рактер. Показано, в частности, что перед основным ИД, скорость которого определяется упругими характеристиками жидкости и материала трубы, со скоростью звука в жидкости распространяется предвестник с амплитудой на порядок меньше амплитуды ИД.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.— М.: Недра, 1975.
2. **Barez F., Goldsmith W., Sackman J. L.** Longitudinal waves in liquid-filled tubes.— Int. J. Mech. Sci., 1979, v. 21, p. 213.
3. **Жуковский И. Е.** О гидравлическом ударе в водопроводных трубах.— М.— Л.: Гостехиздат, 1949.
4. **Лейбензон Л. С.** Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1955, т. 3.
5. **Szumowski A.** Pressure wave pattern in a liquid filling an elastic pipe.— Arch. Mech., 1978, v. 30, N 4—5.
6. **Гераськин А. С., Корчагин В. И., Ловля С. А.** Экспериментальное исследование взрыва в волноводе.— ДАН СССР, 1970, т. 195, № 2.
7. **Krause N., Goldsmith W., Sackman J. L.** Transients in tubes containing liquids.— Int. J. Mech. Sci., 1977, v. 19, p. 53.
8. **Магдалинская И. В., Розенберг Г. Д.** Экспериментальное исследование затухания волны давления при гидравлическом ударе.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 4.
9. **Новиков С. А., Погорелов А. П., Синицын В. А.** Расчет взрывного нагружающего устройства для создания импульса давления заданных параметров.— ФГВ, 1980, № 6.
10. **Бодренко С. И., Гердюков Н. И. и др.** Применение кварцевых датчиков давления для исследования ударно-волновых процессов.— ФГВ, 1981, № 3.
11. **Иванов А. Г., Хохлов Н. П. и др.** Исследование формирования волн в стержнях при коротком ударе.— Акуст. журн., 1977, т. XXIII, вып. 2.
12. **Беляев Н. М.** Сопротивление материалов.— М.: Физматгиз, 1962.

Поступила 9/VII 1985 г.

УДК 532.529

РАСЧЕТ МЕЖФАЗНОЙ СИЛЫ В МОНОДИСПЕРСНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ СРЕДЕ С ИДЕАЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ ФАЗОЙ И ХАОТИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВКЛЮЧЕНИЙ

А. Е. Крошилин, В. Е. Крошилин

(*Москва*)

Для расчета движения пузырей относительно жидкости необходимо знать силу, действующую на них. В дисперсной среде взаимодействие включений через несущую фазу может существенно влиять на силу, действующую на включения, причем эта сила зависит от микроструктуры смеси [1]. Предельные микроструктуры: регулярная, когда расстояния между соседними включениями примерно одинаковы, и хаотическая, когда включения расположены хаотически.

Вычисление межфазной силы в пузырьковой смеси в частном случае (при отсутствии градиента параметров течения) сводится, как показано, например, в [2], к расчету присоединенной массы пузыря в смеси. Присоединенная масса включений в дисперсной среде выводилась при различных предположениях во многих работах, обзор и анализ которых дан в [2].

Межфазная сила в пузырьковой жидкости в общем случае с учетом градиентов параметров течения исследована существенно меньше. Подробный анализ при этом проведен лишь для смесей, имеющих регулярную структуру,— в [1] методом ячеек детально изучены все слагаемые межфазной силы и дан соответствующий обзор литературы.

В настоящей работе излагается методика расчета методом осреднения микроуравнений межфазного взаимодействия в смесях, имеющих хаотическую структуру. В отличие от [2] рассматривается случай, когда характеристики дисперсной среды меняются вдоль оси z. Изучено влияние градиентов средних параметров смеси на межфазную силу.

1. Основные допущения. Допустим, что несущая среда идеальная, а пузыри имеют сферическую форму. В [3] показано, что для пузырей умеренных размеров эти допущения оправданны. Кроме того, предполагаются монодисперсность среды [1], потенциальность течения несущей фазы и хаотичность расположения центров пузырей (центры пузырей располагаются случайным образом) [2, 4]. Для простоты ограничимся одномерной постановкой задачи: средние параметры среды меняются только вдоль оси z и не зависят от других координат (x, y).

Среднюю силу, действующую на выделенный (пробный) пузырь, определим, осредняя силу, действующую на пузыри при конкретном их расположении относительно друг друга. Для расчета силы, действующей на пробный пузырь при конкретном расположении других пузырей, необходимо знать скорости движения пузырей, которые зависят от сил. В общей постановке решить эту задачу не удается. Поэтому в настоящей работе используется приближенный метод для определения скоростей движения пузырей, после чего рассчитывается средняя сила. В [2] показано, что физически оправдана гипотеза о постоянстве скорости движения пузырей относительно жидкости при любых их расположениях. Она качественно верно отражает основные закономерности движения пузырей в несущей среде, в частности описывает: эффект более быстрого перемещения двух пузырей, движущих друг за другом, по сравнению с перемещением одиночного пузыря, эффект смещения вектора скорости пары пузырей в сторону к линии, соединяющей их центры, по сравнению с вектором скорости одиночного пузыря (эффект крыла).

Следуя [2], z-компоненту скорости движения i-го пузыря Δv относительно жидкости при конкретном расположении других включений рассчитаем по формуле $\Delta v = -2k/R^3$, где k — коэффициент при присоединенной функции Лежандра 1-го рода $P_1^0(\cos\theta)$ в разложении потенциала течения несущей среды около i-го пузыря. Легко показать, что данное определение для случая движения одиночного пузыря в безграничной жидкости совпадает с обычным определением. Проекции скорости на оси x, y определяются аналогично.

2. Основные уравнения. Средняя межфазная сила рассчитывается следующим образом. Строится с необходимой точностью профиль скорости жидкости при конкретном расположении пузырей. По известному профилю скорости определяется распределение давления по поверхности фиксированного пузыря и рассчитывается сила, действующая на него. Осреднением силы, действующей на пузырь, по положению пузырей получается средняя межфазная сила.

Потенциал течения жидкости φ вокруг пузырей удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.1}$$

для решения которого необходимо задать граничные условия. На границе Γ_0 области, занятой смесью G, естественно задать нормальную составляющую скорости v^0

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} = \mathbf{n}\mathbf{v}^0\ (\Gamma_0) \tag{2.2}$$

($\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности).

На границе пузырей Γ_i (i — номер пузыря, $i = 1, \ldots, N$, N — количество пузырей в смеси) условие непротекания записывается как

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = \mathbf{n}\mathbf{v}_2^i \tag{2.3}$$

(v_2^i — скорость движения i-го пузыря). Векторы v_2^i подбираются из условия, чтобы скорость движения пузыря относительно жидкости была равна $\Delta v(\mathbf{r})$ — заданной плавной функции координат.

Уравнение (2.1) с граничными условиями (2.2) и (2.3) с точностью до несущественной константы определяет потенциал течения жидкости; решение его будем строить путем последовательных приближений, отражая возмущения от одних пузырей относительно других и границы области [2, 5].

Первое приближение φ^1 представляем в виде

$$\varphi^1 = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^1, \tag{2.4}$$

где φ_i^1 — потенциал течения жидкости при движении i-го пузыря в безграничной среде.

Второе приближение φ^2 находим из условия, чтобы сумма $\varphi^1 + \varphi^2$ удовлетворяла (2.1) и условиям на границе Γ_0 области G, занятой смесью. Заметим, что в силу линейности задачи и представления (2.4) потенциал

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2.$$

Здесь φ_0^2 не зависит от положений пузырей, а φ_i^2 зависит от положения одного i-го пузыря.

Третье приближение φ^3 отыскивается аналогично первому:

$$\varphi^3 = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^3.$$

Причем потенциал $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2 + \varphi^3$ удовлетворяет граничным условиям на поверхности i-го пузыря.

Следующие приближения строятся аналогично. Уравнения, которым удовлетворяют φ_i^1, φ^2 и приближения, приведены в [2].

Точное решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) дается формулой

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k. \tag{2.5}$$

Построенный таким способом потенциал течения жидкости около двух движущихся пузырей, как показано в [5], быстро сходится к точному потенциалу при любых (включая случай соприкосновения) расстояниях между включениями.

Легко показать, что среди слагаемых (2.5) есть такие, которые не зависят от положений пузырей (φ_0^2), а зависят от положения одного пузыря $(\varphi_i^1, \varphi_i^2)$, от положений двух пузырей (такие слагаемые есть в φ^3) и т. д. Поэтому (2.5) для потенциала удобно переписать:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \sum_{l=0}^{N} \chi_l^{(}(\mathbf{r}); \tag{2.6}$$

$$\chi_l^0 = \sum_{w_{i1,\ldots,il}^N} \chi_l(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{i1}, \ldots, \mathbf{r}_{il}). \tag{2.7}$$

Суммирование в (2.7) ведется по всем сочетаниям $w_{i1,\ldots,il}^N$ l пузырей из N. Функция $\chi_l(\mathbf{r}|\mathbf{r}_{i1}, \ldots, \mathbf{r}_{il})$ зависит от положений l пузырей с номерами $i1, \ldots, il$. Величину χ_l^v будем называть l-частичным слагаемым потенциала.

Сила, действующая на пузырь, помещенный в идеальную невязкую несущую среду, определяется распределением давления вокруг пузыря и может быть рассчитана по формуле

$$F = -\int_{\Gamma_1} p\mathbf{n}ds, \tag{2.8}$$

где Γ_1 — поверхность пробного пузыря; p — давление в жидкости.

Давление находится из интеграла Коши — Лагранжа [6]

$$p = \rho f(t) + \rho U - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{(\nabla\varphi)^2}{2}. \tag{2.9}$$

Здесь φ — потенциал течения жидкости; t — время; $f(t)$ — функция времени; U — потенциал массовой силы, в качестве которой рассматривается сила тяжести.

Подставим (2.9) в (2.8). Первое слагаемое (2.9) дает нулевой вклад, второе — силу Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g e_z$ (R— радиус пузыря, g — ускорение свободного падения, e_z — единичный орт оси z).Остальные слагаемые силы F зависят от положения всех пузырей, поэтому выделим один пузырь (пусть он имеет номер один) и осредним силу по положениям всех остальных пузырей, т. е. умножим на функцию распределения f_N и проинтегрируем по пространству состояний. Окончательное выражение для средней силы:

(2.10)

$$\langle F\rangle = F_A + F_1 + F_2 = F_A + \rho\left\langle \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\theta ds\right\rangle + \frac{\rho}{2}\left\langle \int\limits_{\Gamma_1} (\nabla\varphi)^2\cos\theta ds\right\rangle,$$

где $\langle\,\rangle$ — осреднение по положению пузырей; θ — угол между радиусом-вектором в точку, где определяется потенциал, и осью z.

С учетом выделенного первого пузыря формулы (2.6) и (2.7) перепишем:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \sum_{l=0}^{N-1} \chi_{lf}^0(\mathbf{r}); \tag{2.11}$$

$$\chi_{lf}^0 = \sum_{w^N_{i1,\ldots,il}} \chi_{lf}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_{i1}, \ldots, \mathbf{r}_{il}). \tag{2.12}$$

Здесь функция $\chi_{lf}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_1|\mathbf{r}_{i1}, \ldots, \mathbf{r}_{il})$ содержит все слагаемые полного потенциала, зависящие от положений $i1, \ldots, il$ пузырей, и неважно, зависят они или нет от положения первого (пробного) пузыря.

3. Расчет слагаемого F_1 в формуле (2.10). Слагаемое F_1 с учетом того, что $N \gg 1$, представим в виде

$$F_1 = \rho\left\langle \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\theta ds\right\rangle = \rho\sum_{l=0}^{N}(\alpha_2)^l\frac{1}{l!}\left(\frac{3}{4\pi R^3}\right)^l \times \tag{3.1}$$
$$\times \int\limits_{r_2}\ldots\int\limits_{r_{l+1}}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial t}\chi_{lf}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{l+1}) \times$$
$$\times f_f(\mathbf{r}_1\,|\,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{l+1})\cos\theta ds d^3r_2 \ldots d^3r_{l+1},$$

где α_2 — объемная концентрация пузырей; $f_f(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{l+1})$ — l-частичная функция распределения центров пузырей [7] при условии, что первый пузырь находится в точке $\mathbf{r}_1$. Представление (3.1) правильно отражает разложение исходного интеграла в ряд по степеням α_2 в случае, когда существуют конечные пределы интегралов в правой части (3.1) при $G \to \infty$ и $\alpha_2 \to 0$ (G — объем, занятый смесью).

Для сред с регулярной структурой эти интегралы расходятся [2]. Однако для сред с хаотической структурой, средние характеристики которой не меняются вдоль оси z, в [2] проведены оценки $\partial\chi_{lf}/\partial t$ и доказано, что интегралы в правой части (3.1) при $l \geqslant 2$ сходятся и конечны, что без изменения проходит и в рассматриваемом случае. Будем рассчитывать силу с точностью до α_2, для чего достаточно вычислить интеграл от $\partial\chi_{0f}/\partial t$ и $\partial\chi_{1f}/\partial t$. Для этого нужно знать все приближения в описанной итерационной схеме, но с учетом лишь двух пузырей. Фактически нужно точно решить задачу о движении двух пузырей. Можно показать [2], что вклад от третьего и выше приближений легко найти численно, непосредственно по формуле (3.1). Вклад от первых двух приближений оценить намного сложнее. Это связано с тем, что, начиная с третьего приближения, потенциал убывает не медленнее, чем квадруполи, а φ^1 содержит дипольные составляющие. Поэтому вклад от $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2$ удобно рассмотреть отдельно. Для удобства проведения всех осреднений, не теряя общности, будем считать, что $\mathbf{r}_1 = 0$, хотя $\mathbf{v}_2^i \neq 0$. Пусть система координат будет связана с границей Γ_0 рассматриваемой области. Введем обозначения:

$$A_0^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad A_1^i = \frac{\partial A_0^i}{\partial z}, \quad A_2^i = \frac{\partial^2 A_0^i}{(\partial z)^2}, \quad A_3^i = \frac{\partial^3 A_0^i}{(\partial z)^3}, \quad A_{2x}^i = \frac{\partial^2 A_0^i}{\partial z \partial x}, \quad A_{2y}^i = \frac{\partial^2 A_0^i}{\partial z \partial y}.$$

Тогда из алгоритма построения φ получим

$$\varphi^1 + \varphi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{R^3 \Delta v(\mathbf{r}_i, t)}{2} A_1^i + \varphi^2; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial(\varphi^1 + \varphi^2)}{\partial t} = \frac{R^3}{2} \sum_{i=1}^{N} \left\{ A_1^i \left(\frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} + \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} v_{2z}^i(\mathbf{r}_i, t) \right) - \right.$$
$$\left. - \Delta v(\mathbf{r}_i, t) \left[A_2^i v_{2z}^i + A_{2x}^i v_{2x}^i + A_{2y}^i v_{2y}^i \right] \right\} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} \tag{3.3}$$

$\left(v_2^i \left(v_{2x}^i, v_{2y}^i, v_{2z}^i\right)\right.$ — скорость движения i-го пузыря).

Непосредственное осреднение формулы (3.3) по положениям пузырей невозможно, так как φ^1 убывает недостаточно быстро и соответствующие интегралы будут расходиться. Поэтому при осреднении (3.3) применим специальный прием [2], который состоит в следующем. Величину $\partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$ можно связать со средними параметрами жидкости. Тогда разница описывается сходящимися интегралами, а в конечные уравнения войдут средние параметры жидкости. Для этого используем формулу Грина [8]

$$\int\limits_V (\psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \psi)\, d^3 V = \int\limits_S \left(\psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d^2 s, \tag{3.4}$$

где V — произвольная область; S — ее граница; ψ и Φ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

В качестве V возьмем G за вычетом объема пробного пузыря, в качестве ψ и Φ — $\psi_1 = \partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$ и $\Phi_1 = \cos\theta/|\mathbf{r}|^2$ соответственно. Тогда после несложных преобразований, учитывая, что $\Delta A_0^i = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, $\Delta A_1^i = -4\pi\partial[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)]/\partial z$ [9], имеем

$$\int\limits_{\Gamma_0} \left[\psi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \Phi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right] d^2 s = \int\limits_{\Gamma_1} \psi_1 2 \frac{\cos\theta}{R^3} d^2 s + \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\cos\theta}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} d^2 s + p_1; \tag{3.5}$$

$$p_1 = 4\pi \frac{R^3}{2} \sum_{i=2}^{N} p_{1i}, \tag{3.6}$$

$$p_{1i} = A_2^i(0) k_1^i + \Delta v(\mathbf{r}_i, t) \left[v_{2z}^i A_3^i(0) + v_{2x}^i A_{3x}^i(0) + v_{2y}^i A_{3y}^i(0) \right],$$

$$k_1^i = \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} + \frac{\partial \Delta v(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} v_{2z}^i.$$

Первое слагаемое в правой части (3.5) пропорционально вкладу $\varphi^1 + \varphi^2$ в силу F за счет $\partial\varphi/\partial t$, т. е. пропорционально вычисляемой величине.

Однако в (3.5) входят несколько, вообще говоря, неизвестных величин. Поэтому преобразуем (3.5) к более удобному виду. Это можно сделать, применяя еще 2 раза формулу (3.4): первый раз для объема $V = G_1$ (объем пробного пузыря), используя в качестве ψ $\psi_1 = \partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$, а в качестве Φ — $\Phi_2 = |\mathbf{r}| \cos\theta$, второй раз при таком расположении пузырей, что точка наблюдения (начало координат) находится в жидкости для объема $V = G$, используя в качестве ψ $\psi_2 = \partial(\varphi^1 + \varphi^2)/\partial t$, а в качестве Φ — $\Phi_1 = \cos\theta/|\mathbf{r}|^2$. Проведя соответствующие вычисления и осреднив их по положениям пузырей, формулу (3.5) приведем к виду

$$
(3.7)\quad \frac{3}{R^3}\left\langle \int_{\Gamma_1} \psi_1 \cos\theta d^2s \right\rangle = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}(\langle\psi_2\rangle_l - \langle\psi_1\rangle)\, d^2s + 4\pi\frac{R^3}{2}\int_G n_1[p_{12}g\,(|\mathbf{r}_2|) -
$$

$$
-(p_{12})_l g_l(|\mathbf{r}_2|)]\, d^3r_2 + 4\pi\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 \right\rangle - \frac{4\pi}{R^3}\frac{R^3}{2}k_1^1,
$$

где индекс l соответствует случаю, когда точка наблюдения находится в жидкости; n_1 — число пузырей в единице объема смеси; $g(|\mathbf{r}_2|)$ — бинарная коррелятивная функция [7]; $g_l(|\mathbf{r}_2|)$ — отношение вероятности нахождения пузыря на расстоянии $|\mathbf{r}_2|$ от точки наблюдения (когда в точке наблюдения находится жидкость) к n_1.

Величины p_{12} и $(p_{12})_l$ описываются одной формулой (3.6), но отличаются друг от друга, так как в них входит скорость пузырей, которая зависит от того, есть ли в точке наблюдения пузырь или нет. Скорость v_2^i обусловлена, вообще говоря, положениями всех пузырей. Однако интеграл по области G в правой части (3.7) уже дает поправку порядка α_2 в силу. Поэтому подынтегральная функция и скорость пузыря вычисляются с точностью до $(\alpha_2)^0$. Можно показать, что в этом случае при расчете скорости v_2^i, входящей в $(p_{12})_l$, нужно учитывать только скорость несущей среды и скорость проскальзывания Δv второго пузыря относительно несущей среды, а при расчете v_2^i, входящей в p_{12}, нужно учитывать скорость несущей среды, скорость проскальзывания второго пузыря относительно несущей среды и добавку в скорость второго пузыря, наведенную первым пузырем. Вклад остальных пузырей в скорость движения второго пузыря при осреднении по их положениям оказывается порядка α_2 и может не учитываться.

К сожалению, даже такое упрощение задачи не позволяет аналитически вычислить скорость второго пузыря, входящую в p_{12}, так как для этого необходимо точно решать задачу о движении двух пузырей в безграничной жидкости; решение ее, найденное методом последовательных приближений, представляется в виде бесконечного ряда, который, как уже отмечалось выше, быстро сходится. Поэтому в настоящей работе скорость второго пузыря вычисляется с учетом только первого члена такого ряда.

Входящие в (3.7) величины $g(|\mathbf{r}_2|)$ и $g_l(|\mathbf{r}_2|)$ вычисляются с точностью до $(\alpha_2)^0$, т. е. для случая хаотического расположения пузырей они рассчитываются по формулам [4]

$$
g(|\mathbf{r}_2|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\mathbf{r}_2| \leqslant 2R, \\ 1 & \text{при } |\mathbf{r}_2| > 2R, \end{cases} \qquad g_l(|\mathbf{r}_2|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\mathbf{r}_2| \leqslant R, \\ 1 & \text{при } |\mathbf{r}_2| > R. \end{cases}
$$

Наконец, легко показать, что первое слагаемое правой части (3.7) имеет порядок $1/L$ (L — характерный размер области G) и может не учитываться.

Используя все перечисленные упрощения и проведя довольно громоздкие вычисления, формулу (3.7) запишем в виде

$$
(3.8)\quad \frac{3}{R^3}\left\langle \int_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi^1+\varphi^2)\cos\theta d^2s \right\rangle = 4\pi\left\{\frac{1}{40}\alpha_2\Delta v\frac{\partial}{\partial z}\Delta v - \right.
$$

$$
\left. -\frac{3}{40}\Delta v\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2\Delta v) + \left\langle\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right\rangle_l - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta v(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial\Delta v(\mathbf{r},t)}{\partial z}\right)\langle v_{2z}^1\rangle\right\}.
$$

После того как мы учли отдельно вклад в F_1 (2.10) от $\varphi^1+\varphi^2$, вклад F_{1d} от остальных членов ряда, дающих точный потенциал φ, учитывается непосредственно с использованием разложения (3.1):

$$
F_{1d} = \alpha_2\frac{3}{4\pi R^2}\int_{\Gamma_1}\int_{r_2}\frac{\partial}{\partial t}\chi_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)f_1(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)\cos\theta d^2s d^3r_2.
$$

Аналитически вычислить потенциал χ_1 не удается (он представляется в виде бесконечного ряда). Как уже указывалось выше, можно ограничиться в разложении потенциала первым главным членом φ после учтенных $\varphi^1 + \varphi^2$. В результате соответствующих вычислений вклад этого члена в силу, действующую на пузырь, равен нулю. Таким образом, формула (3.8) с хорошей точностью описывает F_1.

В (3.8) входит величина $\langle \partial\psi_2/\partial z \rangle = \langle \partial^2(\varphi^1 + \varphi^2)/(\partial z \partial t) \rangle_l$, которую удобно выразить через производные от средней скорости жидкости $\langle \partial v_{lz}/\partial t \rangle_l$. Точное выражение для $\langle v_{lz} \rangle$ имеет вид

$$\langle v_{lz}\rangle_l = \int\limits_{r_1} \ldots \int\limits_{r_N} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi^1 + \varphi^2 + \ldots) f_N(0 \mid \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\, d^3r_1 \ldots d^3r_N.$$

Используя (2.6) и проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были при выводе (3.1), покажем, что при вычислении скорости жидкости с точностью до $(\alpha_2)^1$ в (3.10) достаточно учесть лишь одночастичное взаимодействие; χ_1^0 появляется в φ^1 в первом приближении, а также за счет границы во всех последующих приближениях. Однако вклад от одночастичного взаимодействия, которое появляется в приближениях выше первого, имеет порядок $1/L$ и, следовательно, может не учитываться при $L \to \infty$. Таким образом, выполняется равенство

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 \right\rangle_l = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} v_{lz} \right\rangle_l. \tag{3.9}$$

При построении замкнутых моделей двухфазных сред сила должна выражаться через производные от средних величин, которые, вообще говоря, не равны средним значениям от производных [1]. Поэтому полезно вывести соотношение, связывающее величины $\partial\langle v_{lz}\rangle_l/\partial t$ и $\langle \partial v_{lz}/\partial t\rangle_l$. Из (3.2) имеем

$$v_{lz} = \sum_{i=1}^{N} \frac{R^3 \Delta v(\mathbf{r}_i, t)}{2} A_1^i + \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}. \tag{3.10}$$

Используя (3.10), непосредственно вычисляем $\langle \partial v_{lz}/\partial t\rangle_l$ и $\partial \langle v_{lz}\rangle_l/\partial t$ и окончательно получаем

$$\left\langle \frac{\partial v_{lz}}{\partial t} \right\rangle_l - \frac{\partial \langle v_{lz}\rangle_l}{\partial t} = -\langle v_{2z}\rangle \alpha_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial z} + \frac{3}{5} \frac{\partial \Delta v \langle v_{2z}\rangle \alpha_2}{\partial z} + \Delta v \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Из (3.8), (3.9), (3.11) и уравнений неразрывности для пузырей находим выражение для слагаемого F_1 в формуле (2.10):

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \left\{ \frac{1}{40} \alpha_2 \Delta v \frac{\partial \Delta v}{\partial z} - \frac{3}{40} \Delta v \frac{\partial(\alpha_2 \Delta v)}{\partial z} + \frac{\partial \langle v_{lz}\rangle_l}{\partial t} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{5} \frac{\partial(\Delta v \langle v_{2z}\rangle \alpha_2)}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \langle v_{2z}\rangle \frac{\partial \Delta v}{\partial z} \right) \right\}. \tag{3.12}$$

4. Расчет слагаемого F_2 в формуле (2.10). Слагаемое F_2 полной силы $\langle F \rangle$ определяется согласно (2.10) выражением

$$F_2 = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Gamma_1} \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle \cos\theta\, d^2s. \tag{4.1}$$

Непосредственное использование (4.1) невозможно, так как $\nabla\varphi$, вообще говоря, расходится при увеличении размера области G и постоянной объемной концентрации включений. Поэтому, как сделано выше, необходимо выделить расходящуюся часть из (4.1) и выразить ее через средние характеристики несущей среды. Для чего используем формулу

$$\langle (\nabla\varphi)^2 \rangle = \langle \nabla\varphi \rangle^2 + \langle (\nabla\varphi')^2 \rangle, \tag{4.2}$$

где

$$\nabla\varphi' = \nabla\varphi - \langle \nabla\varphi \rangle.$$

Можно показать, что второе слагаемое в правой части (4.2) с точностью до $(\alpha_2)^1$ легко выражается через сходящиеся интегралы от одночастичных слагаемых потенциала

$$\langle(\nabla\varphi')^2\rangle = \int\limits_{r_2} (\nabla\chi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2) \frac{\alpha_2(\mathbf{r}_2)}{\frac{4}{3}\pi R^3} g(|\mathbf{r}_2|)\, d^3r_2. \tag{4.3}$$

При вычислении первого слагаемого в правой части (4.2) нужно вычислить средний градиент от потенциала, наведенного другими пузырями. При этом, как и при вычислении F_1, вклад от квадрупольных членов (они убывают как $1/|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1|^4$) и от более высоких членов сходится и может быть непосредственно вычислен. Дипольные члены убывают как $1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^3$, и поэтому вклад от них расходится при увеличении области G. Такие дипольные расходящиеся члены появляются только в первых двух приближениях φ^1, φ^2 к точному потенциалу. Поэтому их вклад нужно выражать через средние параметры жидкости. Используя для этого формулу (3.4), находим

$$\left\langle\frac{\partial(\varphi^1+\varphi^2)}{\partial x_n}\right\rangle = \langle v_{lx_n}\rangle + \frac{R^3}{2}\int\limits_{r_2} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Delta v(\mathbf{r}_2, t) A^2_{2x_n}\alpha_2(\mathbf{r}_2)(g_l(|\mathbf{r}_2|) -$$

$$- g(|\mathbf{r}_2|))\, d^3r_2 + \frac{R^3}{2}\Delta v(\mathbf{r}_1, t) A^1_{2x_n},$$

Проведя соответствующие (довольно сложные) вычисления, получим выражения для $\langle\partial(\varphi^1+\varphi^2)/\partial z\rangle$ и $\langle\partial(\varphi^1+\varphi^2)/\partial y\rangle = \langle\partial(\varphi^1+\varphi^2)/\partial x\rangle$.

Для вычисления вклада в $\langle\partial\varphi/\partial x_n\rangle$ от следующих приближений к точному потенциалу необходимо численно решить задачу о движении двух пузырей в безграничной жидкости. Ограничимся учетом первого после φ^1 и φ^2 приближения в точный потенциал. В отличие от вывода соотношения для F_1 (п. 3) это приближение дает нулевой вклад в F_2. Окончательная формула (с учетом указанного первого поправочного приближения) имеет вид

$$\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\rangle\Big|_{\Gamma_1} = v_{lz}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} + \frac{\Delta v(\mathbf{r}_1, t)}{2}(3\cos^2\alpha - 1) - \tag{4.4}$$

$$- \frac{3}{2}\frac{\partial(\alpha_2\Delta v)}{\partial z} R\cos\alpha\sin^2\alpha,$$

$$\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle\Big|_{\Gamma_1} = \frac{3}{2}\Delta v(\mathbf{r}_1, t)\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta + \frac{3}{2}\frac{\partial(\alpha_2\Delta v)}{\partial z} R\cos\beta\sin\alpha\cos^2\alpha,$$

где R, α, β — координаты точки на поверхности пузыря, в которой определяется скорость в сферической системе координат с началом в центре первого пузыря и осью, направленной по $\Delta\mathbf{v}$.

Соотношения (4.4) позволяют вычислить вклад в F_2 от первого слагаемого формулы (4.2)

$$\int\limits_{\Gamma_1} \langle\nabla\varphi\rangle^2 \cos\theta\, d^2s = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_2\Delta v)\left(-\frac{6}{5}\langle v_{lz}\rangle_l + \frac{3}{5}\Delta v\right). \tag{4.5}$$

Для расчета вклада в F_2 от второго слагаемого формулы (4.2) также будем подставлять в (4.2) первое приближение к точному решению задачи о движении двух пузырей. После довольно громоздких вычислений запишем

$$\int\limits_{\Gamma_1} \langle(\nabla\varphi')^2\rangle \cos\theta\, d^2s = \frac{\pi R^3}{5}\frac{\partial}{\partial z}(\alpha_2(\Delta v)^2). \tag{4.6}$$

Окончательно из формул (2.10), (3.16), (4.1), (4.2), (4.5), (4.6) и уравнений неразрывности получим следующее выражение для средней силы, действующей на пузырь в дисперсной среде с хаотическим распределением включений:

$$(4.7)\quad \langle F\rangle = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\left[\left(\frac{d_l\langle v_{lz}\rangle_l}{dt}+g\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{d_2\langle v_{2z}\rangle}{dt}-\frac{d_l\langle v_{lz}\rangle_l}{dt}\right)m-\right.$$
$$\left.-0.6(\Delta v)^2\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}-0{,}9\alpha_2\Delta v\frac{\partial\Delta v}{\partial z}\right];$$
$$\frac{d_l}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_{lz}\rangle_l\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{d_2}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_{2z}\rangle\frac{\partial}{\partial z},\quad m=1.$$

Первое слагаемое в правой части (4.7) — это обычная сила Архимеда, рассчитанная по массовой силе с учетом ускорения жидкости, второе — сила присоединенной массы, действующая на пузырь. Она совпадает с силой, действующей на одиночный пузырь в безграничной жидкости. Напомним, что при выводе формулы (4.7) использовались только первые после φ^1 и φ^2 приближения к точному решению задачи о движении двух пузырей. Присоединенная масса точно вычислена в [2], где получено $m = 1 + 0{,}092\,\alpha_2$. Третий и четвертый члены в (4.7) дают линейные по объемной концентрации слагаемые силы, обусловленные коллективными взаимодействиями включений. Эти слагаемые зависят от производных средних величин и не имеют аналогов в выражении для силы, действующей на одиночный пузырь.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
2. **Крошилин А. Е., Крошилин В. Е.** Расчет присоединенной массы сферических частиц в дисперсной среде.— ПМТФ, 1984, № 5.
3. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
4. **Головин А. М., Чижов В. Е.** К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе.— ПММ, 1977, № 6.
5. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947.
6. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976, т. 2.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1977.
9. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.

Поступила 5/II 1985 г.

УДК 532.7

О СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРОВ ВЫСОКОПОЛИМЕРОВ С ИХ СРЕДНЕСТАТИСТИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

В. И. Попов

(*Новосибирск*)

Вопросы качества переработки полимеров, например, методами экструзионной технологии, получения высокомодульных полимерных материалов во многом зависят от наличия контролируемой связи между внешними параметрами переработки полимерных сред и их внутренней микроструктурой.

В данной работе решение вопроса ищется для концентрированных растворов высокополимеров (КРВ) с использованием их структурно-феноменологической модели [1, 2]. В основе модели лежат структурные представления об однородной, изотропной флуктуационной сетке (рис. 1), отражающей специфику строения КРВ, заключающиеся в том, что в однорелаксационном приближении концентрированный раствор полимера в низкомолекулярном растворителе рассматривается как совокупность статистически распределенных эффективных сеточных узлов (сегментов) трения с растворителем, пространственно сочлененных между собой эластичными субцепями с кинетической жесткостью. Под кинетической