

ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ ЗВЕЗДООБРАЗНОГО КОНТУРА

Ю. А. ВЕДЕРНИКОВ, И. Д. СУЗДАЛЬНИЦКИЙ

(Новосибирск)

При пробитии пластины пространственным звездообразным ударником [1, 2] образуются экзотические по форме пробоины. Пробоина либо повторяет контур ударника, либо описывает его. При этом угловым точкам ударника соответствуют либо скругленные участки в пробоине, либо выходящие на ее края трещины.

Для упрощения математической постановки задачи исследуется первая основная задача теории упругости [3] в приложении к звездообразным отверстиям и ударнику, что соответствует реальной физической картине [4].

В данной работе рассматриваются случаи, когда звездообразное отверстие имеет криволинейную границу. Контурные кривые, описывающие грани, на концах лучей имеют общие касательные, т. е. вырождаются в разрезы. Определяется зависимость коэффициента интенсивности напряжений на концах разреза от числа лучей и отношения длин наибольшего радиуса звезды к наименьшему. Поведение достаточно длинной трещины в конце луча изучается на примере плоскости с угловым вырезом и продолжающим его разрезом. Рассмотрена звезда со скругленными углами, определяется зависимость коэффициента концентрации напряжений в угловых точках от тех же параметров и радиуса скругления.

1. Функция напряжений, являющаяся решением бигармонического уравнения, может быть представлена в виде контурного интеграла [5]:

$$(1.1) \quad U^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [\rho_1(x, y, t) f_1(t) + \rho_2(x, y, t) f_2(t)] \ln r^2(x, y, t) dt,$$

$$\rho_1 = a(t)[x - x(t)] + b(t)[y - y(t)], \quad \rho_2 = -b(t)[x - x(t)] + a(t)[y - y(t)],$$

$$r^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — точка на контуре L , соответствующая данному значению параметра t ; $a(t)$, $b(t)$ — единичный вектор касательной к L в этой точке. Вводя дополнительные слагаемые, учитывающие однородное напряженное состояние плоскости, функцию напряжений разыскиваем в виде

$$(1.2) \quad U(x, y) = U^0(x, y) + 0,5(\sigma_1 y^2 + \sigma_2 x^2).$$

Если контур L образован n гладкими кривыми, $L = \bigcup_{k=0}^{n-1} L_k$, то

$$U^0(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} (\rho_{1k} f_{1k} + \rho_{2k} f_{2k}) \ln r_k^2 dt.$$

При этом ядра ρ_{1k} , ρ_{2k} выражаются через функции $x_k(t)$, $y_k(t)$, определяющие контур L_k согласно (1.1). При циклической симметрии в расположении кривых L_k и распределении внешних усилий следует положить $f_{jk}(t) = f_j(t)$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Нормальное и касательное напряжения в криволинейной системе координат ξ , η определяются равенствами

$$(1.3) \quad \sigma_\eta = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_{\xi\eta} = 0,5(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha,$$

где $\sigma_x = \partial^2 U / \partial y^2$; $\sigma_y = \partial^2 U / \partial x^2$; $\tau_{xy} = -\partial^2 U / \partial x \partial y$; α — угол между касательной к линии $\eta = \text{const}$ в направлении увеличения параметра t и осью x . На L

$$\exp(2i\alpha) = c + is - [x'(t) + iy'(t)] / [x'(t) - iy'(t)].$$

Подчиняя (1.2) в соответствии с (1.3) краевым условиям на L

$$\sigma_\eta = p_1(t), \quad \tau_{\xi\eta} = p_2(t),$$

получим сингулярное интегральное уравнение

$$(1.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_L G(t, \tau) f(\tau) d\tau = p(t),$$

где $p(t)$ — вектор внешних усилий; $f(t)$ — вектор разыскиваемых функций; $G(t, \tau)$ —

квадратная матрица порядка $2n$, диагональные элементы которой содержат особенность типа Коши.

Рассмотрим плоскость с отверстием в виде криволинейной звезды, контур которой касается лучей $\varphi = \varphi_k = 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и определяется уравнением $r = r(\varphi)$, заданным в полярных координатах φ, r . В силу циклической симметрии полагаем $r(\varphi + 2\pi/n) = r(\varphi)$, $p(\varphi + 2\pi/n) = p(\varphi)$.

При $r(-\varphi) = r(\varphi)$, $p_1(-\varphi) = p_1(\varphi)$, $p_2(\varphi) = 0$ векторное уравнение (1.4) приводится к сингулярному интегральному уравнению

$$(1.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/n} f_1(\tau) \left[\frac{G_0(t, \tau)}{t - \tau} + \sum_{k=1}^{n-1} G_k(t, \tau) \right] d\tau = p_1(t)$$

для единственной неизвестной функции $f_1(t)$, где

$$\begin{aligned} G_k(t, \tau) &= (a_k U_k + b_k V_k)/D_k + (a_k V_k - b_k U_k) [2c U_k V_k - s(U_k^2 - V_k^2)]/D_k^2, \\ x_k(t) &= r(t) \cos(\varphi_k - t), \quad y_k(t) = r(t) \sin(\varphi_k - t), \\ D_k &= U_k^2 + V_k^2, \quad a_k = x'_k(\tau), \quad b_k = y'_k(\tau), \\ U_k &= [x_0(t) - x_k(\tau)] \gamma_k(t, \tau), \quad V_k = [y_0(t) - y_k(\tau)] \gamma_k(t, \tau), \\ \gamma_0(t, \tau) &= 1, \quad \gamma_k(t, \tau) = (t - \tau)^{-1}, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

К уравнению (1.5) следует добавить условие однозначности перемещений

$$(1.6) \quad \int_L f(t) dt = 0.$$

Методом [6] уравнения (1.5), (1.6) приводятся к системе линейных алгебраических уравнений

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^N A_{ij} f_j = p_j.$$

Для этого полагаем

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{n} (1 + \cos \omega), \quad \tau = \frac{\pi}{n} (1 + \cos \theta), \\ f(\tau) &= \frac{1}{N \cos \theta} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} f_j \frac{\cos N\theta \sin \theta_j}{\cos \theta - \cos \theta_j}. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов A_{ij} системы (1.7) приведены в [6].

Распределение напряжений вблизи конца $r = r_0$ луча $\varphi = \varphi_k$ с точностью до бесконечно малых имеет вид $\sigma_\theta = K(r - r_0)^{-0.5}$, где параметр K , называемый коэффициентом интенсивности напряжений, пропорционален величине [5]

$$(1.8) \quad \kappa = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (-1)^j f_j \operatorname{ctg} \frac{\theta_j}{2}.$$

При вычислениях принималось N равным 17 и 21, уравнение контура

$$r(\varphi) = r_1 - \frac{n}{\pi} (r_1 - r_2) \sqrt{\varphi \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right)}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n},$$

площадь звезды

$$S = \frac{\pi}{6} [(10 - 3\pi) r_1^2 + 4r_2^2 + (3\pi - 8) r_1 r_2] = \pi,$$

где r_1 — наименьший и r_2 — наибольший радиусы. Варьировались параметры n , $\varepsilon = r_1/r_2$.

Результаты вычислений показывают (фиг. 1), что величина κ принимает наибольшие значения для $\varepsilon > 2,25$ при $n = 10$, для $1,75 < \varepsilon < 2,25$ при $n = 9$ и для $1,5 < \varepsilon < 1,75$ при $n = 8$. Различия в этих значениях незначительны.

2. Интегральное представление общего решения (1.1) применим к исследованию плоскости с угловым вырезом и трещиной в его вершине, направленной вдоль биссектрисы угла. Контур L образован правой границей угла $L_1\{x = at, y = bt, 0 < t < \infty\}$, его левой границей $L_2\{x = at, y = -bt, -\infty < t < 0\}$ и разрезом $L_3\{x = 0, y = t, -l < t < 0\}$, где $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, α — угол наклона правой границы угла к оси x .

Предполагая, что внешние усилия приложены симметрично оси разреза, получим

систему сингулярных интегральных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{L_i} \frac{f_i(\tau) d\tau}{t-\tau} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi} \int_{L_j} f_j(\tau) G_{ij}(t, \tau) d\tau = p_i(t), \quad i=1, 2, 3.$$

Ядра G_{ij} не выписываем. При отсутствии разреза L_3 и ограниченном изменении параметра t система (2.1) принимает вид, полученный при исследовании двух трещин, расположенных под углом [7]. Помимо (1.6), следует добавить условие $f_j(0) = 0$, обеспечивающее ограниченность напряжений в вершине разрезанного угла. Численное решение уравнения (2.1) выполнялось также методом [6]. При вычислениях было принято, что внешние усилия постоянные, направлены ортогонально оси разреза и действуют при $t \leq 1$, т. е.

$$p_1 = b^2 h(t), \quad p_2 = -ab h(t), \quad p_3 = 1,$$

где $h(t) = 1$ при $t \leq 1$ и $h(t) = 0$ при $t > 1$.

На фиг. 2, 3 показаны результаты вычислений коэффициента интенсивности напряжений на конце трещины $K = \kappa \sqrt{l/2}$, где κ определяется по формуле (1.8). Кривые 1–5 (фиг. 2) соответствуют углу выреза в 150; 120; 90; 60 и 30°. С ростом длины трещины K монотонно возрастает. Изменение K при уменьшении угла выреза (фиг. 3) не является монотонным — вблизи значений $\alpha \sim 35-45^\circ$ (угол выреза около 90°) кривые имеют максимум, т. е. плоскость наиболее подвержена разрушению.

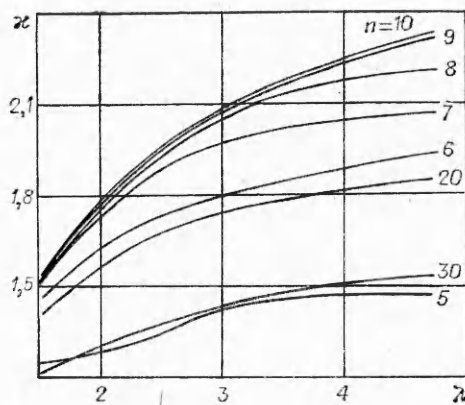
3. Сделаем приближенную оценку напряжений в случае, когда углы в звездообразных отверстиях и ударнике закруглены, используя для этого метод [3].

В плоскости комплексного переменного z рассмотрим звездообразную фигуру, ограниченную ломаной с вершинами в точках

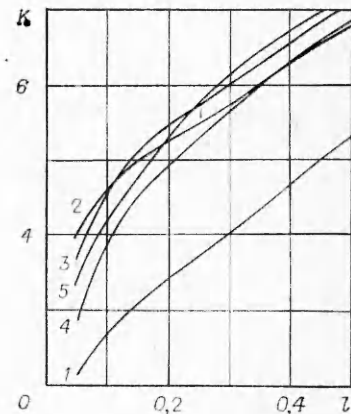
$$A'_k (z'_k = R \exp(2\pi i k/n)), \quad A''_k (z''_k = r \exp(\pi i (2k+1)/n)), \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

число лучей звезды $n = 2, 3, \dots$. Полагая площадь звезды равной πr_0^2 ($\rho_0 = \text{const}$), получим зависимости между параметрами

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccotg} \left\{ \frac{\pi}{n} \lambda^2 \sin^{-2} \frac{\pi}{n} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right\}, \quad \beta = \alpha + \frac{2}{n}, \quad \lambda = \frac{\rho_0}{r},$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$R = r \sin \frac{\beta\pi}{2} \sin^{-1} \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Обозначим область, заключенную внутри звезды, через D_z^+ , вне ее — D_z^- , область в плоскости ξ внутри единичного круга $\{|\xi| = 1\}$ — D_ξ^+ и вне его — D_ξ^- . Конформное отображение D_z^+ на D_ξ^+ имеет вид интеграла Кристоффеля — Шварца

$$z = \omega^+(\xi) = c_0^+ \int_0^\xi (1 + \xi^n)^{1-\beta} (1 - \xi^n)^{\alpha-1} d\xi, \quad \xi = \rho e^{i\theta},$$

где c_0^+ определяется из условия $\omega^+(1) = R$. Аналогично

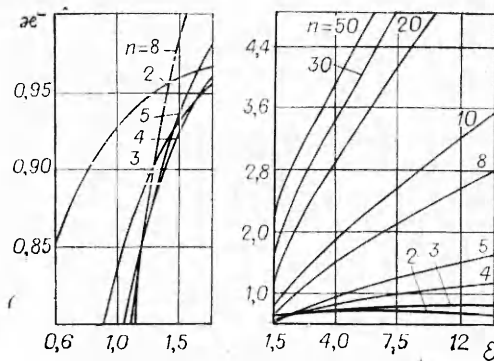
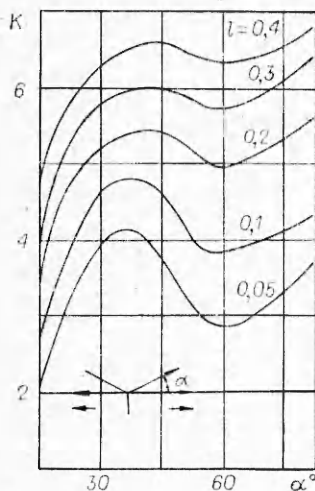
$$z = \omega^-(\xi) = c_0^- \int_0^{\xi} (1 + \xi^n)^{\beta-1} (1 - \xi^n)^{1-\alpha} d\xi + R,$$

$$\omega^-(r \exp(\pi i/n)) = \exp(\pi i/n)$$

выполняют конформное отображение D_z^- на D_ξ^- .

Пусть на контуре звезды задано нормальное усилие $\sigma_n = p(t)$. Первая краевая задача для функций Колосова—Мусхелишвили $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ в областях D_z^+ (внутренняя задача) и D_z^- (внешняя задача) записывается в виде

$$\varphi_\pm^*(t) + t \overline{\varphi_\pm^*(t)} + \overline{\psi_\pm^*(t)} = \pm q(t) \exp(-\alpha \pi i/2), \quad q(t) = \int_R^t p(\tau) d\tau$$



Фиг. 4

Фиг. 3

M	20		40		60	
	κ^-	ρ^*	κ^-	ρ^*	κ^-	ρ^*
$n = 3$	0,863	0,423	0,912	0,196	0,932	0,127
$n = 6$	0,914	0,161	0,949	0,094	0,951	0,069

или после выполнения конформного преобразования

$$(3.1) \quad \varphi_\pm(\sigma) + \frac{\omega^\pm(\sigma)}{\omega^{\pm'}(\sigma)} \overline{\varphi_\pm(\sigma) + \psi_\pm(\sigma)} = \pm q(\omega^\pm(\sigma)) \exp(-\alpha \pi i/2),$$

$$\varphi(\xi) = \varphi^*(\omega(\xi)), \quad \psi(\xi) = \psi^*(\omega(\xi)).$$

Метод приближенного решения задачи (3.1) состоит в следующем. Разложения функций $\omega^\pm(\xi)$ в окрестности $\xi = 0$ и $\omega^-(\xi)$ в окрестности $\xi = \infty$ имеют вид

$$(3.2) \quad \omega^\pm(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\pm \xi^{1 \pm kn},$$

$$\text{где } c_k^\pm = \frac{c_0^\pm}{1 \pm kn} \sum_{j=0}^k \alpha_j^\pm \nu_{k-j}^\pm, \quad \alpha_0^\pm = b_0^\pm = 1,$$

$$\alpha_k^+ = a_{k-1}^+ \frac{k-\alpha}{k}, \quad b_k^+ = b_{k-1}^+ \frac{2-k-\beta}{k}, \quad a_k^- = a_{k-1}^- \frac{k+\alpha-2}{k}, \quad b_k^- = b_{k-1}^- \frac{\beta-k}{k}.$$

В силу этого функции $\varphi(\xi), \psi(\xi)$ разыскиваем в виде

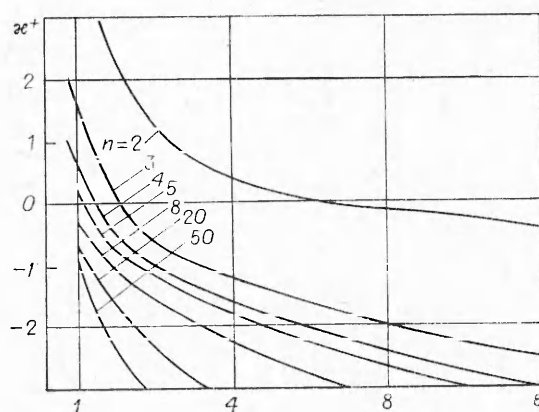
$$(3.3) \quad \varphi_\pm(\xi) = \pm p \exp(-\alpha \pi i/2) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^\pm \xi^{1 \pm kn},$$

$$\psi_{\pm}(\xi) = \pm p \exp(-\alpha\pi/2) \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h \xi^{-1 \pm hn}.$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим систему алгебраических уравнений для коэффициентов α_h, β_h . При вычислениях в разложениях (3.2), (3.3) удерживалось конечное число членов. Это допущение, позволяющее привести задачу к конечной системе уравнений, а также получить конечные значения коэффициентов концентрации напряжений в угловых точках, равносильно скруглению углов в вершине звезды. Величина скругления характеризуется с помощью радиуса кривизны.

Влияние числа лучей и их вытянутости на напряженное состояние внутренней или внешней области оценивалось коэффициентом концентрации напряжений $\sigma_{\theta}^{\pm} = -4 \operatorname{Re} \varphi_{\pm}'(z) - p$, вычисленным в точке ($\rho=1, \theta = \pi/n$) в первом случае и в точке ($\rho=1, \theta=0$) — во втором. При вычислениях n варьировалось от 2 до 50 и ε (отношение наибольшего радиуса звезды к наименьшему) — от 0,6 до 15.

На фиг. 4, 5 даны графики $\kappa^{-} = \sigma_{\theta}^{-}/p$ и $\kappa^{+} = \sigma_{\theta}^{+}/p$ при изменении ε для различных значений n . С ростом ε для каждого n κ^{-} монотонно увеличивается. Но при фиксированном ε и увеличении n κ^{-} возрастает, если $\varepsilon < 1,6$. Например, при $\varepsilon = 1,1$ κ^{-} принимает наименьшее значение, когда $n = 7$ ($\alpha = 0,68, \beta = 0,96$), и наибольшее, когда $n = 2$ ($\alpha = 1/3, \beta = 4/3$). Если κ^{+} положительно, то ударник имеет форму выпуклой фигуры.



Фиг. 5

числа членов в разложениях (3.2), (3.3), оценено в таблице. Даны значения κ^{-} и радиуса кривизны ρ^* в вершине скругленного угла для $\varepsilon = 1,6, n = 3$ и 6 при ударе ударника $M = 20; 40$ или 60 членов.

Аналогичная картина наблюдается и при других n и ε .

Учитывая экспериментальные исследования прочностных характеристик звездобразных ударников и пробоев [1, 8], для звезд с длинными лучами при пробитии хрупкого материала следует рекомендовать результаты, полученные для криволинейных звезд с острыми углами и углов с трещинами в п. 1. 2. Результаты п. 3 в этом случае могут оказаться неверными. Их использование целесообразно для выпуклых многоугольников и звезд с тупыми углами.

Авторы признательны В. Г. Дулову, обратившему внимание на актуальность данного исследования.

Поступила 25 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Дулов В. Г., Бордюг В. А. и др. К вопросу об оптимизации пространственных ударников. — В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
2. Ведерников Ю. А., Гонор А. А. и др. Аэродинамические характеристики звездобразных тел при $M = 3 \div 5$. — Изв. АН СССР. МЭЖ, 1981, № 4.
3. Мухелишвили Н. П. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
4. Kumar P., Clifton R. J. A star-shaped flyer for plate-impact recovery experiments. — Appl. Physics, 1977, N 11.
5. Куриши Л. М., Суздальский П. Д. Напряженное состояние плоскости с криволинейным разрезом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1.
6. Калаидия А. П. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
7. Суздальский П. Д. О взаимном влиянии трещин, расположенных под углом. — ПМТФ, 1977, № 3.
8. Бондарчук В. С., Ведерников Ю. А. и др. К оптимизации звездобразных ударников. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1982, № 13, вып. 3.