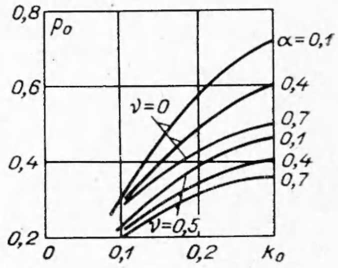
связь между $\sigma$ и $\varepsilon$ выбиралась линейной $\sigma = \sigma_{max}\varepsilon$, что, согласно [9], характерно для сыпучих сред, в частности для песка. На фигуре показана зависимость критического давления $p_0 = p\text{E}^{-1}$ от предела текучести $k_0$ при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0$; 0,5 и скорости дилатансии $\alpha = 0{,}1$; 0,4; 0,7, характерной для сыпучих сред (песка, гравия и т. п.).




Расчет показал, что влияние $\nu$ и $\alpha$ в указанных выше пределах на величину критической силы значительно. Однако получающиеся при этом числовые значения критических нагрузок нереальны, следовательно, поверхностная неустойчивость практически не наблюдается.

*Поступила 21 IX 1976*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н.** Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М., Физматгиз, 1961.
4. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
5. **Спорыхин А. Н.** Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел.— ПМТФ, 1967, № 4.
6. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
7. **Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г.** Задачи устойчивости упруговязкопластических тел.— ПМТФ, 1973, № 4.
8. **Алимжанов М. Т., Ершов Л. И.** Устойчивость равновесия тел и некоторых задач теории горного давления. Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., «Судостроение», 1970.
9. **Роу П.** Теоретический смысл и наблюдаемые величины деформационных параметров грунта.— В кн.: Механика. Новое в зарубежной науке. М., «Мир», 1975.

---

УДК 539.37

# О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

*И. С. Дегтярев*

*(Пермь)*

Используемые в теории пластического течения вариационные методы сформулированы на допущении о несжимаемости деформируемой среды. При решении задач механики грунтов, сыпучих сред, а также технологических вопросов пластической обработки некомпактных материалов принципиальное значение имеет учет необратимого объемного изменения.

В работах [1, 2] доказаны экстремальные и вариационные теоремы для дилатирующих жесткопластических и вязкопластических тел. Ниже для сжимаемого пластического тела выводится вариационное уравнение, эквивалентное полной системе дифференциальных уравнений.

Рассмотрим материальную среду с уравнениями состояния

$$S_{ij} = 2g_1(\sigma, \text{H})\,\overset{*}{\varepsilon}_{ij}, \quad \rho = \varphi(\sigma), \quad \overset{*}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}, \tag{1}$$

где $S_{ij}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ — соответственно компоненты девиаторов напряжений и скоростей деформаций; $g_1(\sigma, H)$, $\varphi(\sigma)$ — функции материала; $\rho$ — плотность среды; H — интенсивность скоростей деформаций сдвига; $\sigma$ — среднее напряжение.

В работе [2], согласно принципу возможного изменения деформированного состояния, установлено, что истинные скорости перемещений $v_i$ частиц сжимаемой среды сообщают минимальное значение функционалу

$$\Phi = \int \left[ \int_0^{H} g_1(\sigma, H)\, H dH - \frac{\sigma}{\rho} \rho_{,i} v_i \right] d\omega - \int p_i v_i dS_p \tag{2}$$

с неголономным условием связи

$$\rho_{,i}\, v_i + \rho v_{i,i} = 0, \tag{3}$$

где $p_i$ — заданные поверхностные нагрузки на части поверхности тела $S_p$; $\omega$ — фиксированный объем тела.

В [2] доказано достаточное условие минимальности функционала $\Phi$.

Задачу отыскания условного минимума функционала (2) с уравнением связи (3) сведем к задаче поиска безусловного экстремума. Для этого рассмотрим полный функционал

$$\Phi^* = \Phi + \int \theta\, (\rho v_i)_{,i}\, d\omega, \tag{4}$$

где $\theta$ — неопределенный множитель Лагранжа.

В работе [1] при доказательстве экстремальных теорем пластичности сжимаемых сред сформулирован принцип максимума скорости диссипации энергии при гидростатическом нагружении: при фиксированном значении объемной деформации $e$ (плотности) тела для любого данного значения скорости объемного изменения $\dot{\varepsilon}$ имеет место неравенство

$$(\sigma - \sigma^0)\dot{\varepsilon} \geqslant 0, \quad \dot{\varepsilon} = \psi_{,\sigma}\dot{\sigma}, \quad e = \psi(\sigma),$$

где $\sigma$ — действительное значение гидростатического давления, соответствующее данному значению $\dot{\varepsilon}$; $\sigma^0$ — любое возможное значение среднего напряжения, удовлетворяющее неравенству $e - \psi(\sigma^0) \geqslant 0$.

Основываясь на приведенной формулировке принципа максимума, вычислим при фиксированной плотности первую вариацию функционала $\Phi^*$ (варьируется деформированное состояние и множитель Лагранжа)

$$\delta\Phi^* = \int \Big[ 2g_1(\sigma, H)\, \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \delta \overset{*}{\varepsilon}_{ij} - \frac{\sigma}{\rho} \rho_{,i} \delta v_i + (\rho v_i)_{,i}\, \delta\theta + \theta\, (\rho_{,i} \delta v_i + \rho \delta v_{i,i}) \Big] d\omega - \int p_i \delta v_i dS_p = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) — условие стационарности функционала $\Phi^*$.

Известно [2], что соответствующие функционалу (4) уравнения Эйлера—Лагранжа представляют собой уравнения равновесия (без массовых сил), записанные с учетом (1), и условие сплошности среды, а множитель $\theta$ по физическому смыслу есть $\sigma/\rho$.

Учитывая равенство $\theta = \sigma/\varphi(\sigma)$, из (5) после некоторых преобразований находим

$$\delta\Phi^* = \int \left[ 2g_1(\sigma, H)\, \overset{*}{\varepsilon}_{ij} \delta \overset{*}{\varepsilon}_{ij} + \sigma\delta\varepsilon + (\varphi_{,i} v_i + \varphi\varepsilon) \left( \frac{\varphi - \sigma\varphi_{,\sigma}}{\varphi^2} \right) \delta\sigma \right] d\omega - \int p_i \delta v_i dS_p = 0, \quad \varepsilon = v_{i,i}, \quad \delta\theta = \frac{\varphi - \sigma\varphi_{,\sigma}}{\varphi^2}\delta\sigma. \tag{6}$$

Применяя к (6) прямые методы вариационного исчисления, можно получить распределение полей $v_i$, $\sigma$ в объеме сжимаемого тела.

Для численной реализации вариационного уравнения (6) можно воспользоваться методами [3, 4].

*Поступила 10 VIII 1976*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Дегтярев И. С.** О разрывах напряжений и экстремальных теоремах для сжимаемого пластического тела.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
2. **Дегтярев И. С.** Вариационный принцип в статике сжимаемого пластического тела.— В кн.: Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Вып. 2. Тула, изд. Тульск. политехн. ин-та, 1974.
3. **Одиноков В. И.** О приближенном методе решения задач пластичности.— ПМТФ, 1974, № 1.
4. **Качанов Л. М.** О вариационных методах решения задач теорий пластичности.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.

---

УДК 539.374

# УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА, НАГРУЖЕННОГО ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

*А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин*

*(Воронеж)*

Исследованию устойчивости идеально пластических, упругопластических и упрочняющихся упруговязкопластических тел при больших докритических деформациях посвящены работы [1—4]. Решенные в указанных работах задачи относятся к устойчивости систем,в которых однородные поля напряжений и деформаций возникают в начальном состоянии. В [5] исследована устойчивость упругой толстостенной сферической оболочки, нагруженной внешним давлением при больших докритических деформациях.

Ниже рассмотрена устойчивость осесимметричного шара из упругопластического материала, подвергающегося большим пластическим деформациям.

Система уравнений для описания поведения упругопластического тела при конечных деформациях принимается в виде [4].

Для сферы с внешним давлением $q$ связь между геометрическими размерами в докритическом состоянии с учетом несжимаемости аналогична связи, принятой в работе [5]:

$$
(1) \quad a = \lambda_a^0; \qquad a^{03} - a^3 = b^{03} - b^3; \quad Q(r) = \frac{r^0}{r} = \left[1 + (1-\lambda)^3 \left(\frac{a^0}{r}\right)^3\right]^{1/3},
$$

$$
2\hat{\varepsilon}_1^1 = 1 - Q^{-4}; \quad 2\hat{\varepsilon}_2^2 = 2\hat{\varepsilon}_3^3 = 1 - Q^2;
$$

$$
\varepsilon_j^i = 0; \; i \neq j,
$$

где $a^\bullet$, $b^0$, $r^0$, $a$, $b$, $r$ — размеры сферы, полости и произвольного радиуса внутри тела до и после деформации; $\hat{\varepsilon}_i^j$ — компоненты тензора полных деформаций.