

УДК 539.374

## АДИАБАТИЧЕСКИЙ НАГРЕВ МАТЕРИАЛА ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Г. М. Севастьянов, А. А. Буренин

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,  
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия  
E-mails: akela.86@mail.ru, burenin@iacp.dvo.ru

Исследуется кручение несжимаемого кругового цилиндра с закрепленными торцами, выполненного из полимерного материала, относительно оси симметрии с учетом адиабатического нагрева. Консервативный механизм деформирования определяется упругим потенциалом Муни — Ривлина, диссипативный — пластическим потенциалом Треска — Сен-Венана. При решении задачи используется мультипликативное разделение меры полных деформаций Альманси на упругую и пластическую составляющие. Предполагается, что локальное изменение температуры материала обусловлено только пластической диссипацией. Пренебрегается температурными деформациями материала, а также упрочнением. Получено точное решение задачи при произвольной зависимости механических характеристик материала от температуры. В частности, определены осевое усилие, крутящий момент и распределение температуры в образце в зависимости от возрастающего параметра нагружения. Проведено сравнение полученного решения с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** кручение цилиндрических стержней, конечные деформации, упругопластическая задача, связанная термопластичность, температурное разупрочнение, адиабатические условия, несжимаемый материал Муни — Ривлина, условие Треска, эффект Пойнтинга.

DOI: 10.15372/PMTF20190616

**Введение.** Геометрически непротиворечивая кинематика больших упругопластических деформаций впервые предложена в работе [1] на основе предположения о соответствии каждому деформированному состоянию единственного состояния полной разгрузки, при котором в теле отсутствуют обратимые деформации. Это позволило выполнить так называемое мультипликативное разделение измеряемых в экспериментах полных деформаций на составляющие, каждая из которых в отдельности не может быть определена экспериментально. При таком подходе возникает проблема выбора объективной производной для определения тензора скорости необратимых (пластических) деформаций. Использование такого подхода позволило развить теорию упругопластического деформирования при больших деформациях [2–5]. Другие близкие подходы представлены в работах [6–11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00507 А); задача в изотермическом приближении исследована в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии ДВО РАН № 075-00414-19-00.

© Севастьянов Г. М., Буренин А. А., 2019

В [12] предложен подход, основанный на формализме термодинамики. Суть этого подхода заключается в задании составляющих полных деформаций (термодинамических параметров процесса) с использованием кинетических дифференциальных уравнений. Конкретизация источников и потоковых слагаемых в таких уравнениях в простейшем случае проведена в работе [13] и подробно описана в [14]. С использованием данного геометрически и термодинамически корректного подхода поставлен и решен ряд краевых задач теории больших упругопластических и упруговязкопластических деформаций. Точные решения некоторых из этих задач включены в [14] (см. также [15–18]). В работе [15] приведено решение связанной термомеханической задачи, в [16, 17] исследуется возможность учета вязких свойств материала на стадиях, предшествующих стадии пластического течения, на стадии разгрузки (ползучести), а также на стадии пластического течения. Также следует отметить работу [18], в которой рассмотрено изотермическое кручение кругового цилиндра. В данной работе продолжено изучение процесса деформирования при больших деформациях с учетом температуры.

Математические теории пластичности и задачи о кручении стержней при пластических деформациях приведены в [19, 20]. Простота кинематики в случае стержня с круговым профилем с закрепленными торцами и возможность определения границы между областями упругого и пластического деформирования только по результатам упругого решения делают эту задачу одной из наиболее простых для исследования среди задач с недиагональными тензорными величинами. В ряде работ предлагается решение задач о деформировании при больших деформациях в скоростях. При этом тензор скорости деформации аддитивно делится на обратимую и необратимую составляющие, для первой из которых постулируется связь с некоторой объективной производной девиатора напряжений. В работах [21–23] отмечено наличие нефизичных осцилляций решений задач о кручении и сдвиге при таком подходе с использованием производной Зарембы — Яумана. Заметим, что такая постановка задач предполагает определение поля перемещений по найденному полю скоростей, что также является нетривиальной задачей [24], особенно в геометрически нелинейном случае. При этом непрерывности скоростей и напряжений на границе между областями упругого и пластического деформирования недостаточно для того, чтобы считать задачу решенной верно (см., например, [25]). При использовании геометрически корректных теорий, основанных на мультипликативном разложении градиента деформации [1, 2], аналитические решения практически отсутствуют. Исключением является работа [26], в которой получено решение задачи кручения для цилиндра со свободными торцами. Несмотря на близость используемых моделей, сравнение результатов расчетов по ним [18, 26] затруднено, поскольку в [18] торцы полагаются закрепленными, а в [26] именно изменение длины цилиндра выбрано в качестве параметра нагружения.

Кручение является одним из наиболее простых экспериментов по деформированию, которые проводятся с целью идентификации механических параметров материалов. При этом исследование влияния неизотермичности процесса на интерпретацию результатов экспериментов затруднено (в частности, влиянием температурных эффектов объясняется образование зон локализованной деформации — полос сдвига [27]). Этим обусловлено внимание к связанной задаче упругопластического кручения. Авторам данной работы не известны какие-либо точные решения этой задачи при конечных деформациях, учитывающие нагрев материала за счет пластической диссипации и изменение его свойств. Ранее обсуждались лишь некоторые результаты численного моделирования (см., например, [28]).

**1. Определяющие соотношения.** Будем использовать определяющие соотношения, построенные в [13, 14]. Постулируются следующие условия:

— симметричные и положительно определенные тензоры  $g^e, g^p$  являются независимыми термодинамическими параметрами — мерами обратимых и необратимых деформаций соответственно;

— источник энтропии представляет собой свертку  $\sigma : \varepsilon^p$  тензора напряжений Коши  $\sigma$  и тензора скоростей пластических деформаций  $\varepsilon^p$ ;

— тензор  $\sigma$  определяется потенциальным соотношением, при этом массовая плотность свободной энергии не зависит от необратимых деформаций.

Из указанных условий следуют кинетические уравнения для  $g^e$  и  $g^p$  [13, 14, 18]

$$D_J(g^e) = -(g^e)^{1/2}(\varepsilon - \varepsilon^p)(g^e)^{1/2} + \frac{1}{2}(\Omega g^e - g^e \Omega) - \frac{1}{2}(g^e(\varepsilon - \varepsilon^p) + (\varepsilon - \varepsilon^p)g^e); \quad (1)$$

$$D_J(g^p) + g^p \Omega - \Omega g^p = -(g^p \varepsilon^p + \varepsilon^p g^p). \quad (2)$$

Здесь  $D_J(\pi) = D(\pi) - w\pi + \pi w$  — объективная производная Зарембы — Яуманна произвольного симметричного тензора  $\pi$ ;  $D(\pi) = \pi_t + (\mathbf{v}\nabla)\pi$  — материальная производная;  $w, \varepsilon$  — антисимметричная и симметричная части градиента скорости;  $2w = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T - (\nabla \otimes \mathbf{v})$ ,  $2\varepsilon = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T + (\nabla \otimes \mathbf{v})$ ;  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}$  — вектор скорости;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\nabla$  — оператор Гамильтона в актуальной конфигурации; нижний индекс  $t$  означает частное дифференцирование по времени;  $\Omega$  — антисимметричный тензор, представляющий собой изотропную функцию  $\varepsilon$  и  $g^e$ :

$$\Omega = \frac{\Sigma(\varepsilon\Sigma - \Sigma\varepsilon)\Sigma}{\det \Sigma}, \quad \Sigma = I \operatorname{tr}(g^e)^{1/2} - (g^e)^{1/2}.$$

Здесь  $I$  — единичный тензор.

Нетрудно показать, что уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$D_{CR}(g^e) \equiv D_J(g^e) + g^e \varepsilon + \varepsilon g^e = (g^e)^{1/2} \varepsilon^p (g^e)^{1/2} + \frac{1}{2}(g^e \varepsilon^p + \varepsilon^p g^e), \quad (3)$$

где  $D_{CR}(\pi) = D(\pi) + (\nabla \otimes \mathbf{v})\pi + \pi(\nabla \otimes \mathbf{v})^T$  — производная Коттер — Ривлина. Существование упругого потенциала общего вида обуславливает соосность тензоров  $g^e$  и  $\sigma$ . В то же время соосность тензоров  $\sigma$  и  $\varepsilon^p$  является наиболее распространенным предположением в математических теориях пластического течения (в частности, принятие ассоциированного закона означает соосность указанных тензоров). Следовательно, скалярные произведения  $\varepsilon^p(g^e)^{1/2}$ ,  $\varepsilon^p g^e$  коммутативны и уравнение (3) принимает вид

$$D_{CR}(g^e) = 2\varepsilon^p g^e. \quad (4)$$

Из (3) и формулы Якоби  $D(\det \pi) = \det \pi \operatorname{tr}(\pi^{-1}D(\pi))$  следует  $D(\det g^e) = -2 \det g^e \operatorname{tr}(\varepsilon - \varepsilon^p)$ . Таким образом, значение  $\det g^e = 1$  сохраняется вдоль траектории движения материальной точки после возникновения пластического течения, если  $\operatorname{tr} \varepsilon = 0$ ,  $\operatorname{tr} \varepsilon^p = 0$ . Следовательно, на компоненты  $g^e$  накладывается алгебраическая связь и количество дифференциальных уравнений (3) или (4) уменьшается на одно уравнение.

В левой части (2) содержится коротационная производная тензора  $g^p$ , равная нулю в случае  $\varepsilon^p = 0$ . Таким образом, в процессе разгрузки изменение меры необратимых деформаций может быть обусловлено только жестким вращением или трансляцией системы координат. Спин  $\Omega$  указанной производной зависит не только от кинематики среды. Тензоры  $g^p, g^e$  в уравнениях (2), (3) являются мерой полных деформаций Альманси:

$$g = (g^e)^{1/2} g^p (g^e)^{1/2}. \quad (5)$$

Здесь  $g = (I - \nabla \otimes \mathbf{u})(I - \nabla \otimes \mathbf{u})^T$ .

Полная система уравнений процесса включает определяющие соотношения для несжимаемой нелинейно-упругой среды

$$\sigma = -pI - 2 \frac{\partial W}{\partial g^e} g^e,$$

где  $W$  — упругий потенциал, принятый в форме потенциала Муни — Ривлина [29, 30]:

$$W = C_1(I_2 - 3) + C_2(I_1 - 3).$$

Следовательно, выражение для тензора напряжений может быть представлено в виде

$$\sigma = (P - 2C_1 + 2C_2)I + 2C_1(g^e)^{-1} - 2C_2g^e. \quad (6)$$

В приведенных выше соотношениях  $p$  и  $P = 2C_1 - 2C_2 - p - 2C_1I_2$  — скалярные функции;  $I_1 = \text{tr}(g^e)$ ;  $2I_2 = \text{tr}^2(g^e) - \text{tr}(g^e)^2$ ;  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \geq 0$  — зависящие от температуры модули материала.

Процесс деформирования полагается медленным, для тензора действительных напряжений Коши справедливо уравнение статики

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Тензор скоростей пластических деформаций  $\varepsilon^p$  удовлетворяет ассоциированному с призмой Треска закону пластического течения

$$\varepsilon^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \varkappa \quad (8)$$

( $\varkappa = \varkappa(T)$  — предел текучести при квазистатическом сдвиге;  $\sigma_1, \sigma_3$  — наибольшее и наименьшее собственные значения  $\sigma$ ;  $\Lambda > 0$  — неопределенный скалярный множитель).

Замыкает систему соотношений термомеханического континуума уравнение теплопереноса

$$c\rho D(T) \equiv c\rho(T_t + (\mathbf{v}\nabla)T) = \nabla \cdot (\lambda\nabla T) + \sigma : \varepsilon^p, \quad (9)$$

где  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  — теплоемкость, плотность и теплопроводность среды соответственно;  $T$  — температура. Соотношение (9) справедливо до тех пор, пока в точке сплошной среды не произойдет фазовый переход, который характеризуется наличием стока энергии вследствие поглощения теплоты плавления.

При записи соотношений для упругого тела пренебрегается температурными деформациями материала. Взаимосвязь механической и тепловой задач обусловлена наличием источника  $\sigma : \varepsilon^p$  в уравнении (9) и зависимостями модулей упругости и предела текучести от температуры.

**2. Постановка и решение начально-краевой задачи.** Рассматривается сплошной круговой цилиндр радиусом  $R_1$ , выполненный из несжимаемого полимерного материала. Один торец цилиндра полностью закреплен, второй испытывает кручение вокруг оси симметрии с угловой скоростью, такой что полагаются справедливыми уравнения статики. Образующая цилиндра является свободной поверхностью. Положение в пространстве точек среды в актуальной конфигурации задается координатами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  цилиндрической системы с тройкой единичных базисных векторов  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ . При кручении цилиндров с произвольным поперечным сечением происходит искривление и депланация изначально плоских сечений, ортогональных оси вращения. Кручение стержня с круговым поперечным сечением вокруг оси, совпадающей с осью симметрии, является единственным для изотропных материалов случаем, когда такие сечения остаются плоскими. При геометрически нелинейной постановке задачи о кручении цилиндра со свободными торцами возникают эффекты второго порядка, в частности изменяется длина цилиндра. В рассматриваемом случае зафиксированных торцов перемещения материальных точек вдоль

образующей не происходит, длина цилиндра и его радиус в силу несжимаемости материала остаются неизменными. Таким образом, круговые движения материальных точек описываются вектором перемещений

$$\mathbf{u} = r(1 - \cos \psi)\mathbf{e}_r + r \sin \psi \mathbf{e}_\varphi, \quad \psi = \psi(r, z, t). \quad (10)$$

Независимость  $\psi$  от координаты  $\varphi$  следует из несжимаемости материала. Выполнение уравнений статики при упругом кручении сплошного кругового цилиндра из материала Муни — Ривлина возможно только в случае

$$\psi = z\theta(t), \quad (11)$$

где параметр нагружения  $\theta(t)$  — угол закрутки подвижного торца, отнесенный к длине цилиндра. Рассматриваемый вид движения соответствует одному из универсальных нелинейно-упругих решений Ривлина — Эриксона [31, 32]. Известная заранее кинематика простого кручения в области упругого деформирования позволяет определить границу областей упругого и пластического деформирования — цилиндрическую поверхность  $r = r_{ep}(t)$ . Предполагается, что в образующей зоне пластического деформирования кинематика материальных точек (10), (11) сохраняется.

Будем использовать адиабатическое приближение и полагать, что процесс генерации тепла за счет диссипации механической энергии происходит существенно быстрее, чем процесс его передачи за счет теплопроводности [33]. Тогда в (9)  $\nabla \cdot (\lambda \nabla T) \approx 0$ . Температура в области упругого деформирования  $r \leq r_{ep}(t)$  остается равной начальной температуре  $T_0$ , а модули упругости постоянны. Согласно (5), (6) при  $r \leq r_{ep}(t)$

$$g^e = g = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + (1 + (r\theta)^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - r\theta(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma = P\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (P + 2C_1(r\theta)^2)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + (P - 2C_2(r\theta)^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \\ + 2r\theta(C_1 + C_2)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение равновесия (7) выполняется при  $P = P_0 + C_1(r\theta)^2$ , где  $P_0(t)$  определяется краевым условием на границе  $r = r_{ep}(t)$ .

Главные значения тензора напряжений в области упругого деформирования равны  $\sigma_2 = \sigma_{rr} = P$ ,  $\sigma_{1,3} = \sigma_2 + (C_1 - C_2)(r\theta)^2 \pm (C_1 + C_2)r\theta(4 + (r\theta)^2)^{1/2}$ . При любых значениях модулей упругости  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \geq 0$  радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  является промежуточным главным. Напряженное состояние впервые достигает поверхности текучести Треска на грани призмы, соответствующей равенству  $\sigma_2 = \sigma_{rr}$ . Процесс необратимого деформирования начинается при выполнении условия  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\kappa(T_0)$ , при этом положение границы областей упругого и пластического деформирования зависит от параметра нагружения  $\theta$ :

$$(r_{ep}\theta)^2 = 2(-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2}), \quad (14)$$

где  $\alpha_0 = \alpha(T_0)$ ;  $\alpha = \kappa\mu^{-1}$ ;  $\mu = 2(C_1 + C_2)$ .

Будем полагать, что напряженное состояние остается на указанной грани призмы Треска и при необратимом деформировании. Этот случай соответствует наиболее простому варианту уравнений упругопластической задачи.

Будем искать тензор  $g^e$  в виде

$$g^e = g_{rr}^e \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + g_{\varphi\varphi}^e \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + g_{zz}^e \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + g_{\varphi z}^e (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi).$$

Тогда тензоры  $(g^e)^{1/2}$  и  $(g^e)^{-1}$ , а также тензор напряжений  $\sigma$ , определяемый по формуле (6), имеют нулевые коэффициенты при тех же диадах, что и  $g^e$ .

Следствием ассоциированного закона (8) является представление тензора скорости необратимой деформации в области пластического деформирования  $r > r_{ep}(t)$  в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon^p &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^p (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \varepsilon_{\varphi z}^p (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\Lambda}{\varkappa} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2}, \quad \varepsilon_{\varphi z}^p = \frac{\Lambda \sigma_{\varphi z}}{\varkappa}.\end{aligned}\quad (15)$$

Имеют место кинематические представления

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= rz\theta_t \mathbf{e}_\varphi, \quad (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = -z\theta_t (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) + r\theta_t \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z, \\ (\mathbf{v}\nabla)g^e &= z\theta_t (g_{rr}^e - g_{\varphi\varphi}^e) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) - z\theta_t g_{\varphi z}^e (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r).\end{aligned}$$

В силу указанных выше представлений тензоров  $g^e$ ,  $(\mathbf{v}\nabla)g^e$ ,  $w$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^p$  из уравнения (4) следует

$$(g_{rr}^e)_t = 0, \quad g_{rr}^e = 1, \quad g_{\varphi z}^e = -(g_{\varphi\varphi}^e g_{zz}^e - 1)^{1/2}. \quad (16)$$

Конвективная производная в (4) не содержит частные пространственные производные, поэтому тензорное уравнение (4) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые пространственная переменная  $r$  входит в качестве параметра:

$$\begin{aligned}(g_{\varphi\varphi}^e)_t &= -\Lambda\alpha^{-1} (g_{\varphi\varphi}^e (g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e) - 2), \\ (g_{zz}^e)_t &= -\Lambda\alpha^{-1} (g_{zz}^e (g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e) - 2) + 2r\theta_t (g_{\varphi\varphi}^e g_{zz}^e - 1)^{1/2}.\end{aligned}\quad (17)$$

С учетом (16) из выражения (6) следует, что в области пластического деформирования компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= P, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = P - 2C_1 + 2C_2 + 2C_1 g_{zz}^e - 2C_2 g_{\varphi\varphi}^e, \\ \sigma_{\varphi z} &= 2(C_1 + C_2) (g_{\varphi\varphi}^e g_{zz}^e - 1)^{1/2}, \quad \sigma_{zz} = P - 2C_1 + 2C_2 + 2C_1 g_{\varphi\varphi}^e - 2C_2 g_{zz}^e,\end{aligned}\quad (18)$$

собственные значения тензора  $\sigma$  удовлетворяют соотношениям  $\sigma_2 = \sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{1,3} - \sigma_2 = (C_1 - C_2)(g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e - 2) \pm (C_1 + C_2)[(g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e)^2 - 4]^{1/2}$ . Как и в области упругого деформирования, компонента  $\sigma_{rr}$  является промежуточным главным напряжением, если  $C_1(T) \geq 0$ ,  $C_2(T) \geq 0$  и  $g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e > 2$ . Поэтому при развитии пластического течения материала, сопровождающемся его нагревом, напряженное состояние остается на той же грани призмы Треска. Тогда из условия текучести следует равенство

$$g_{\varphi\varphi}^e + g_{zz}^e = 2[1 + \alpha^2(T)]^{1/2}. \quad (19)$$

Суммирование уравнений (17) с учетом (19) позволяет определить множитель

$$\Lambda = \frac{r}{2\alpha} \frac{\partial\theta}{\partial t} [\alpha^2 - (g_{\varphi\varphi}^e - (1 + \alpha^2)^{1/2})^2]^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{\partial\alpha}{\partial t} (1 + \alpha^2)^{-1/2}. \quad (20)$$

В то же время в адиабатическом приближении из уравнения (9) с учетом  $(\mathbf{v}\nabla)T = 0$ , (15), (18), (19) получаем выражение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2\Lambda \frac{\varkappa}{c\rho}. \quad (21)$$

Исключая  $\Lambda$  из (20), (21), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{r}{\alpha} [\alpha^2 - (g_{\varphi\varphi}^e - (1 + \alpha^2)^{1/2})^2]^{1/2} \left[ \frac{c\rho}{\varkappa} + \frac{\partial\alpha}{\partial T} (1 + \alpha^2)^{-1/2} \right]^{-1}. \quad (22)$$

Если при заданных функциях температуры  $c$ ,  $\varkappa$ ,  $\alpha$  известно выражение для  $g_{\varphi\varphi}^e(T)$ , то соотношение (22) неявно определяет температуру как функцию параметра  $r\theta$ :

$$\int_{T_0}^T \alpha \left[ \frac{c\rho}{\varkappa} + \frac{\partial\alpha}{\partial T} (1 + \alpha^2)^{-1/2} \right] [\alpha^2 - (g_{\varphi\varphi}^e - (1 + \alpha^2)^{1/2})^2]^{-1/2} dT = r\theta - [2(-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2})]^{1/2}. \quad (23)$$

Здесь учтено начальное условие  $T(r_{ep}\theta) = T_0$ . Решение  $g_{\varphi\varphi}^e(T)$  может быть получено из первого уравнения (17) с учетом (19). Осуществляя согласно (21) переход к другому монотонному параметру — температуре, находим

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}^e}{\partial T} = -\frac{c\rho}{\varkappa^2} (g_{\varphi\varphi}^e \sqrt{\mu^2 + \varkappa^2} - \mu). \quad (24)$$

Линейное дифференциальное уравнение (24) имеет решение

$$g_{\varphi\varphi}^e(T) = e^{-F(T)} \left( 1 + \int_{T_0}^T A(\xi) e^{F(\xi)} d\xi \right), \quad F(T) = \int_{T_0}^T B(\zeta) d\zeta, \quad (25)$$

$$A(T) = \frac{c\rho\mu}{\varkappa^2}, \quad B(T) = \frac{c\rho}{\varkappa^2} \sqrt{\mu^2 + \varkappa^2},$$

которое удовлетворяет начальному условию  $g_{\varphi\varphi}^e(T_0) = 1$ .

Соотношения (23), (25) представляют собой замкнутое решение сформулированной задачи в области пластического течения.

**3. Результаты расчетов и их обсуждение.** Наиболее полно особенности полученного точного решения проявляются в случае, когда и обратимые, и необратимые деформации, возникающие в материале, существенны по величине. Материалами такого типа являются различные полимеры. Приведенные ниже результаты расчетов получены для следующих параметров, характерных для некоторых полиметилметакрилатов (ПММА):  $C_2 = 0$ ,  $\mu = 2C_1 = 0,9$  ГПа,  $\varkappa(T) = \varkappa_0(1 - (T - T_0)/(T_g - T_0))$ ,  $\varkappa_0 = 73,5$  МПа,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1710$  Дж/(кг · °С),  $T_0 = 25$  °С, температура стеклования  $T_g = 115$  °С. Механические характеристики материала восстановлены по экспериментальным данным [34], теплофизические характеристики взяты из [28]. Указанная линейная модель материала позволяет в первом приближении оценить поведение полимеров при упругопластическом кручении, сопровождающемся выделением тепла. Согласно экспериментальным данным [35, 36] пределы текучести ПММА и других полимеров при комнатной температуре и вблизи точки стеклования различаются более чем на порядок, а изменение характеристик упругости значительно меньше. Кроме того, на участке упругого деформирования такие материалы сопротивляются сдвигу по линейному закону, что позволяет использовать двухконстантную модель Муни — Ривлина (или одноконстантную модель неогуковского тела).

На рис. 1, а, б приведены зависимости величин  $g_{\varphi\varphi}^e - 1$ ,  $g_{zz}^e - 1$ ,  $g_{\varphi z}^e$ , рассчитанных по формулам (16), (19), (25), от параметра  $r\theta$ . Остальные компоненты тензора обратимых деформаций  $g^e$  остаются постоянными. На рис. 1, в приведена зависимость локальной температуры, определенной по формуле (23), от параметра  $r\theta$ . Штриховые линии на рис. 1–3 получены в изотермическом приближении, в котором выполняется равенство

$$\alpha_0^2 \int_1^{g_{\varphi\varphi}^e} (1 - \xi \sqrt{1 + \alpha_0^2})^{-1} (\alpha_0^2 - (\xi - \sqrt{1 + \alpha_0^2})^2)^{-1/2} d\xi = r\theta - [2(-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2})]^{1/2}. \quad (26)$$

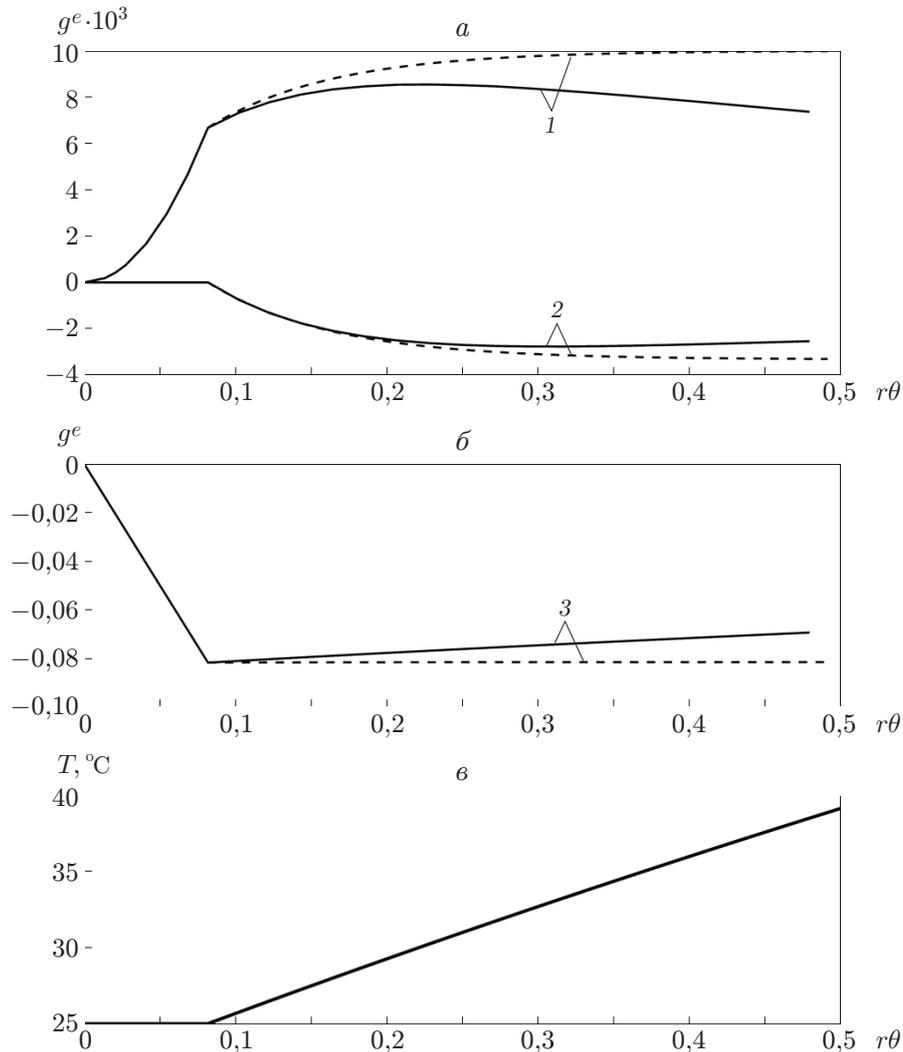


Рис. 1. Эволюция обратимых деформаций (а, б) и температуры (в): сплошные линии — расчет по предложенной модели, штриховые — изотермическое приближение; 1 —  $g_{zz}^e - 1$ , 2 —  $g_{\varphi\varphi}^e - 1$ , 3 —  $g_{\varphi z}^e$

Локальное значение упругой сдвиговой деформации (и, следовательно, касательного напряжения) уменьшается после возникновения пластического течения: угол между площадкой максимального касательного напряжения и соответствующей координатной площадкой возрастает в течение всего процесса, при этом начиная с определенного момента времени значение максимального касательного напряжения ограничивается в соответствии с критерием Треска.

При упругом деформировании крутящий момент определяется известным соотношением

$$m_z = 2\pi \int_0^{R_1} r^2 \sigma_{\varphi z} dr = \frac{\pi}{2} \mu_0 \theta R_1^4, \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad (27)$$

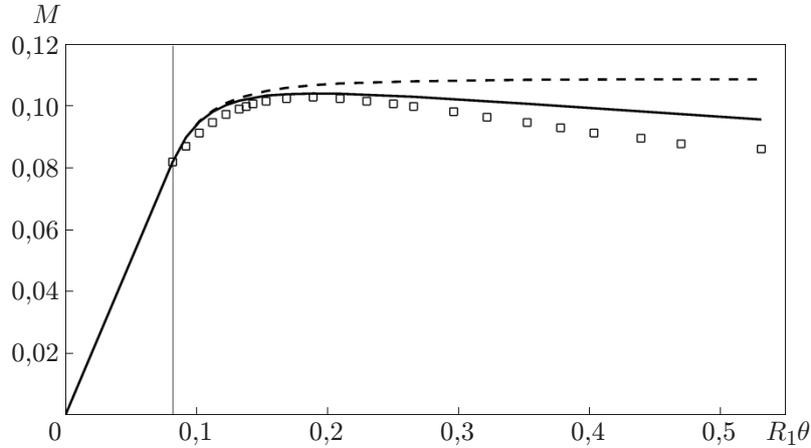


Рис. 2. Зависимость безразмерного крутящего момента от параметра  $R_1\theta$ : сплошная линия — расчет по предложенной модели, штриховая — изотермическое приближение, точки — экспериментальные данные [34] для стержня из ПММА, вертикальная линия —  $R_1\theta = [2(-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2})]^{1/2}$  (возникновение пластического течения на поверхности  $r = R_1$ )

а после возникновения пластического течения в стержне — соотношением

$$m_z = 2\pi\theta^{-3}\mu_0(-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2})^2 + 2\pi\theta^{-3} \int_{T_0}^{T_1} (r\theta)^2 \frac{\partial(r\theta)}{\partial T} \mu \sqrt{g_{\varphi\varphi}^e (-g_{\varphi\varphi}^e + 2\sqrt{1 + \alpha^2}) - 1} dT. \quad (28)$$

Первое слагаемое в (28) соответствует вкладу области упругого деформирования, второе — области пластического деформирования; величины  $r\theta$  и  $\partial(r\theta)/\partial T$ , являющиеся функциями температуры, определяются по формуле (23),  $g_{\varphi\varphi}^e(T)$  — по формуле (25). Значение температуры  $T_1$  на свободной поверхности стержня находится как корень уравнения (23) при  $r = R_1$ . Из соотношений (27), (28) можно получить следующую функциональную зависимость крутящего момента:  $m_z(R_1, \theta) = (\pi/2)\mu_0 R_1^3 M(R_1\theta)$ . Зависимость  $M(R_1\theta)$  приведена на рис. 2.

Аналогичная зависимость в изотермическом приближении строится путем перехода к переменной интегрирования  $g_{\varphi\varphi}^e$  в (28) с учетом (26). Сопротивление стержня упругопластическому кручению достигает максимума после возникновения пластического течения и уменьшается в основном вследствие нагрева материала. Заметим, что температурное разупрочнение является не единственной причиной того, что после возникновения пластического течения сопротивление стержня кручению изменяется немонотонно. Расчеты, проведенные для более податливых материалов ( $\alpha_0 \sim 1$ ), показывают, что крутящий момент уменьшается по мере развития пластического течения даже в изотермическом приближении, выходя при этом на стационарное значение.

В отличие от кривой зависимости локальной упругой сдвиговой деформации  $g_{\varphi z}^e$  от параметра  $r\theta$  (см. рис. 1,б) кривая зависимости крутящего момента от параметра  $R_1\theta$  в окрестности точки максимума является гладкой вследствие неоднородности деформации по радиусу. При кручении тонкостенной трубы на кривой зависимости  $M(R_1\theta)$  возникает “зуб пластичности”.

Для круговых цилиндров со свободными торцами наблюдается эффект Пойнтинга, заключающийся в изменении длины стержня при кручении. В случае закрепленных торцов известен близкий эффект, также не объясняемый геометрически линейной теорией, —

возникновение продольной силы  $Q = 2\pi \int_0^{R_1} r \sigma_{zz} dr$ .

Согласно (13) при чисто упругом деформировании

$$Q = -\frac{\pi R_1^2}{2} (C_1^0 + 2C_2^0) (R_1 \theta)^2, \quad C_1^0 = C_1(T_0), \quad C_2^0 = C_2(T_0), \quad (29)$$

а после возникновения в стержне пластического течения с учетом (18), (19)

$$Q = 2\pi \theta^{-2} (-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2}) [P(T_0) - (C_1^0 + 2C_2^0) (-1 + (1 + \alpha_0^2)^{1/2})] + \\ + 2\pi \theta^{-2} \int_{T_0}^{T_1} (r\theta) \frac{\partial(r\theta)}{\partial T} (P - 2C_1 + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)g_{\varphi\varphi}^e - 4C_2 \sqrt{1 + \alpha^2}) dT. \quad (30)$$

Как и в формуле (28), первое слагаемое в (30) обусловлено наличием области упругого деформирования, второе — наличием области пластического деформирования. Добавочное давление, непрерывное на границе между областями упругого и пластического деформирования, определяется как функция локальной температуры соотношением

$$P(T) = \int_T^{T_1} (r\theta)^{-1} \frac{\partial(r\theta)}{\partial T} (2C_1 - 2C_2 + 2(C_1 + C_2)g_{\varphi\varphi}^e - 4C_1 \sqrt{1 + \alpha^2}) dT, \quad (31)$$

которое следует из уравнения равновесия (7), содержащего единственную нетривиальную компоненту. Согласно (29), (30) выражение для продольной силы может быть представлено в виде  $Q(R_1, \theta) = -\pi R_1^2 \mu_0 N(R_1 \theta)$ . Зависимость  $N(R_1 \theta)$  приведена на рис. 3. В изотермическом приближении в соотношениях (30), (31) следует перейти к переменной интегрирования  $g_{\varphi\varphi}^e$  в соответствии с (26).

Упругое деформирование характеризуется увеличением продольной силы по степенному закону. После возникновения пластического течения рост продольной силы замедляется, а затем происходит ее медленное уменьшение за счет нагрева материала. Продольная сила достигает максимального значения при развитом пластическом течении. На рис. 3,

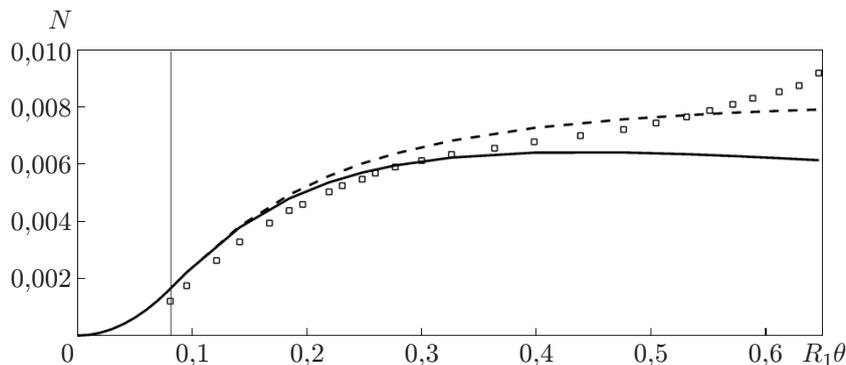


Рис. 3. Зависимость безразмерной продольной силы от параметра  $R_1 \theta$  (обозначения те же, что на рис. 2)

как и на рис. 2, точки соответствуют экспериментальным данным работы [34], в которой экспериментально измерялось среднее давление  $\langle \sigma_{zz} \rangle$  на торце предварительно сжатого в продольном направлении ( $\sigma_{zz}^0 = -1,25$  МПа) стержня при его кручении. При малой относительной величине начального сжатия  $\sigma_{zz}^0/\mu_0$  можно считать, что напряженное состояние образцов при развитом деформировании представляет собой сумму напряженных состояний, соответствующих однородному сжатию в направлении оси симметрии и чистому кручению. Поэтому для сравнения результатов, представленных на рис. 3, используется разность  $\langle \sigma_{zz} \rangle - \sigma_{zz}^0/\mu_0$ .

При умеренных величинах деформации точное решение хорошо согласуется с экспериментальными значениями как приложенного крутящего момента, так и продольной силы. При дальнейшем развитии пластического течения наблюдается некоторое различие результатов, более значительное для продольной силы.

**Заключение.** Полученные аналитические решения могут быть использованы при экспериментальном определении зависимости предела текучести полимерных материалов от температуры в случае, если зависимость модулей упругости материала от температуры определена на основе других экспериментов. При этом расчетные данные о величине продольной силы следует использовать для оценки адекватности модели.

Интерпретация результатов экспериментов по пластическому кручению тонкостенных полых цилиндров достаточно проста. При малом отношении толщины стенки к радиусу цилиндра деформированное состояние при развитом пластическом течении близко к однородному, так же как и температурное поле образца, которое несложно измерить. Проблема заключается в том, что при больших деформациях предотвратить потерю устойчивости такого образца практически невозможно. Поэтому кручение сплошных цилиндров представляется перспективным экспериментальным методом, при использовании которого необходимо учитывать неоднородный нагрев образца за счет пластической диссипации и соответствующее изменение свойств материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains // J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
2. Clifton R. J. On the equivalence of  $F^e F^p$  and  $\bar{F}^p \bar{F}^e$  // J. Appl. Mech. 1972. V. 39, N 1. P. 287–289.
3. Кондауров В. И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
4. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
5. Bruhns O. T. The multiplicative decomposition of the deformation gradient in plasticity — origin and limitations // Adv. Structured Materials. 2015. V. 64. P. 37–66.
6. Быковцев Г. И., Шитиков А. В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
7. Naghdi P. M. A critical review of the state of finite plasticity // Z. angew. Math. Phys. 1990. Bd 41, N 3. S. 315–394.
8. Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
9. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformations // Acta Mech. 2006. V. 182, N 1. P. 31–111.
10. Shutov A. V., Ihlemann J. Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // Intern. J. Plasticity. 2014. V. 63. P. 183–197.

11. **Трусов П. В., Швейкин А. И., Янц А. Ю.** О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физ. мезомеханика. 2016. Т. 19, № 2. С. 47–65.
12. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
13. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упруго-пластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
14. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
15. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Деформирование и разогрев упруго-вязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 6–18.
16. **Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 3. С. 275–278.
17. **Prokudin A. N., Firsov S. V.** Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2018. V. 11, N 4. P. 399–410.
18. **Севастьянов Г. М., Буренин А. А.** О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 3. С. 285–287.
19. **Nadai A.** Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab // J. Appl. Math. Mech. 1923. V. 3, N 6. P. 442–454.
20. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
21. **Neale K. W., Shrivastava S. C.** Analytical solutions for circular bars subjected to large strain plastic torsion // J. Appl. Mech. 1990. V. 57, N 2. P. 298–306.
22. **Wu P. D., Van der Giessen E.** Analysis of elastic-plastic torsion of circular bars at large strains // Arch. Appl. Mech. 1991. V. 61. P. 89–103.
23. **Dienes J. K.** On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mech. 1979. V. 32, N 4. P. 217–232.
24. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 5. С. 716–717.
25. **Ивлев Д. Д.** Три дискуссии по механике // Вестн. Самар. ун-та. Естественно-науч. сер. 2007. Т. 54, № 4. С. 115–123.
26. **Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н.** Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 6. С. 1014–1022.
27. **Dodd B., Bai Y.** Width of adiabatic shear bands // Materials Sci. Technol. 1985. V. 1, N 1. P. 38–40.
28. **Ames N. M., Srivastava V., Chester S. A., Anand L.** A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Pt 2. Applications // Intern. J. Plasticity. 2009. V. 25, N 8. P. 1495–1539.
29. **Mooney M.** A theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys. 1940. V. 11, N 9. P. 582–592.
30. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
31. **Rivlin R. S.** Large elastic deformations of isotropic materials. 6. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1949. V. 242, N 845. P. 173–195.
32. **Ericksen J. L.** Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // Z. angew. Math. Phys. 1954. Bd 5, N 6. S. 466–489.

33. **Perez-Castellanos J.-L., Rusinek A.** Temperature increase associated with plastic deformation under dynamic compression: application to aluminium AL 6082 // *J. Theor. Appl. Mech.* 2012. V. 50, N 2. P. 377–398.
34. **Карпов Е. В., Ларичкин А. Ю.** Влияние осевого сжатия и крутящего момента на локализацию деформаций и разрушение при сложном циклическом нагружении стержней из оргстекла // *ПМТФ.* 2014. Т. 55, № 1. С. 115–126.
35. **Richeton J., Ahzi S., Vecchio K. S., et al.** Influence of temperature and strain rate on the mechanical behavior of three amorphous polymers: Characterization and modeling of the compressive yield stress // *Intern. J. Solids Structures.* 2006. V. 43. P. 2318–2335.
36. **Siviour C. R., Walley S. M., Proud W. G., Field J. E.** Mechanical behaviour of polymers at high rates of strain // *J. Physique IV.* 2006. V. 134. P. 949–955.

*Поступила в редакцию 13/XII 2018 г.,  
после доработки — 21/V 2019 г.  
Принята к публикации 24/VI 2019 г.*

---