементы, взаимодействующие с  $i$ -м элементом. Вычислим расстояние между центрами элементов  $R_{ij}$  и выберем в качестве ближайших те элементы, для которых оно меньше суммы радиусов. Далее вычисления проводятся для этих элементов.

Определим силу, действующую на  $i$ -й элемент со стороны  $j$ -го. Так как расстояние  $R_{ij}$  меньше суммы радиусов, возникает упругая сила  $f_{ij}$  (рис. 1), которая по величине равна

$$f_{ij} = (r_i + r_j - R_{ij})c = (r_i + r_j - R_{ij})mg/(2\varepsilon) \quad (1)$$

и действует в направлении точки  $O$  вдоль линии  $O'O$ . В (1)  $g$  — ускорение свободного падения;  $\varepsilon$  — величина сжатия упругой оболочки частицы, неподвижно лежащей на плоскости, под действием собственного веса:  $mg = c\varepsilon$ ;  $c$  — жесткость упругой оболочки. Таким образом,  $\varepsilon$  является характеристикой жесткости. Величина  $\varepsilon$  составляет доли радиуса. Естественно, чем меньше  $\varepsilon$ , тем ближе рассматриваемая модель к модели абсолютно твердого тела.

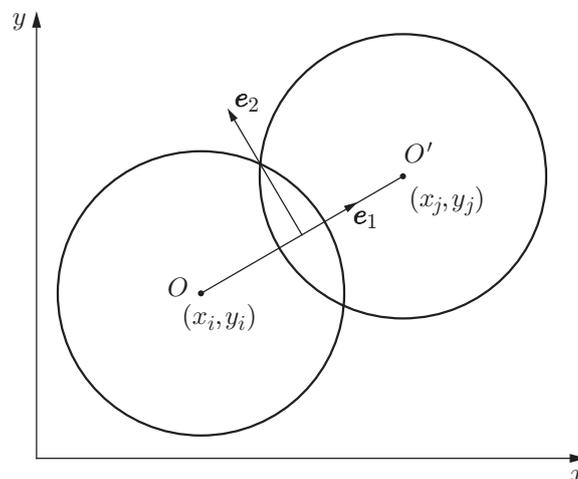


Рис. 1. Схема взаимодействия упругих частиц

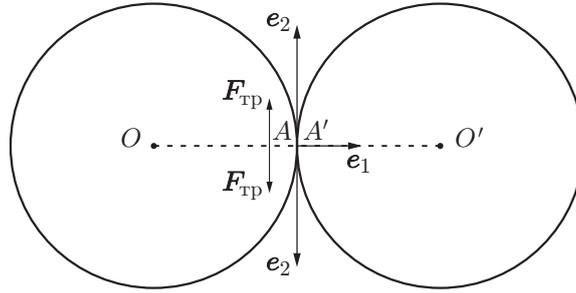


Рис. 2. Схема взаимодействия двух элементов с учетом сил трения

Следовательно, со стороны  $j$ -го элемента действует сила с компонентами

$$f_x^{ij} = -(r_i + r_j - R_{ij}) \frac{mg}{2\varepsilon} \frac{x_j - x_i}{R_{ij}}, \quad f_y^{ij} = -(r_i + r_j - R_{ij}) \frac{mg}{2\varepsilon} \frac{y_j - y_i}{R_{ij}}. \quad (2)$$

В процессе движения между элементами возникает сила трения, пропорциональная силе упругого сжатия и направленная противоположно относительной скорости движения точки контакта.

Рассмотрим два элемента с номерами  $i$  и  $j$  (рис. 2).

Возникающая сила трения  $F_{ij}^{\text{TP}}$  по величине равна

$$F_{ij}^{\text{TP}} = \nu f_{ij}$$

( $\nu$  — коэффициент трения скольжения) и направлена либо в направлении вектора  $e_2$ , либо в противоположном направлении в зависимости от знака проекций скоростей точек  $A$  и  $A'$  (см. рис. 2) на направление, совпадающее с направлением вектора  $-e_2$ .

Проекция скоростей точек  $A$  и  $A'$  есть скалярные произведения векторов скоростей и вектора  $-e_2$ . Эти проекции зависят от скоростей центров ячеек, а также от угловых скоростей вращения  $i$ -го и  $j$ -го элементов  $\omega_i$  и  $\omega_j$ . Проекция относительной скорости на направление, совпадающее с направлением вектора  $-e_2$ , равна  $W$ .

Введем величину  $\alpha_{ij}$ , которая принимает значение  $\alpha_{ij} = 1$ , если  $W < 0$ , и  $\alpha_{ij} = -1$ , если  $W > 0$ . В этом случае к силам (2) необходимо добавить соответствующие компоненты сил трения:

$$F_x^{ij} = f_x^{ij} + F_{ij}^{\text{TP}} e_x \alpha_{ij}, \quad F_y^{ij} = f_y^{ij} + F_{ij}^{\text{TP}} e_y \alpha_{ij}, \quad M_i = -M_i^0 \alpha_{ij}. \quad (3)$$

Здесь  $M_i$  — момент силы трения. Компоненты силы, действующей на  $i$ -й элемент, получаются суммированием величин в (3) по ближайшим элементам, в направлении  $y$  дополнительно учитывается вес  $-m_i g$ .

Достаточно просто описывается взаимодействие элемента со стенками и дном лотка при условии, что закон движения стенок лотка известен.

Закон Ньютона для  $i$ -го элемента представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= u_i, & m_i \frac{d}{dt} u_i &= F_x - \mu u_i, \\ \frac{d}{dt} y_i &= v_i, & m_i \frac{d}{dt} v_i &= F_y - \mu v_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$J_i \frac{d}{dt} \omega_i = M_i,$$

где  $F_x$ ,  $F_y$  — суммарные силы, действующие на  $i$ -й элемент в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $u_i$ ,  $v_i$  — компоненты скорости центра масс в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;

$J_i$  — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр тяжести; диссипативные (вязкие) члены  $\mu u_i$  и  $\mu v_i$  ( $\mu \geq 0$  — коэффициент вязкости) введены для повышения устойчивости решения. Сила тяжести приложена ко всем частицам.

Таким образом, задача о движении гранулированной среды сводится к задаче Коши для системы  $5N$  дифференциальных уравнений первого порядка.

**2. Численное решение.** Задача Коши для системы уравнений (4) решается численно. Выбор алгоритма не является тривиальным. Следует отметить, что даже линейная задача об упругом взаимодействии твердых тел не является асимптотически устойчивой. Спектр оператора перехода в данной задаче может содержать положительные вещественные части. Кроме того, система уравнений является жесткой.

Очевидно, что применение методов типа метода Эйлера первого порядка точности исключается. В то же время вычисление сил требует достаточно большого количества операций, поэтому использование многостадийных явных методов [12], имеющих преимущества по сравнению с классическими методами вследствие возможности выбора большого шага по времени, также нежелательно. Оценки показывают, что независимо от выбранного метода вследствие особенностей задачи возникают существенные ограничения на шаг по времени.

Далее используем схему Рунге — Кутты второго порядка точности [13] с выбором срединной точки на первой стадии.

На каждом шаге решения задачи по времени  $\Delta t$  на первой стадии вычисляются промежуточные величины на шаге  $\Delta t/2$ . С использованием метода Эйлера получаем

$$\begin{aligned}x_i^{n+1/2} &= x_i^n + \frac{\Delta t}{2} u_i^n, & u_i^{n+1/2} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{2m_i} (F_x^n - \mu u_i^n), \\y_i^{n+1/2} &= y_i^n + \frac{\Delta t}{2} v_i^n, & v_i^{n+1/2} &= v_i^n + \frac{\Delta t}{2m_i} (F_y^n - \mu v_i^n), \\ \omega_i^{n+1/2} &= \omega_i^n + \frac{\Delta t}{2J_i} M_i^n.\end{aligned}$$

На второй стадии выполняется переход на следующий шаг по времени  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}x_i^{n+1} &= x_i^n + \Delta t u_i^{n+1/2}, & u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} (F_x^{n+1/2} - \mu u_i^{n+1/2}), \\y_i^{n+1} &= y_i^n + \Delta t v_i^{n+1/2}, & v_i^{n+1} &= v_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} (F_y^{n+1/2} - \mu v_i^{n+1/2}), \\ \omega_i^{n+1} &= \omega_i^n + \frac{\Delta t}{J_i} M_i^{n+1/2}.\end{aligned}$$

Здесь  $F_x^{n+1/2}$ ,  $F_y^{n+1/2}$ ,  $\dots$  — силы, вычисленные для элементов с координатами центров  $x_i^{n+1/2}$ ,  $y_i^{n+1/2}$ ,  $\dots$

Начальные координаты центров можно выбрать произвольно. Начальные и угловые скорости, как правило, принимаются нулевыми. Когда сосуд, в котором находится гранулированная среда, начинает двигаться, элементы среды за несколько шагов по времени “плотно” упаковываются.

На основе математической модели создан комплекс программ, реализующих модели движения сыпучих сред в подвижных сосудах. Для программирования была выбрана среда Delphi6. Компьютерная модель позволяет графически представить движение гранулированной среды. В библиотеке Visual Component Library среды Delphi6 имеются широкие возможности для этого. Время численного решения задачи можно уменьшить за счет распараллеливания процесса вычисления [14].

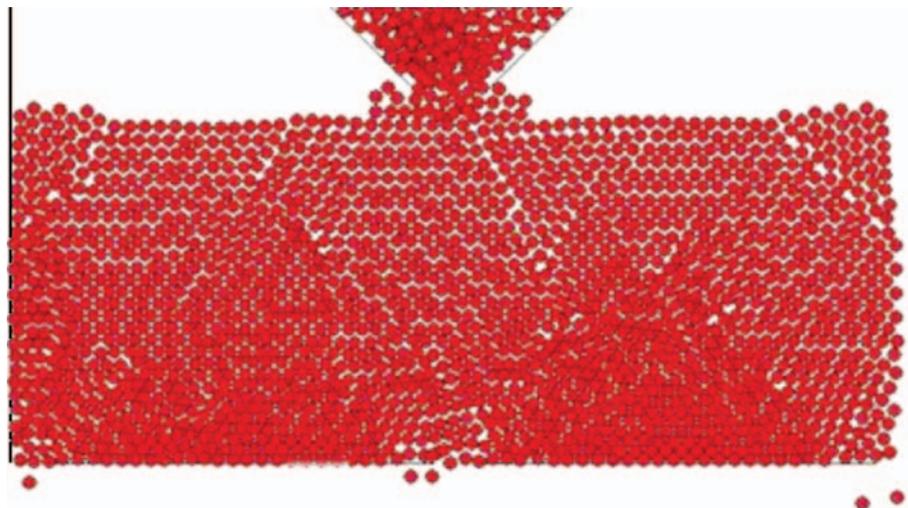


Рис. 3. Состояние сыпучей среды в момент времени, когда система достаточно “плотно” упакована

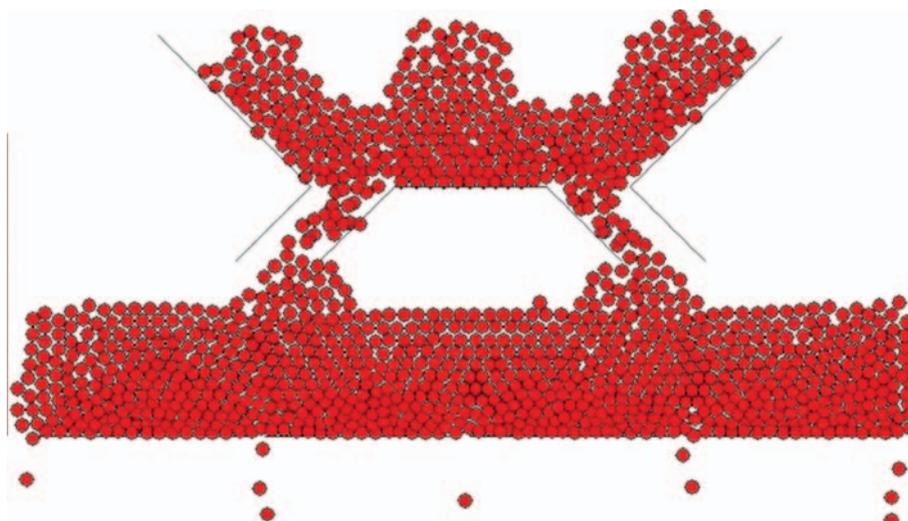


Рис. 4. Результаты решения задачи о движении сыпучей среды в бункере с двумя отверстиями

**3. Результаты численных экспериментов.** На рис. 3 приведены результаты численного решения задачи о движении сыпучей среды в бункере и подвижном лотке для момента времени, когда система достаточно “плотно” упакована. Рассмотрено 2400 элементов в подвижном лотке и приблизительно 100 элементов в бункере в начальный момент времени. В дне лотка имеется три отверстия, через которые высыпаются частицы. Размер каждого отверстия равен трем диаметрам элемента.

На рис. 4 представлены результаты решения задачи о движении сыпучей среды в лотке с пятью отверстиями.

В численном эксперименте длина лотка полагалась равной 50 см, диаметр частиц — 0,8 см, масса — 0,6 г. Величина  $\epsilon$  составляет 0,01 радиуса элемента. Частота гармонических колебаний лотка в горизонтальном направлении равна 9 Гц, амплитуда — 1 см, шаг по времени — 0,002 с. Вблизи отверстий расположены счетчики, фиксирующие количество выпавших из лотка частиц. В начальный момент времени частицы в лотке уложены горизонтальными слоями и неподвижны.

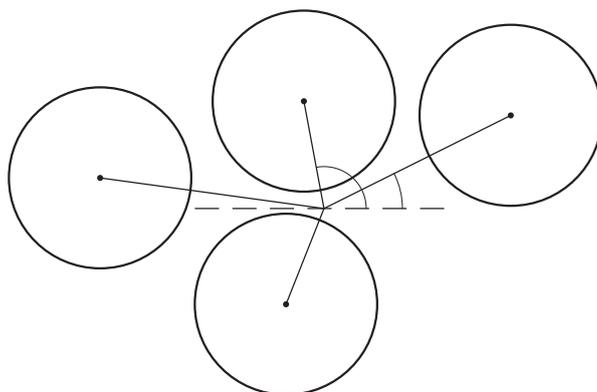


Рис. 5. Модель гранулы неправильной формы в виде ансамбля шаров

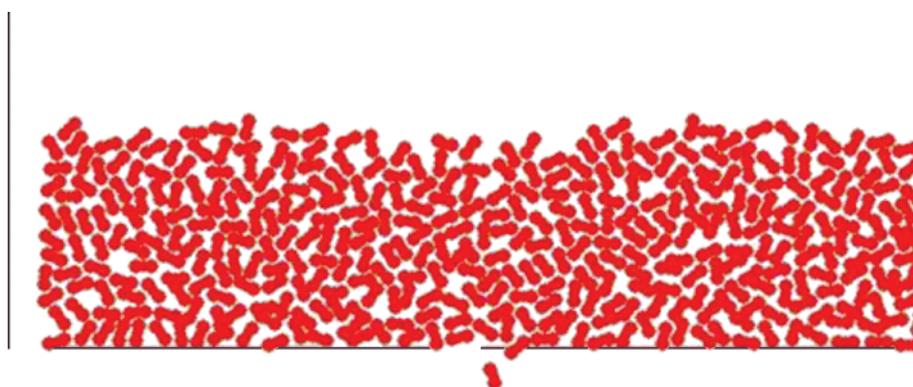


Рис. 6. Результаты численного решения задачи о движении сыпучей среды, моделируемой “диполями”

**4. Обобщение базовой модели.** В реальных сыпучих средах гранулы имеют неправильную форму. При вычислении упругих сил взаимодействия и сил трения возникают существенные трудности и увеличиваются вычислительные затраты.

В качестве модели гранул неправильной формы можно использовать ансамбль шаров, жестко соединенных в конструкцию, не меняющую форму (рис. 5). При этом под взаимодействием гранул понимается взаимодействие отдельных шаров, под движением гранулы — движение ее центра масс и вращение ее вокруг этого центра.

На рис. 6 приведены результаты численного решения задачи, в которой рассматривался упрощенный вариант удлиненного тела — “диполь”. Каждая гранула представлялась в виде двух шаров, жестко соединенных стержнем.

**5. Модель сыпучей среды с гранулами, имеющими различные размеры и массу.** На рис. 7 показана сыпучая среда с гранулами, имеющими различные размеры и массу. Следует отметить, что в этом случае в результате вибрации среда более “плотно” упаковывается и процесс высыпания гранул через отверстия в дне лотка замедляется.

Решение трехмерной задачи приведено в работе [15].

**Заключение.** В работе предложена модель движения гранулированной среды, основанная на упругом взаимодействии частиц. Проведено сравнение результатов численного решения задачи о движении сыпучей среды с данными натуральных экспериментов, проведенных на универсальных высевающих устройствах вибрационного типа [16]. Установлено,

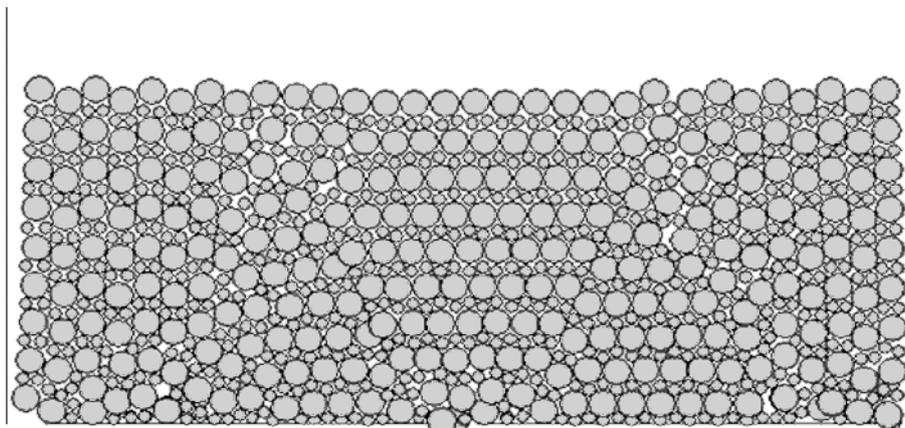


Рис. 7. Сыпучая среда с гранулами, имеющими различные размеры и массу

что положение зон “разрыхления” и “уплотнения”, перераспределение гранул различной массы, а также поведение среды при различных количестве и положении отверстий в дне, определенные в численном эксперименте, соответствуют данным натуральных экспериментов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Lagree P., Staron L., Popinet S.** The granular column collapse as a continuum: validity of two-dimensional Navier — Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 686. P. 378–408.
2. **Шваб А. В., Марченко М. С.** Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика.* 2011. № 3. С. 108–116.
3. **Sadovskaya O.** Mathematical modeling in mechanics of granular materials / O. Sadovskaya, V. Sadovskii. Heidelberg; N. Y.; Dordrecht; L.: Springer, 2012. (Advanced structured materials; V. 21).
4. **Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // *ПМТФ.* 2018. Т. 59, № 2. С. 167–176.
5. **Хой С. К., Ван В., Ван З. Я. и др.** Силовые цепочки и течение гранулированной среды в третьем теле при сдвиговой дилатансии // *ПМТФ.* 2018. Т. 59, № 1. С. 178–188.
6. **Koivisto J., Durian D. J.** Effect of interstitial fluid on the fraction of flow microstates that precede clogging in granular hoppers // *Phys. Rev. E.* 2017. V. 95. 032904.
7. **Baker L., Frankel A., Mani A., Coletti F.** Coherent clusters of inertial particles in homogeneous turbulence // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 833. P. 364–398.
8. **Gruca M., Bukowcki M., Ekiel-Jezewska M. L.** Periodic and quasiperiodic motions of many particles falling in a viscous fluid // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 92. 023026.
9. **Микуляк С. В.** Особенности распространения нелинейных волн в слое гранулированной среды // *Физ. мезомеханика.* 2013. Т. 10, № 2. С. 74–83.
10. **Богульский И. О., Богульская Н. А.** Численное моделирование движения гранулированной среды в подвижных сосудах // *Вычисл. технологии.* 2011. Т. 16, № 2. С. 27–34.
11. **Богульская Н. А., Богульский И. О.** Моделирование движения неоднородной гранулированной среды с гранулами неправильной формы // *Вестн. Краснояр. гос. аграр. ун-та.* 2012. № 11. С. 41–49.

12. **Новиков Е. А.** Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1997.
13. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. **Богульский И. О., Богульская Н. А.** Решение задачи моделирования движения гранулированной среды на основе распараллеливания // Распределенные и кластерные вычисления: Тез. докл. 7-й Межрегион. шк.-семинара, Красноярск, 12–14 окт. 2010 г. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2010. С. 8.
15. **Богульская Н. А., Богульский И. О.** Трехмерное моделирование движения гранулированной среды в сосудах роторного типа // Ресурсосберегающие технологии: Прил. к “Вестн. Краснояр. гос. аграр. ун-та”. 2007. № 4. С. 109–112.
16. **Вишняков А. С.** Вибрационный высев семян сельскохозяйственных культур / А. С. Вишняков, А. А. Вишняков, И. О. Богульский, В. А. Козлов. Красноярск: Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2017.

*Поступила в редакцию 12/IX 2019 г.,  
после доработки — 20/X 2019 г.  
Принята к публикации 28/X 2019 г.*

---