

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КВАЗИОДНОМЕРНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

Ф. А. Слободкина

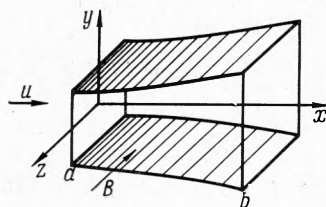
(Москва)

Качественное исследование системы дифференциальных уравнений, описывающих квазиодномерное установившееся течение электропроводной среды при малых магнитных числах Рейнольдса, дает представление о возможных режимах течения, реализующихся при различном задании электромагнитного поля и формы канала. Такое рассмотрение необходимо для расчета одномерных течений, а также при решении вариационных задач [1].

В литературе, посвященной этому вопросу, изучались течения в однородном электромагнитном поле и канале постоянного сечения [2], а также течения при специально заданных зависимостях магнитного поля от скорости течения [3]. Эти случаи сводились к анализу интегральных кривых на плоскости.

В настоящей работе исследование проводится для произвольного распределения электрического и магнитного полей и формы канала, что приводит к рассмотрению поведения интегральных кривых в пространстве. Качественные результаты иллюстрируются примерами.

1. Рассмотрим стационарное течение идеальной, сжимаемой, электропроводной среды в плоском канале (фиг. 1) при внешнем магнитном поле



Фиг. 1

$\mathbf{B}^\circ = (0, 0, -B^\circ)$. Верхняя и нижняя стенки канала — проводники с потенциалами ϕ° и $-\phi^\circ$ соответственно. При $x^\circ < 0$ стенки канала — изоляторы и $B^\circ \equiv 0$. Газ течет в положительном направлении оси x из ресивера, где он имеет плотность ρ_s° , энтальпию h_s° и электропроводность σ_s° .

Предполагая течение одномерным, магнитное число Рейнольдса малым, справедливой обычную форму закона Ома и считая, что среда является совершенным газом, запишем уравнения движения, энергии и неразрывности [1]

$$\begin{aligned} \rho u u' + p' + \Delta \sigma B \left(u B - \frac{\Phi}{y} \right) &= 0 \quad \left(\Delta = \frac{B_*^{\circ 2} \sigma_s^\circ l^\circ}{\rho_s^\circ \sqrt{2 h_s^\circ}} \right) \\ \left[y u \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) \right]' + \Delta \sigma \Phi \left(u B - \frac{\Phi}{y} \right) &= 0, \quad \rho u y = m \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $2y$ — высота канала, u — скорость, p — давление, m — расход, Δ — безразмерный параметр, κ — отношение теплоемкостей, штрихом обозначены производные по x , величины с индексом $^\circ$ — размерные, без него — безразмерные. Связь размерных и безразмерных переменных дается соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^\circ}{l^\circ}, \quad y = \frac{y^\circ}{y_a^\circ}, \quad u = \frac{u^\circ}{\sqrt{2 h_s^\circ}}, \quad \rho = \frac{\rho^\circ}{\rho_s^\circ} \\ p &= \frac{p^\circ}{2 \rho_s^\circ h_s^\circ}, \quad \sigma = \frac{\sigma^\circ}{\sigma_s^\circ}, \quad B = \frac{B^\circ}{B_*^\circ}, \quad \Phi = \frac{\Phi^\circ}{y_a^\circ B_*^\circ \sqrt{2 h_s^\circ}} \end{aligned}$$

где l° — длина канала, B_*° — максимальная напряженность магнитного поля при $0 \leq x \leq 1$, нижние индексы a, b приписываются параметрам в начальном и конечном сечениях канала, индекс s относится к параметрам в ресивере.

Из (1.1) следует, что течение в канале определяется его формой $y(x)$, напряженностью магнитного поля $B(x)$, электрическим потенциалом $\Phi(x)$ и граничными условиями в начальном и конечном сечениях канала. Будем считать, что функции $B(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны всюду, за исключением отдельных точек, где они могут иметь разрыв первого рода, а $y(x)$ — непрерывна и положительна.

Предположим, что при $x = 0$ известны параметры u_a, p_a, ρ_a , а при $x = 1$ в зависимости от режима течения выполняется одно из условий

$$M_b < 1, \quad p_b = p_\infty \quad \left(M = \sqrt{\frac{mu}{\kappa p y}} \right) \quad (1.2)$$

$$M_b \geq 1, \quad p_b \geq p_\infty \quad (1.3)$$

где M_b — число Маха в выходном сечении канала, а p_∞ — давление среды, в которую происходит истечение.

Вводя вместо давления p число Маха M и исключая p при помощи уравнения неразрывности, получим вместо (1.1) эквивалентную систему

$$\begin{aligned} M' &= \frac{M [1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) M^2]}{mu^2 (1 - M^2)} \left(\kappa M^2 y \Delta \sigma \alpha \beta_1 - mu^2 \frac{y'}{y} \right) \\ u' &= \frac{u}{mu^2 (1 - M^2)} \left(\kappa M^2 y \Delta \sigma \alpha \beta_2 - mu^2 \frac{y'}{y} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь

$$\alpha = uB - \frac{\Phi}{y}, \quad \beta_1 = uB - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1 + \kappa M^2}{2 + (\kappa - 1) M^2} \frac{\Phi}{y}, \quad \beta_2 = uB - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\Phi}{y}$$

Второе уравнение (1.4) можно преобразовать к виду

$$u' = \frac{u}{M [1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) M^2]} M' - \frac{(\kappa - 1) \Delta \Phi M^2 \alpha}{mu [2 + (\kappa - 1) M^2]} \quad (1.5)$$

При $\alpha > 0$ имеем режим генератора, при $\alpha < 0$ — режим ускорителя [2, 3]. В дальнейшем для простоты выкладок положим $\sigma \equiv 1$.

2. При постоянных B, Φ, y система (1.4) автономна и может быть исследована в плоскости uM , что было сделано в [2]. При произвольных $B(x)$ и $y(x)$, но $\Phi \equiv 0$ второе уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах и система (1.4) сводится к уравнению

$$M' = \frac{M [1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) M^2]}{1 - M^2} \left(\kappa M^2 y \Delta \frac{B^2}{m} - \frac{y'}{y} \right)$$

анализ которого проводится в плоскости xM .

В общем случае при произвольных зависимостях B, Φ, y от x необходимо рассматривать пространство xuM , причем для настоящего исследования представляют интерес лишь интегральные кривые, принадлежащие области

$$0 \leq x \leq 1, \quad u > 0, \quad M > 0 \quad (2.1)$$

Одна из границ этой области (плоскость $x = 0$) есть плоскость начальных данных, а две другие — плоскости $u = 0$ и $M = 0$ состоят из интегральных кривых системы (1.4) вида

$$M = 0, \quad u = \text{const } y(x), \quad u = 0, \quad x = \text{const}$$

Для нахождения особых точек приравняем нулю числители и знаменатели правых частей уравнений (1.4)

$$M \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right) (\kappa M^2 y \Delta \alpha \beta_1 - m u^2 \frac{y'}{y}) = 0$$

$$u \left(\kappa M^2 y \Delta \alpha \beta_2 - m u^2 \frac{y'}{y} \right) = 0, \quad m u^2 (1 - M^2) = 0$$

Из вида этих уравнений следует, что их решением являются не отдельные изолированные точки, а некоторые линии. Эти линии, назовем их особыми, следующие:

$$M = 0, \quad u = 0 \quad (2.2)$$

$$M = 1, \quad u = \left[(2\kappa - 1) y \pm \left(y^2 + \frac{4(\kappa-1) m y'}{\Delta B^2} \right)^{1/2} \right] \left(\frac{2\kappa B}{\Phi} y^2 - \frac{2m y'}{\Delta B \Phi} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Исследуем характер особенностей на линии (2.2), т. е. оси x . Система (1.4) при малых u и M приводится к виду

$$M' = \frac{\mu_1 M^3 + \mu_2 M u^2}{m u^2} \quad \left(\mu_1 = \frac{\Delta \Phi^2 (\kappa - 1)}{2y}, \quad \mu_2 = -m \frac{y'}{y} \right) \quad (2.4)$$

$$u' = \frac{2\mu_1 M^2 u + \mu_2 u^3}{m u^2}$$

Рассмотрим поведение интегральных кривых в окрестности плоскости $u = 0$, т. е. в малой области Ω , определяемой неравенствами $M < \epsilon$ и $u \ll M$. Тогда, пренебрегая вторыми слагаемыми в числителях правых частей уравнений (2.4), получим, что $M' > 0$, $u' > 0$, так как $\mu_1 / m > 0$.

Это значит, что интегральные кривые при $u \ll M$ выходят из особых точек оси x и с ростом x покидают область Ω . Никакая интегральная кривая при увеличении x не может войти в область Ω , и поэтому для нее в окрестности особой точки выполняется соотношение $M/u < \text{const}$, подстановка которого в (2.4) дает, что если $M \rightarrow 0$ и $u \rightarrow 0$, то $x \rightarrow \infty$. Итак, на конечном отрезке оси x ни одна интегральная кривая не входит в особые точки оси x при возрастании x .

Перейдем к исследованию характера особых точек на линии (2.3), расположенной в плоскости $M = 1$.

Ввиду того что в окрестности особой точки, принадлежащей линии (2.3), приращение u выражается через приращения M и x согласно (1.5), интегральные кривые в окрестности этой точки лежат в некоторой плоскости, и характер особенности может быть проанализирован методом, применяемым для кривых на плоскости. Для производных M' , вычисленных вдоль собственных направлений, получается уравнение

$$M'^2 + \gamma_1 M' + \gamma_2 = 0 \quad (2.5)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{\kappa+1}{2} \frac{\kappa y \Delta}{m u^2} \left(u B - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\Phi}{y} \right) \left(u B - \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{\Phi}{y} \right)$$

$$\gamma_2 = \gamma_2^* + \gamma_2^{**}$$

$$\gamma_2^* = \frac{(\kappa+1) \kappa \Delta y'}{4 m u^2 \beta_2} \left[u B \beta_2 (\alpha + \beta_2) - \frac{\kappa-1}{\kappa(\kappa+1)} \frac{\Phi^2}{y^2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} \alpha + \beta_2 \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\gamma_2^{**} = \frac{(\kappa+1) \kappa \Delta y}{4 m u^2} \left[u B' (\alpha + \beta_2) - \frac{\Phi'}{y} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} \alpha + \beta_2 \right) - \frac{y''}{y'} \alpha \beta_2 \right]$$

В зависимости от значения корней уравнения (2.5) возможен различный характер особенностей [4].

Первый случай. Корни (2.5) действительны, различны по величине и оба отрицательны. В этом случае особая точка — узел, и в ее окрестности коэффициенты (2.6) удовлетворяют условиям

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 \geq 0, \frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2 \geq 0 \quad (2.7)$$

В такой особой точке непрерывный переход через скорость звука возможен только от сверхзвукового течения к дозвуковому. Ту часть интегральной кривой, которая соответствует сверхзвуковому течению, определяет задание начальных условий при $x=0$ $M = M_a$, $u = u_a$, а интегральная кривая, соответствующая дозвуковому течению от особой точки до $x = 1$, определяется одним из условий (1.2) или (1.3).

Второй случай. Корни (2.5) действительны, различны по величине и противоположны по знаку. В этом случае особая точка является седлом, и в ее окрестности выполняется условие

$$\gamma_2 < 0 \quad (2.8)$$

В особенности такого типа возможен непрерывный переход от дозвукового течения к сверхзвуковому вдоль одной интегральной кривой, входящей в седло с $M' > 0$, и непрерывный переход от сверхзвукового течения к дозвуковому вдоль другой интегральной кривой, входящей в седло с $M' < 0$.

Пример течения, соответствующего переходу через скорость звука, в особенности такого типа, хорошо известен в газовой динамике (сопло Лавала), где в точке перехода должно выполняться условие $y' = 0$.

Третий случай. Корни (2.5) — комплексные. В этом случае особая точка — фокус, и в ее окрестности выполняется условие

$$\frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2 < 0 \quad (2.9)$$

При особенности такого типа непрерывный переход через скорость звука невозможен. Течения, реализующиеся в этом случае, могут быть либо полностью сверхзвуковыми, либо полностью дозвуковыми, либо с переходом от сверхзвукового режима к дозвуковому в ударной волне.

Четвертый случай. Корни (2.5) — действительны, различны по величине и оба положительны.

В этом случае особая точка также является узлом, и в ее окрестности выполняются условия

$$\gamma_1 < 0, \gamma_2 \geq 0, \frac{1}{4}\gamma_1^2 - \gamma_2 \geq 0 \quad (2.10)$$

Вблизи такой особенности возможен непрерывный переход от дозвукового течения к сверхзвуковому. Из соотношений (2.10), (2.3) и (2.6) следует, что такого рода особенность может существовать в сужающемся канале ($y' < 0$), в режиме ускорителя. Очевидно, что в этом случае нельзя построить однозначного решения, так как из особой точки выходит семейство кривых, зависящее от одного параметра, каждая кривая которого удовлетворяет условию $M_b > 1$, $p_b > p_\infty$.

Заметим, что получение этих режимов возможно лишь нестационарным путем, так как квазистационарному увеличению перепада давлений ($p_s - p_\infty$) соответствуют кривые из области Q и ее граничная кривая l , схематично представленные в плоскости xM на фиг. 2. В дальнейшем этот тип особенности рассматриваться не будет.

Особенностям различных типов соответствуют различные режимы течений. В зависимости от характера течения рассматриваемую часть пространства (2.1) можно разделить на ряд областей.

Для наглядности проведем сначала анализ областей для более простого случая $\varphi = 0$, который сводится к исследованию интегральных кривых на плоскости, а затем распространим результаты на пространственный случай.

При $\varphi = 0$, $B = B(x)$, $y = y(x)$ коэффициенты (2.6) имеют вид

$$\gamma_1 = \frac{(\kappa + 1)\kappa y \Delta B^2}{2m}, \quad \gamma_2^* = \frac{2(\gamma_1)^2}{\kappa + 1}, \quad \gamma_2^{**} = \gamma_1 \left(\frac{B'}{B} - \frac{y''}{2y'} \right)$$

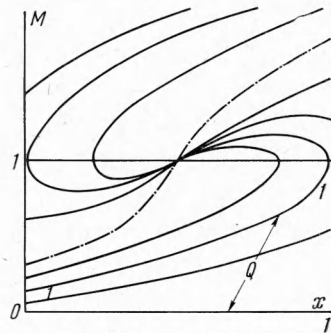
Рассмотрим первый случай¹. Условия (2.7) налагают на B' и y'' ограничения

$$-\frac{2\gamma_1}{\kappa + 1} \leq \frac{B'}{B} - \frac{y''}{2y'} \leq \frac{\kappa - 7}{4(\kappa + 1)} \gamma_1$$

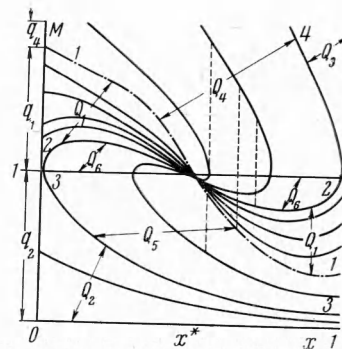
при выполнении которых особая точка является узлом (фиг. 3). Сепаратрисса узла I (на фиг. 3 она дана штрих-пунктирной линией) отделяет интегральные кривые, входящие в узел при $M > 1$, от кривых, входящих в узел при $M < 1$. В области Q_1 , расположенной между сепаратриссой I и интегральной кривой 2, находятся решения с непрерывным переходом через скорость звука. На прямой $x = 0$ области Q_1 соответствуют начальные данные из отрезка q_1 .

Ниже интегральной кривой 3 находится область Q_2 , интегральные кривые которой соответствуют полностью дозвуковому течению с начальными данными из отрезка q_2 .

Полностью сверхзвуковые течения реализуются в области Q_3 , расположенной выше интегральной кривой 4, приходящей в точку $M = 1$, $x = 1$. Начальные данные решений этой области заключены в полубесконечном отрезке q_3 .



Фиг. 2



Фиг. 3

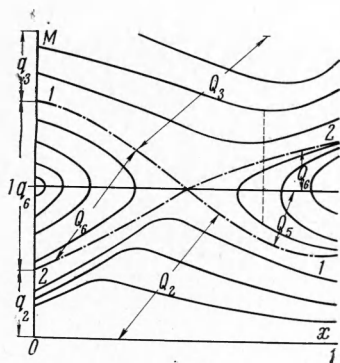
Сепаратрисса I , интегральная кривая 4 и прямая $M = 1$ выделяют область Q_4 , вдоль интегральных кривых которой решение непрерывным образом продолжимо лишь до $M = 1$ при $x < 1$. Интегральные кривые из Q_4 соответствуют сверхзвуковому течению перед ударной волной, а дозвуковая часть такого решения принадлежит либо области Q_2 , либо дозвуковой части области Q_1 , либо области Q_5 , заключенной между интегральной кривой 3, прямой $M = 1$ и сепаратриссой I .

Положение ударной волны в канале (на фиг. 3 дано пунктиром) определяется условием при $x = 1$.

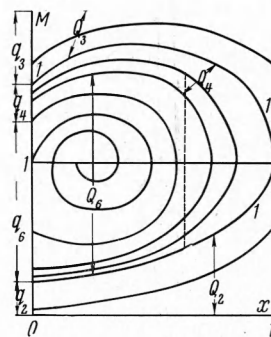
¹ В настоящей работе подробнее других описывается особенность типа узла, так как ей соответствует наиболее разнообразный набор областей течений.

Решениям с ударной волной соответствуют начальные данные из интервала q_4 . Интегральные кривые из области Q_6 , ограниченной прямой $M = 1$ и кривой 2, не отвечают реализующимся течениям.

В зависимости от положения особой точки $x = x^*$ в канале некоторые области могут увеличиваться, уменьшаться или вообще исчезать. Например, при $x^* = 1$ область Q_4 отсутствует.



Фиг. 4



Фиг. 5

Предположим теперь, что в пространственном случае при $\varphi(x) \neq 0$ в плоскости $M = 1$ имеется одна особая линия, вся состоящая из узлов. Сепаратрисы узлов образуют поверхность в пространстве xuM , отделяющую решения с непрерывным переходом через скорость звука от решений с ударной волной. Поверхность сепаратрис и плоскость $M = 1$ в пересечении с плоскостью $x = 0$ выделяют область начальных значений (u, M) , откуда берут начало течения с непрерывным переходом через скорость звука.

Интегральные кривые, имеющие $M = 1$ при $x = 1$ (аналогичные кривой 4 на фиг. 3), образуют поверхность, отделяющую сверхзвуковые течения в канале от течений с ударной волной, а интегральные кривые, имеющие $M = 1$ при $x = 0$, образуют поверхность, отделяющую дозвуковые и сверхзвуковые течения от интегральных кривых, аналогичных кривым из областей Q_5 и Q_6 на плоскости.

В пересечении с плоскостью $x = 0$ эти области выделяют соответствующие им области начальных значений.

Во втором случае при $\varphi = 0$ условия (2.8) дают

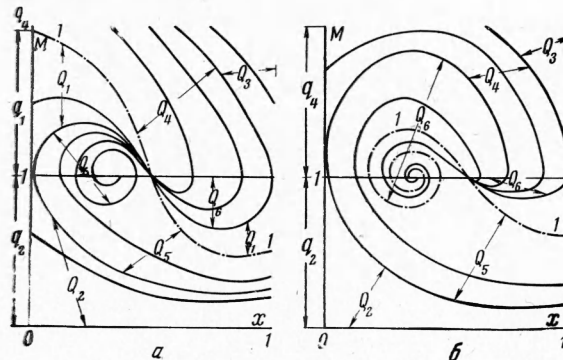
$$\frac{B'}{B} - \frac{y''}{2y'} < -\frac{2\gamma_1}{\kappa + 1}$$

и особая точка является седлом.

Сепаратрисы седла 1 и 2 (фиг. 4) разделяют поле интегральных кривых на области: Q_2 — ниже обеих сепаратрис, где реализуются полностью дозвуковые течения; Q_3 — выше обеих сепаратрис, где реализуются полностью сверхзвуковые течения; Q_5 — между сепаратрисой 1 и прямой $M = 1$ справа от особой точки. Интегральные кривые, принадлежащие Q_5 , соответствуют дозвуковому течению за ударной волной, если сверхзвуковая часть решения лежит в области Q_3 или на ее границе; Q_6 — слева от особой точки между сепаратрисами и справа между сепаратрисой 2 и прямой $M = 1$. Интегральные кривые этой области не отвечают рассматриваемым течениям. Непрерывный переход через скорость звука возможен лишь вдоль сепаратрис.

Областям Q_2, Q_3, Q_6 соответствуют начальные данные из q_2, q_3, q_6 .

В пространственном случае, при $\varphi = \varphi(x)$, если имеющаяся особая линия состоит только из особенностей типа седла, сепаратрисы седел образуют поверхности, разделяющие часть пространства (2.1) на области, аналогичные областям на плоскости, а реализующиеся типы течений подобны вышерассмотренным.



Фиг. 6

При особенности типа фокуса (фиг. 5) в случае $\varphi = 0$ неравенства (2.9) дают

$$\frac{B'}{B} - \frac{y''}{2y'} > \frac{\kappa - 7}{4(\kappa + 1)} \gamma_1$$

При этом течения могут быть либо полностью сверхзвуковыми — в области Q_3 , либо полностью дозвуковыми — в области Q_2 , либо с переходом от сверхзвукового течения к дозвуковому в ударной волне.

В области Q_4 лежат интегральные кривые, соответствующие сверхзвуковой части решения, а в области Q_2 и на ее границе — интегральной кривой 1 — находятся решения за ударной волной.

Интегральные кривые из области Q_6 не отвечают реализующимся течениям.

Здесь не анализируются вырожденные особенности, такие, как центр (корни (2.5) мнимые), узел с одним характерным направлением (корни совпадающие) и т. п., так как наличие таких особенностей не приводит к новым типам течений.

Рассмотрим теперь различные случаи взаимодействия особенностей для интегральных кривых на плоскости ($\varphi = 0$). Пусть, например, в рассматриваемой области имеются фокус и узел (фиг. 6). Может представиться два случая:

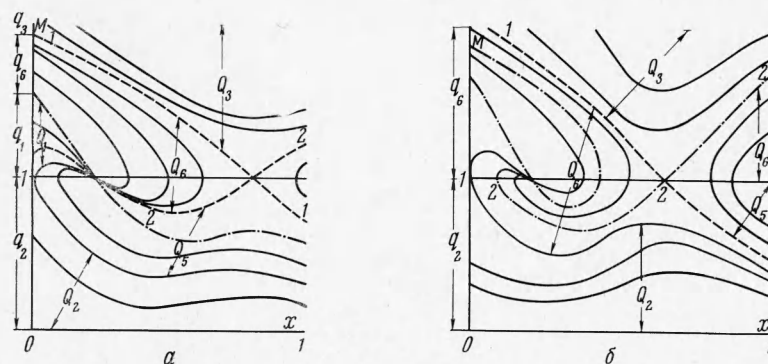
сепаратриса 1 узла пересекает прямую $x = 0$, и решения с непрерывным переходом через скорость звука возможны (фиг. 6, а);

сепаратриса 1 узла не пересекает прямую $x = 0$, и, следовательно, не существует решений с непрерывным переходом через скорость звука (фиг. 6, б).

На прямой $x = 0$ в первом случае будут области начальных значений q_i , соответствующие течениям в окрестности узла, а во втором случае области, соответствующие решениям в окрестности фокуса.

При взаимодействии фокуса и седла возможные случаи аналогичны вышерассмотренным. Если в рассматриваемой области имеются узел и седло (фиг. 7), то переход через скорость звука может осуществиться дважды — сначала в узле от сверхзвукового течения к дозвуковому, затем в седле от дозвукового к сверхзвуковому при условии, что сепаратриса

2 седла выходит из узла (фиг. 7, а). Если сепаратрисса 2 седла начинается в области Q_6 (фиг. 7, б), то решение с непрерывным переходом через скорость звука возможно только вдоль сепаратриссы 1 седла. В первом случае на прямой $x = 0$ будут иметься начальные значения, соответствующие течениям в окрестности узла и седла, во втором случае начальные данные, соответствующие решениям с переходом через скорость звука, в



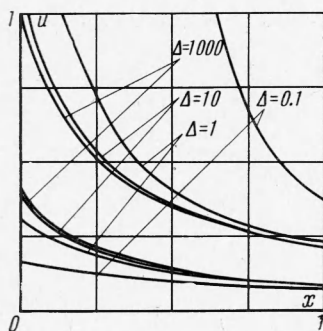
Фиг. 7

узле попадают в область q_6 седла. Таким же образом можно проанализировать и другие сочетания особенностей.

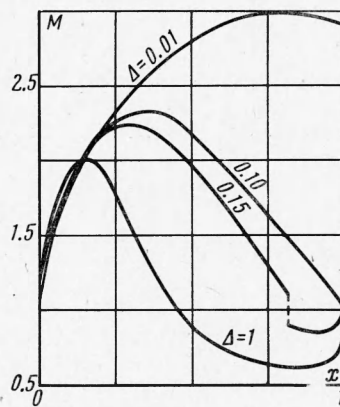
При $\varphi = \varphi(x)$ в общем случае в области (2.1) может быть любой набор особенностей, меняющих свой характер вдоль линии (2.3). Анализ их взаимодействия аналогичен вышеизложенному.

3. В качестве примера приведем анализ возможных режимов течения в однородном электромагнитном поле и канале, расширяющемся по линейному закону.

В расчетах, иллюстрирующих этот пункт, значения постоянных величин выбраны следующими: $B = 1$, $\varphi = 1$, $\kappa = 5/3$, угол между стенкой и осью канала $\hat{\psi} = 20^\circ$ и соответствующее ему $y'l^\circ / y_a^\circ = 3.64$, число Маха и скорость на входе в канал $M_a = 1$, $u_a = 0.5$, при этом $m = 0.32479$.



Фиг. 8



Фиг. 9

Предполагая, что течение до входа в МГД-канал происходило без подвода энергии, получим, что скорость $u \leq 1$ во всем течении, и, следовательно, в рассматриваемом примере область пространства (x, u, M) определяется неравенствами

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 < u \leq 1, \quad M > 0 \quad (3.1)$$

Особая линия (2.3) в плоскости $M = 1$, представленная на фиг. 8, состоит из двух ветвей: $u = u_1$ и $u = u_2$, соответствующих знакам плюс и минус в уравнении (2.3).

С увеличением значения параметра Δ линии одной ветви сближаются, стремясь к предельному положению при $\Delta \rightarrow \infty$

$$u_1 = \frac{\varphi}{By}, \quad u_2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\varphi}{By}$$

Исследование показало, что вдоль линии $u = u_2$ особые точки являются седловыми для всех значений Δ и всех x в области (3.1).

В окрестности этой ветви особой линии $\alpha < 0$, т. е. течение происходит в режиме ускорителя.

В окрестности линии $u = u_1$ течение происходит в режиме генератора. Из (2.6) следует, что $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2^{**} = 0$ и $\gamma_2 = \gamma_2^* > 0$ для рассматриваемого типа МГД-канала при $\alpha > 0$, и поэтому особые точки могут быть либо фокусами, либо узлами.

При $\Delta = 0.1$ для x и u , принадлежащих области (3.1), линия $u = u_1$ состоит из фокусов; при $\Delta = 1$ для $0 \leq x < 0.44$ особые точки — фокусы, а для $0.44 \leq x \leq 1$ особые точки — узлы. Для $\Delta \geq 10$ особая линия $u = u_1$ состоит из узлов.

Таким образом, в ускорителе, соответствующем рассматриваемому примеру, реализуются течения, исследованные в п. 2 во втором случае, а в генераторе — течения, исследованные в п. 2 в первом и третьем случаях. Проследим за интегральной кривой с начальными данными $M_a = 1$, $u_a = 0.5$ и изменением характера течения с ростом параметра Δ . При $x = 1$ выполняется условие $M_b \geq 1$, $p_b \geq p_\infty$.

На фиг. 9 представлено изменение числа Маха M вдоль канала для различных Δ . При $\Delta \leq 0.1$ течение в канале полностью сверхзвуковое; при $0.1 < \Delta \leq 0.55$ переход от сверхзвукового течения к дозвуковому происходит в ударной волне, так как интегральная кривая подходит к особенности типа фокуса; при $\Delta \geq 0.55$ сверхзвуковое течение непрерывно переходит в дозвуковое, в особенности типа узла.

В заключение отметим, что проведенное исследование можно перенести на более общий случай течения с трением и теплообменом, если известна зависимость соответствующих коэффициентов от параметров течения, продольной координаты и т. п.

Поступила 18 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К решению вариационных задач одмерной магнитной гидродинамики. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
2. Resler E., Sears W. The prospects for magnetoaerodynamics. J. Aeronaut. Soc., 1958, vol. 25, No. 4. (русс. пер.: «Механика». Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, № 6).
3. Culik F. E. C. Compressible Magnetogasdynamics Channel Flow. Z. Angewante Math. und Phys., 1964, vol. 15, No. 2.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.