6. **Saidi C., Legay-Desesquelles F., Prunet-Foch B.** Laminar flow past sinusoidal cavity // Int. J. Heat Mass Transfer.— 1987.— V. 30, N 4.
7. **Богданова В. В.** Ламинарный пограничный слой в осесимметричном закрученном потоке // Техническая гидрогазодинамика.— Л., 1965.— (Тр./Ленингр. политехн. ин-т; № 248).

г. Москва *Поступила 23/VII 1991 г., в окончательном варианте — 27/III 1992 г.*

УДК 532.522.2

В. Е. Козлов

МОДЕРНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматриваются две модели турбулентности, получившие широкое распространение: однопараметрическая [1] и двухпараметрическая [2]. Предлагаемая их модификация позволяет значительно точнее описывать процесс смешения осесимметричной струи.

1. Интерпретация теории Прандтля для плоского и осесимметричного струйных течений. Система стационарных уравнений Рейнольдса для струйного турбулентного изобарического течения несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \mathrm{const}$) имеет вид

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{y^i}\frac{\partial}{\partial y}\left(-y^i\overline{u'v'}\right), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

где $i = 0, 1$ в плоском и осесимметричном случаях; черта означает осреднение. Для замыкания системы уравнений воспользуемся гипотезой Буссинеска

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon \partial \bar{u}/\partial y$$

(ε — коэффициент турбулентной вязкости). Чтобы построить теорию турбулентного переноса для ε, Прандтль [3] использовал нестрогие соображения о переносе случайным полем давления крупномасштабных частиц жидкости, которые условно назвал молями. Эта теория получила название теории «пути смешения». Рассмотрим, следуя Прандтлю, механизм турбулентного переноса для ε на примере плоского турбулентного потока жидкости с однородным сдвигом ($\bar{w} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\partial \bar{u}/\partial x = 0$, $\partial \bar{u}/\partial y = \mathrm{const} \neq 0$). Пусть некоторый моль получает импульс в поперечном направлении y. В результате этого его поперечная компонента скорости становится равной v', а сам моль перемещается на характерную длину «пути смешения» l, вытесняя при этом находящийся там другой моль. Предположим, что при перемещении моля его продольная компонента скорости остается неизменной. Разность между продольными компонентами скорости вытесняющего и вытесняемого молей составит $u' \approx -l\,\partial \bar{u}/\partial y$. Теперь легко получить оценку для интересующей нас корреляции $\overline{u'v'} \approx -\overline{lv'}\,(\partial \bar{u}/\partial y)$. Таким образом, согласно теории «пути смешения», коэффициент турбулентной вязкости есть корреляция $\overline{lv'}$. Тот же результат имеет место и в осесимметричном случае. В данной работе различие между плоским и осесимметричным случаями было получено благодаря следующей модификации теории «пути смешения».

Рассмотрим движение моля в плоскости yOz, перпендикулярной вектору осредненной скорости. Следуя логике рассуждений теории «пути смешения», введем характерное расстояние l_1, на которое перемещается моль из-за случайного пульсационного воздействия на него поля давления. Предположим, что моль имеет форму шара с радиусом $R = l_1/2$ и может перемещаться в плоскости yOz в любом направлении. Одно из

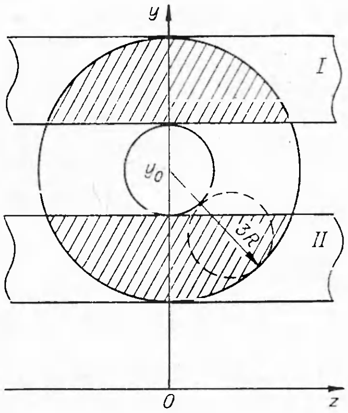

Рис. 1

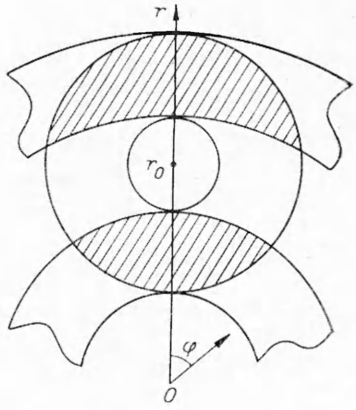

Рис. 2

возможных конечных положений моля показано на рис. 1 штриховой линией.

Заметим, что сделанное допущение ($l_1 = 2R$) означает равенство лагранжева и эйлерова пространственных масштабов турбулентности. Однако экспериментальные данные [4] свидетельствуют о существенном различии этих масштабов. Так, для струйного течения отношение лагранжева пространственного масштаба к эйлерову составляет примерно 0,6.

Область, внутри которой может оказаться в конце движения моль, представляет собой круг с радиусом $3R$ (рис. 1). На месте, которое занимал рассматриваемый моль вначале, может оказаться моль либо с ординатой центра ($y_0 + 2R$), либо с ординатой центра ($y_0 - 2R$). Вначале эти моли принадлежали областям, изображенным на рис. 1 горизонтальными полосами *I* и *II*. В дальнейшем нас будут интересовать области пересечения этих полос с кругом радиуса $3R$ (на рис. 1 они заштрихованы). Заметим, что в плоском случае площадь каждой заштрихованной области $S_0 = R^2[9\operatorname{arctg}(\sqrt{8}) - \sqrt{8}] \approx 8{,}25R^2$.

Иная картина будет в осесимметричном турбулентном потоке жидкости с однородным сдвигом при

$$\bar{w} = 0,\ \bar{v} = 0,\ \partial\bar{u}/\partial x = 0,\ \partial\bar{u}/\partial r = \text{const} \neq 0.$$

Здесь $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Рассмотрим схему пульсационного движения моля в плоскости $rO\varphi$ (φ — азимутальный угол). Области, имевшие в плоском случае форму горизонтальных полос, в осесимметричном случае трансформируются в изогнутые полосы прежней ширины $2R$. Границами изогнутых полос являются окружности (рис. 2). Области пересечения изогнутых полос с кругом радиуса $3R$, заштрихованные на рис. 2, уже не будут равны. Площадь S_1 верхней области будет больше площади S_2 нижней. Установим следующую связь между этими площадями и приближенными вероятностями σ_1 и σ_2 для перемещений рассматриваемого моля с положительными и отрицательными значениями v' соответственно:

$$\sigma_1 = S_1/(S_1 + S_2),\quad \sigma_2 = S_2/(S_1 + S_2).$$

Проведем приближенное осреднение пульсации продольной компоненты скорости, используя для этого в качестве весовых множителей вероятности σ_1 и σ_2:

$$\overline{u'} \approx \sigma_1\left(-l_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right) + \sigma_2\left(l_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right) = l_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\,\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}. \tag{1.1}$$

Если в плоском случае такое осреднение дает нулевое значение для $\overline{u'}$, то в осесимметричном возникает отличный от нуля профиль $u_e(r) = \overline{u'}(r)$. Этот результат, строго говоря, несовместим с понятием пульсации.

Введем в рассмотрение эффективный профиль продольной компоненты скорости u_m с помощью соотношения $u_m + u_e = \bar{u}$. Воспользовавшись зависимостью (1.1), после преобразований получим

$$(1.2)\qquad \left|\frac{\partial u_m}{\partial r}\right| = \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right| [1 - Kg(r_*)], \quad r_* = \frac{r}{2R},$$
$$g(r_*) = 2\frac{\partial}{\partial r_*}\left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}\right),$$

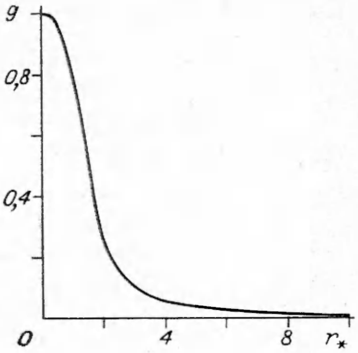

Рис. 3

где $K = 0{,}5$ — коэффициент, связанный с указанным выше соотношением лагранжева и эйлерова масштабов. Изменяя этот коэффициент, можно в дальнейшем скорректировать уменьшение модуля градиента эффективной скорости $|\partial u_m/\partial r|$. Если воспользоваться приближенной зависимостью $(S_1 + S_2) \approx 2S_0$, то функция $g(r_*)$ приобретает более простой вид

$$(1.3)\qquad g(r_*) = \frac{\partial}{\partial r_*}\left(\frac{S_2 - S_1}{S_0}\right).$$

Соотношение (1.3) может быть выражено аналитически. Решая геометрическую задачу о нахождении площадей S_1 и S_2, а затем дифференцируя по r_* относительную разность площадей, после преобразований находим

$$(1.4)\quad g(r_*) = \frac{4}{9\,\mathrm{arctg}(\sqrt{8}) - \sqrt{8}}\left[(2r_* - 1)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{2r_*^2 - r_* - 1}}{2r_*^2 - r_* - 2}\right) + \right.$$
$$\left. + (2r_* + 1)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{2r_*^2 + r_* - 1}}{2r_*^2 + r_* - 2}\right) - \frac{2}{r_*}\left(\sqrt{2r_*^2 - r_* - 1} + \sqrt{2r_*^2 + r_* - 1}\right)\right].$$

Проведем анализ полученного решения при $r_* \to \infty$. Разлагая в ряд по малому параметру r_*^{-1} соотношение (1.4) и удерживая главный член разложения, имеем после преобразований асимптотическое соотношение

$$g(r_*) = \frac{16\sqrt{2}}{3r_*^2\,[9\,\mathrm{arctg}(\sqrt{8}) - \sqrt{8}]} \xrightarrow[r_* \to \infty]{} 0.$$

В области $0 \leqslant r_* < 1{,}5$ предлагаемая теория неприменима, так как в этом случае перемещение моля в сторону оси симметрии требует другой интерпретации. Попробуем экстраполировать на ось ($r_* = 0$) функцию $g(r_*)$ (1.4). Представляя $g(r_*)$ в виде квадратного трехчлена и требуя неразрывности функции и ее производной при $r_* = 1{,}5$, а также обращения в нуль производной при $r_* = 0$, получим после вычислений, что $g(0) \approx 1{,}0102$. Учитывая этот результат, экстраполяционную функцию скорректируем следующим образом:

$$(1.5)\qquad g(r_*) = 1 - [1 - g(1{,}5)]\,(2r_*/3)^2, \quad 0 \leqslant r_* < 1{,}5.$$

График функции $g(r_*)$ (см. (1.4) и (1.5)) представлен на рис. 3. Видно, что функция монотонно убывает при увеличении r_*.

Таким образом, предлагаемая интерпретация теории Прандтля для осесимметричного течения позволяет ввести в рассмотрение эффективный модуль градиента скорости ($|\partial u_m/\partial r|$), связанный с модулем градиента осредненной скорости ($|\partial \bar{u}/\partial r|$) зависимостью (1.2).

2. Модификация моделей турбулентности. Вначале используем полученный результат для усовершенствования однопараметрической модели турбулентности [1]. В случае осесимметричного изобарического струйного течения несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) эта модель имеет вид

(далее знак осреднения опущен)

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)+\varepsilon\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|\alpha. \tag{2.1}$$

В [1] полагалось, что для струйных течений $\alpha = 0{,}2$. В данной работе α определяется как

$$\alpha = 0{,}2\,[1 - Kg(0{,}5r/R)]. \tag{2.2}$$

Введением дополнительного множителя, заключенного в квадратные скобки, учитывается отмеченное выше уменьшение модуля эффективного градиента скорости (см. соотношение (1.2)).

Установим связь между радиусом моля R и характеристиками течения. Предположим, что радиус моля равен интегральному масштабу турбулентности в поперечном направлении:

$$R = L_r. \tag{2.3}$$

Воспользуемся затем следующими экспериментальными данными, приведенными в [5] и относящимися к середине плоского слоя смешения несжимаемой жидкости:

$$\varepsilon/(Ux) = (1{,}6 \div 2{,}2)\cdot 10^{-3},\ L_r \approx 0{,}04x, \tag{2.4}$$
$$\sqrt{q}/U \approx 0{,}19,\ \varepsilon|\partial u/\partial y| \approx 0{,}3q.$$

Здесь U — скорость струи; q — энергия турбулентности. Используя соотношения (2.3), (2.4), получим после преобразований искомую связь между радиусом моля и характеристиками течения:

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C\sqrt{|\partial u/\partial r|}},\quad C = 0{,}38 \div 0{,}53. \tag{2.5}$$

Таким образом, модифицированная однопараметрическая модель турбулентности описывается соотношениями (1.4), (1.5), (2.1), (2.2), (2.5) и двумя константами K и C.

Аналогичную модификацию проведем и для двухпараметрической модели [2], в которую входят уравнения для энергии турбулентности q и скорости диссипации ω. В случае осесимметричного изобарического струйного течения несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) эта модель имеет вид

$$u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon\frac{\partial q}{\partial r}\right)+P-\omega; \tag{2.6}$$

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\varepsilon}{1{,}3}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)+\frac{\omega}{q}\left[1{,}45P-2\omega\right]; \tag{2.7}$$

$$\varepsilon = 0{,}09q^2\omega^{-1},\ P = \varepsilon\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2. \tag{2.8}$$

Модификация состояла в замене модуля градиента скорости, содержащегося в выражении для порождения P, на его эффективное значение P_m. Воспользовавшись соотношением (1.2), получим выражение для модифицированного порождения:

$$P_m = \varepsilon\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2[1 - Kg(0{,}5r/R)]^2. \tag{2.9}$$

Таким образом, модифицированная двухпараметрическая модель турбулентности описывается соотношениями (1.4), (1.5), (2.5)—(2.9) и двумя константами C и K.

3. Расчет осесимметричной струи. Для проверки эффективности модифицированных моделей турбулентности были проведены расчеты осесимметричной изобарической затопленной струи несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$). Начальные профили относительной скорости $u_a = u(x, r)/u(0, 0)$ и относительного коэффициента турбулентной вязкости

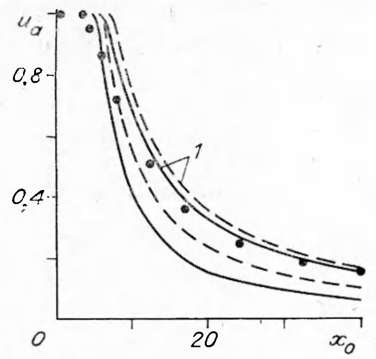

Рис. 4

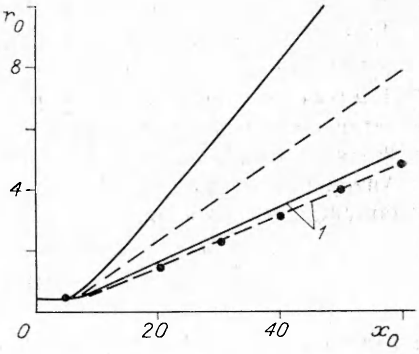

Рис. 5

$\varepsilon_a = 2\varepsilon(x, r)/(u(0, 0)D)$ задавались в виде

$$u_a(0, r) = \begin{cases} 1, & r/D \leqslant 0{,}45, \\ 10(1 - 2r/D), & 0{,}45 < r/D \leqslant 0{,}5, \\ 0, & r/D > 0{,}5, \end{cases}$$

$$\varepsilon_a(0, r) = \begin{cases} \varepsilon_0, & r/D \leqslant 0{,}5, \\ 0, & r/D > 0{,}5, \end{cases}$$

где D — диаметр сопла; значение ε_0 находилось из условия, что число Рейнольдса $\mathrm{Re}_D = VD/\varepsilon_0 = 10^4$. Скорость V определялась следующим образом:

$$V = \frac{2}{D}\sqrt{2\int_0^{D/2} u^2(0, t)\, t\, dt}.$$

Расчет осуществлялся с помощью консервативной конечно-разностной схемы [6] первого порядка точности. Количество узлов конечно-разностной сетки в поперечном сечении струи полагалось равным 160 и 320. Результаты расчетов на крупной и мелкой сетках отличались друг от друга не более чем на 1 %. Результаты расчетов сопоставлялись с экспериментальными данными Роди, приведенными в [7]. При использовании модифицированной однопараметрической модели турбулентности наилучшее согласование расчетных и экспериментальных данных получено при $C = 0{,}47$ и $K = 1$, а двухпараметрпческой — при $C = 0{,}62$ и $K = 1$. Результаты расчетов по одно- и двухпараметрической моделям турбулентности представлены на рис. 4—6 сплошными и штриховыми линиями соответственно. Расчеты проводились как с использованием модификации, так и без ее использования. Расчетные линии, полученные с помощью модифицированных моделей, отмечены цифрой *1*. На рис. 4, 5 приведены данные по изменению вдоль оси ($x_0 = x/D$) относительной скорости u_a и относительной полуширины $r_0 = r_+/D$, определенной по профилю скорости с помощью соотношения $u(x, r_+) = 0{,}5u(x, 0)$.

На рис. 6 показан профиль относительной скорости u_a в сечении $x/D = 40$. Видно, что модификация моделей турбулентности позволила значительно повысить точность описания смешения в осесимметричной струе.

Была рассчитана скорость расширения струи $r_0' = dr_+/dx$ в основном участке струи $(60 < x/D < 100)$. Если до модифи-

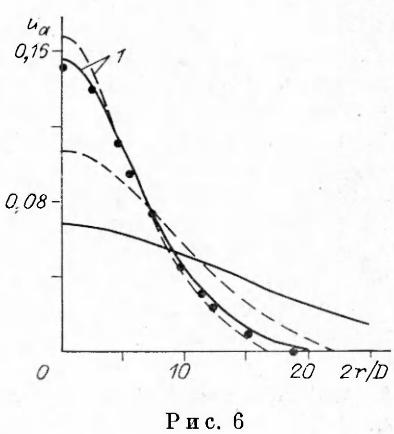

Рис. 6

кации однопараметрической модели $r_0' = 0{,}244$, то после модификации $r_0' = 0{,}091$, а если до модификации двухпараметрической модели $r_0' = 0{,}142$, то после $r_0' = 0{,}085$.

Заметим, что для двухпараметрической модели в [8] был осуществлен учет осесимметричности течения, основанный на соображениях, отличных от описанных в данной работе.

Автор благодарит А. Н. Секундова за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.** Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомодельности.— М.: Машиностроение, 1975.
2. **Jones W. P., Launder B. E.** The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transfer.— 1973.— V. 16, N 6.
3. **Prandtl L.** Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // ZAMM.— 1925.— Bd 5.— S. 136.
4. **Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.** Связь между коэффициентом диффузии и эйлеровыми характеристиками турбулентности в различных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 1.
5. **Теория** турбулентных струй/Под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Наука, 1984.
6. **Патанкар С., Сполдинг Д.** Тепло- и массообмен в пограничных слоях.— М.: Энергия, 1971.
7. **Chang K., Lin R.** A comparison of turbulence models for uses in calculations of free jets and flames.— N. Y., 1989.— (Pap./AIAA; N 220).
8. **Pope S. B.** An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly // AIAA J.— 1978.— V. 16, N 3.

г. Москва *Поступила 26/VII 1991 г., в окончательном варианте — 12/II 1992 г.*

УДК 533.6.011.5

А. Н. Богданов, В. А. Куликовский

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫЕ ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА

Образование ударных волн в трансзвуковых течениях — проблема, далекая от окончательного решения. В обычной газовой динамике существуют многочисленные примеры построения свободных от разрывов трансзвуковых течений и течений с переходом через скорость звука, содержащих разрывы (см., например, [1]). Эксперименты подтвердили существование непрерывных [2] и содержащих разрывы [3] трансзвуковых течений. Обоснование исключительности безударного течения в местной сверхзвуковой зоне проведено в [4], в связи с чем сформировалось мнение о невозможности непрерывного торможения трансзвукового потока [5]. По мнению авторов [6], такое течение либо делается неустановившимся, либо содержит ударные волны, либо то и другое вместе. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является изучение трансзвукового течения на устойчивость по отношению к стационарным и нестационарным возмущениям, которые могут возникать в потоке из-за неровностей ограничивающих течение стенок или вызываться падением на звуковую линию слабых нестационарных волн. В общем виде такое исследование сложно, обычно используются приближенные методы.