РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2008, том 44, № 3

УДК 621.391

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ТРЕХМЕРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ИНВАРИАНТНОЕ К ДЕЙСТВИЮ ГРУПП ВРАЩЕНИЯ И ПЕРЕНОСА*

С. Н. Чуканов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск
E-mail: chukanov@iitam.omsk.net.ru

Предложено преобразование Фурье функции трехмерного изображения, основанное на разложении в ряд сферических функций и инвариантное к действию групп вращения, переноса и масштабирования.

Введение. Задача формирования RTS-инвариантов (rotation-translation-scaling) для функций, описывающих двумерные $(2D)$ изображения решалась во многих работах (см., например, [1, 2]). В [3, 4] рассматривались биспектральные методы построения таких инвариантов. В работах [4, 5] для построения инвариантов использовались методы теории моментов. В [3, 6] применялись теоретико-групповые методы построения инвариантов изображения.

Проблема инвариантности по отношению к переносам, вращениям и масштабированию при распознавании трехмерных $(3D)$ образов связана с математическим представлением изображения объекта, не зависящим от координатного описания изображения.

Для нахождения инвариантов при распознавании образов необходимо определить группу G, действующую на множестве аргументов функции изображения. Классификация образов должна быть инвариантной по отношению к действию элементов группы. Под группой G будем понимать множество с операцией «$\circ$»: $G \circ G \to G$, удовлетворяющее следующим аксиомам [7]:

1) $\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y \in G$;
2) $\exists e \in G \Rightarrow e \circ x = x \circ e = x;\ \forall x \in G$;
3) $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G \Rightarrow x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$.

Изображение $3D$-объекта может быть описано функцией $f(x, y, z)$, где x, y, z – декартовы координаты изображения.

Действие группы переноса (translation): перенос в направлении оси X: $g_{\varepsilon_x} f(x, y, z) = f(x + \varepsilon_x, y, z)$; инфинитезимальный оператор переноса: $t_x = \partial/\partial x$; инвариантность может быть обеспечена нахождением координаты

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-07-89051, № 06-08-01403).

центра x_0 с последующим переносом. Оператор переноса в направлении оси Y: $t_y = \partial / \partial y$; оператор переноса в направлении оси Z: $t_z = \partial / \partial z$.

Действие группы растяжений по оси X: $g_{\varphi_x} f(x, y, z) = f((1+\varphi_x)x, y, z)$; оператор растяжения по оси X: $d_x = x(\partial/\partial x)$. Оператор растяжения по оси Y: $d_y = y(\partial/\partial y)$. Оператор растяжения по оси Z: $d_z = z(\partial/\partial z)$. Действие группы масштабирования (scale) будем рассматривать как действие группы растяжений с $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z$.

Действие группы вращения (rotation):

– поворот на угол α_x:

$$g_{\alpha_x} f(x, y, z) = f(x,\ y\cos(\alpha_x) - z\sin(\alpha_x),\ y\sin(\alpha_x) + z\cos(\alpha_x));$$

оператор поворота $L_x = -z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$;

– поворот на угол α_y:

$$g_{\alpha_y} f(x, y, z) = f(x\cos(\alpha_y) + z\sin(\alpha_y),\ y,\ -x\sin(\alpha_y) + z\cos(\alpha_y));$$

оператор поворота $L_y = -x\dfrac{\partial}{\partial z} + z\dfrac{\partial}{\partial x}$;

– поворот на угол α_z:

$$g_{\alpha_z} f(x, y, z) = f(x\cos(\alpha_z) - y\sin(\alpha_z),\ x\sin(\alpha_z) + y\cos(\alpha_z),\ z);$$

оператор поворота $L_z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Для нахождения RTS-инвариантов функции изображения в данной работе ставится задача определения центра изображения и выделенной ориентации группы вращения с последующим центрированием изображения.

Построение инвариантов переноса и масштабирования. Инвариантность по отношению к группе переноса может быть обеспечена определением центра (x_0, y_0, z_0) с последующим переносом. Для действия группы переноса на функцию $2D$-изображения нахождение центра изображения сводится к методу моментов [1, 4, 5]. Сформируем моменты порядка $(p+q+s)$ трехмерной функции $f(x, y, z)$ (аналогично методам, предложенным в [1]):

$$m_{p,q,s} = \iiint x^p y^q z^s f(x, y, z)\,dxdydz, \tag{1}$$

где p, q, s – неотрицательные целые числа.

Центр (x_0, y_0, z_0) функции изображения $f(x, y, z)$ определяется из соотношений: $x_0 = m_{1,0,0}/m_{0,0,0}$, $y_0 = m_{0,1,0}/m_{0,0,0}$, $z_0 = m_{0,0,1}/m_{0,0,0}$. Центрированная функция $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ является инвариантной по отношению к действию группы переноса. Нормализованные моменты

$$\mu_{p,q,s} = \nu_{p,q,s}\nu_{0,0,0}^{-1-((p+q+s)/3)} \tag{2}$$

являются инвариантами масштабирования, где

$$\nu_{p,q,s} = \iiint x^p y^q z^s f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)\,dxdydz. \tag{3}$$

Построение инвариантов вращения. Для формирования инвариантности по отношению к действию группы вращения будем использовать аппарат полиномов Лежандра [8, 9]. Если ввести углы на сфере: полярный θ и азимутальный φ, то декартовы проекции могут быть записаны в виде

$$x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

где $r \geq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ 0 \leq \varphi < 2\pi;$ r – длина радиуса-вектора [10, 11]. Для описания изображения $3D$-объекта рассмотрим функцию $\Psi(\theta, \varphi)$ при заданной r. Вращение может быть представлено оператором $R = \mathrm{e}^{-i(\alpha_x L_x + \alpha_y L_y + \alpha_z L_z)}$, где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – углы поворота; L_x, L_y, L_z – операторы углового момента относительно осей X, Y, Z.

Запишем оператор квадрата момента импульса [12–14]

$$L^2 = -(\partial^2/\partial\theta^2 + \mathrm{ctg}(\theta)\partial/\partial\theta + \sin^{-2}(\varphi)\partial^2/\partial\varphi^2)$$

и проекции углового момента $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ относительно оси Z. Собственные векторы этих операторов известны как сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Разложение Фурье функции

$$\Psi(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} c_l^m Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{4}$$

в базисе Y_{lm} основано на формировании коэффициентов разложения

$$c_l^m = \langle Y_{lm}, \Psi \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta\, Y_{lm}^*(\theta, \varphi)\Psi(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, L, \ m = -l, \ldots, l. \tag{5}$$

При условии нормирования

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta\, Y_{l_1 m_1}^*(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2} \tag{6}$$

можно определить выражения

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!4\pi}} P_{lm}(\cos(\theta))\mathrm{e}^{im\varphi}, \quad m > 0 \tag{7}$$

(здесь P_{lm} – присоединенный полином Лежандра).

Запишем комбинации операторов углового момента: $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$. Действия операторов на сферические гармоники выражаются в виде [13, 14]:

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \tag{8а}$$

$$L_z Y_{lm} = mY_{lm}, \tag{8б}$$

$$L_+ Y_{l,\,m-1} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\, Y_{lm}, \tag{8в}$$

$$L_- Y_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\, Y_{l,\,m-1}. \tag{8г}$$

Действие оператора R на Y_{lm} представим в виде линейной комбинации $\{Y_{l,\,-l}, Y_{l,\,-l+1}, \ldots, Y_{l,\,l}\}$, а пространство дифференцируемых функций на сфере может быть декомпозировано в сумму подпространств, каждое из которых инвариантно к вращению: E_0 состоит из $\{Y_{00}\}$, E_1 – из $\{Y_{1,\,-1}, Y_{1,\,0}, Y_{1,\,1}\}$ и т. д. [14]. Если вектор принадлежит пространству E_l, то любое вращение этого вектора также будет принадлежать пространству E_l.

Наиболее простым инвариантом для функций $Y_{l_1 m_1}, Y_{l_2 m_2}, Y_{l_3 m_3}$ является функция

$$Y_0 = \sum_{m_1,\, m_2,\, m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} \tag{9}$$

при условиях $m_1 + m_2 + m_3 = 0$; моменты l_1, l_2, l_3 удовлетворяют условию треугольника; матричная скобка – символ Вигнера [15, 16]. Если заданы сферические функции $Y_{l_1 m_1}$, $Y_{l_2 m_2}$, то можно получить сферическую функцию $Y_{lm} = \sum_{m_1,\, m_2} C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2}$. Здесь

$$C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} = (-1)^{l_1 - l_2 + m} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \tag{10}$$

– коэффициенты Клебша – Гордана (коэффициенты преобразования от системы $(2l_1+1)(2l_2+1)$ функций с заданными l_1, m_1, l_2, m_2 к системе функций с заданными l, m [14]). Общее выражение символов Вигнера и коэффициентов Клебша – Гордана громоздко [15], но использование симметрии и свойств рекурсии этих коэффициентов позволяет упростить вычисления [17].

Рассмотрим вектор c_l подпространства E_l: $c_l = c_l^m Y_{lm}$ (c_l^m – контравариантный тензор 1-го ранга с тензорным индексом m; l – индекс, указывающий на подпространство E_l; ковариантный тензор может быть получен из соотношения $c_{lm} = (c_l^m)^*$ при условии ортонормированности набора c_l^m). Перемножение контравариантного и ковариантного тензоров 1-го ранга с последующим суммированием по индексу m приводит к инварианту.

Построим контравариантные тензоры 1-го ранга (с учетом правила суммирования по одинаковым ковариантным и контравариантным индексам) [8]:

$$c^{(2)}(l_1, l_2)_l^m = C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} c_{l_1}^{m_1} c_{l_2}^{m_2}, \tag{11а}$$

$$c^{(4)}(l_1, l_2, l_3, l_4)_l^m = C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} c^{(2)}(l_3, l_4)_{l_1}^{m_1} c_{l_2}^{m_2}, \tag{11б}$$

$$c^{(6)}(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)_l^m = C^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2} c^{(2)}(l_3, l_4)_{l_1}^{m_1} c^{(2)}(l_5, l_6)_{l_2}^{m_2}, \ldots \tag{11в}$$

Тогда инварианты могут быть построены формированием произведения контравариантного и ковариантного тензоров 1-го ранга с последующим суммированием по индексу m (при этом инварианты не зависят от m и φ):

$$I^{(1)}(l) = c_l^m c_{lm}, \tag{12а}$$

$$I^{(3)}(l, l_1, l_2) = c^{(2)}(l_1, l_2)_l^m c_{lm}, \tag{12б}$$

$$I^{(5)}(l, l_1, l_2, l_3, l_4) = c^{(2)}(l_1, l_2)_l^m c^{(2)}(l_3, l_4)_{lm}, \tag{12в}$$

$$I^{(7)}(l, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = c^{(4)}(l_1, l_2, l_3, l_4)_l^m c^{(2)}(l_5, l_6)_{lm}, \ldots. \tag{12г}$$

Рассмотрим метод описания объекта с помощью функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ при любых r [14]:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_k \sum_l c_{kl}^m R_{kl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{13}$$

Аналогичные выражения применялись в квантовой механике для описания частиц в центрально-симметричном поле, волновая функция которых не ограничена в пространстве. В [8] предложены функции

$$R_k(r) = \sqrt{2}(\pi k) \frac{\sin(\pi k r)}{\pi k r}, \tag{14}$$

где $R_k(r)$ не зависят от l, m и значения k являются целыми положительными. Использование таких функций возможно, если учесть ограниченность функции $\Psi(r, \theta, \varphi)$ в пространстве $0 \le r \le r_{\max}$.

С учетом ортонормированности коэффициенты c_{kl}^m могут быть найдены из соотношений

$$c_{kl}^m = \int_0^{r_{\max}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta (R_k(r) Y_{lm}(\theta, \varphi))^* \Psi(r, \theta, \varphi). \tag{15}$$

Для выделения определенной ориентированной системы координат построим тензор 3D-изображения

$$J = \begin{Vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{Vmatrix} \tag{16}$$

на основе формирования моментов второго порядка:

$$J_{xx} = \int_V f(x, y, z)(y^2 + z^2) dV, \quad J_{yy} = \int_V f(x, y, z)(x^2 + z^2) dV,$$

$$J_{zz} = \int_V f(x, y, z)(x^2 + y^2) dV, \quad J_{xy} = \int_V xyf(x, y, z) dV,$$

$$J_{xz} = \int_V xzf(x, y, z)\,dV, \qquad J_{yz} = \int_V yzf(x, y, z)\,dV.$$

При повороте объекта с матрицей направляющих косинусов S тензор инерции изменяется по закону

$$J' = S^T JS. \tag{17}$$

Поставим задачу нахождения такого поворота S, чтобы тензор инерции имел диагональный вид

$$J^d = \begin{Vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

где J_x, J_y, J_z – собственные числа тензора инерции J.

При $J_x \neq J_y$, $J_y \neq J_z$, $J_z \neq J_x$ можно провести такое преобразование координат $(x' \quad y' \quad z')^T = S(x \quad y \quad z)^T$ формированием поворота S, что оси X, Y, Z будут направлены по главным осям тензора инерции $3D$-изображения. Определим данную ориентацию системы координат как центральную ориентацию группы вращений.

Нахождение центра $3D$-изображения из соотношений (1)–(3) и выделенной ориентации группы вращений приведением главных осей тензора инерции к декартовым осям и масштабирование изображения позволяют найти коэффициенты (15), тензоры 1-го ранга (11) и инварианты (12), не зависящие от действия групп переноса, вращения и масштабирования.

П р и м е р. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, заданный в декартовой системе координат $OXYZ$:

$$f(x, y, z) = H(x - x_1)H(-x + x_2)H(y - y_1)H(-y + y_2)H(z - z_1)H(-z + z_2),$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 4, \quad z_2 = 6, \quad V = 48,$$

где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Определим моменты первого порядка для последующего нахождения центра (x_0, y_0, z_0) функции $f(x, y, z)$ в соответствии с (1)–(3): $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, что позволяет найти функцию изображения, инвариантную по отношению к действию группы переносов:

$$f_1(x, y, z) = H(x + 1)H(-x + 1)H(y - 2)H(-y + 2)H(z - 3)H(-z + 3).$$

Для формирования инвариантов по отношению к действию группы масштабирования разделим декартовы координаты на $r_{\max} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$, после этого функция изображения примет вид

$$f_2(x, y, z) = H(x + r_{\max}^{-1})H(-x + r_{\max}^{-1}) \times$$

$$\times H(y - 2r_{\max}^{-1})H(-y + 2r_{\max}^{-1})H(z - 3r_{\max}^{-1})H(-z + 3r_{\max}^{-1}).$$

k	l	$m = 0$	$m = -1$	$m = 1$	$m = -2$	$m = 2$	$\sum_m c_l^m c_{lm}$
1	0	0,018	–	–	–	–	0,000324
1	1	0,069	0,019 + 0,038i	–0,019 + 0,038i	–	–	0,008371
1	2	0,018	–0,075 – 0,149i	0,075 – 0,149i	0,039i	–0,039i	0,059018
2	0	–0,016	–	–	–	–	0,000256
2	1	0,063	–0,009 – 0,019i	0,009 – 0,019i	–	–	0,004853
2	2	–0,009	0,037 + 0,075i	–0,037 + 0,075i	–0,020i	0,020i	0,014869
3	0	0,011	–	–	–	–	0,000121
3	1	–0,042	0,006 + 0,013i	–0,006 + 0,013i	–	–	0,002174
3	2	0,006	–0,025 – 0,050i	0,025 – 0,050i	0,013i	–0,013i	0,006624

Находим главные моменты инерции: $J_x = 208 = J_{\max}$, $J_y = 160$, $J_z = 80 = J_{\min}$.

Минимальный поворот для формирования $J_x = J_{\min}$, $J_z = J_{\max}$ можно осуществить вокруг оси OY на угол $\alpha_y = \pi/2$: $G_{\alpha_y} f(x, y, z) = f(z', y', -x')$.

Тогда изображение будет определяться функцией

$$f_3(x, y, z) = H(x + 3r_{\max}^{-1})H(-x + 3r_{\max}^{-1}) \times$$

$$\times H(y - 2r_{\max}^{-1})H(-y + 2r_{\max}^{-1})H(z - r_{\max}^{-1})H(-z + r_{\max}^{-1}).$$

Коэффициенты c_{kl}^m (см. (15)) для различных значений k, l, m представлены в таблице.

Аналогичная процедура для любого прямоугольного параллелепипеда со сторонами, пропорциональными сторонам вышерассмотренного параллелепипеда, приводит к таблице с такими же коэффициентами, что указывает на инвариантность таблицы коэффициентов по отношению к вращению, масштабированию и переносу. По коэффициентам таблицы можно восстановить изображение – прямоугольный параллелепипед со сторонами, пропорциональными сторонам вышерассмотренного параллелепипеда, и $r_{\max} = 1$.

Заключение. В данной работе представлен метод формирования RTS-инвариантов для функций 3D-изображений, основанный на нахождении моментов первого и второго порядков. Метод применяется при распознавании образов, инвариантных по отношению к вращению, переносу и масштабированию, а также для редуцирования шума в сигналах, формирующих 3D-изображение. Предлагаемый алгоритм формирования RTS-инвариантов для функций 3D-изображений может быть обобщен для пространств с размерностью $n > 3$, что актуально при анализе процессов в динамических системах, системах управления и т. д. Его обобщением также является формирование аффинных инвариантов для функций 3D-изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wood J.** Invariant pattern recognition: a review // Pattern Recogn. 1996. **29**, N 1. P. 1.
2. **Yuceer C., Oflazer K.** A rotation, scaling and translation invariant pattern classification system // Pattern Recogn. 1993. **26**, N 5. P. 687.
3. **Kakarala R.** A group-theoretic approach to the triple correlation // IEEE Workshop on Higher-Order Statistics. 1993. P. 28.
4. **Sadler B., Giannakis G.** Shift- and rotation-invariant object reconstruction using the bispectrum // JOSA A. 1992. **9**, N 1. P. 57.
5. **Hu M. K.** Visual pattern recognition by moment invariants // IEEE Trans. Inform. Theory. 1962. **IT-8**. P. 179.
6. **Lenz R.** Group invariant pattern recognition // Pattern Recogn. 1990. **23**, N 1/2. P. 199.
7. **Любарский Г. Я.** Теория групп и ее применения в физике. М.: Физматгиз, 1958.
8. **Burel G., Henocq H.** Three-dimensional invariants and their application to object recognition // Signal Processing. 1995. **45**. P. 1.
9. **Driscoll J. R., Healy D.** Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere // Adv. Appl. Math. 1994. **15**, N 2. P. 202.
10. **Биденхарн Л., Лаук Дж.** Угловой момент в квантовой физике. М.: Мир. 1984. Т. 1.
11. **Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.** Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
12. **Chow T.** Mathematical Methods for Physicists: A Concise Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
13. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
14. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Квантовая механика. М.: ГИФМЛ, 1963.
15. **Wigner E. P.** On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of simply reducible groups // Quantum Theory of Angular Momentum. 1965. P. 87.
16. **Вигнер Е.** Теория групп. М.: ИЛ, 1961.
17. **Racah G.** Theory of complex spectra. Pt. I // Phys. Rev. 1942. **61**, N 3. P. 186; Pt. II // Ibid. **62**, N 9. P. 438; Pt. III // Phys. Rev. 1943. **63**, N 9. P. 367.

Поступила в редакцию 29 марта 2007 г.