УДК 532.59
DOI: 10.15372/PMTF202215191

ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ОКЕАНЕ С УПРУГИМ ДНОМ

П. Маити, П. Кунду*, Б. Н. Мандал**

Калькуттский университет, Калькутта, Индия
* Политехнический университет Северной Калькутты, Калькутта, Индия
** Индийский институт статистики, Калькутта, Индия
E-mails: maitiparomita@yahoo.com, kundupiyali92@gmail.com, bnm2006@rediffmail.com

Рассматривается классическая двумерная задача Коши — Пуассона для океана с упругим дном. Вода в океане моделируется несжимаемой жидкостью. Линейная задача формулируется как задача с начальными условиями для потенциала скорости в области, занятой жидкостью, потенциала расширения-сжатия и потенциала сдвига в области, занятой упругой средой. Для получения выражений для формы депрессии свободной поверхности и компоненты вертикальных смещений точек дна океана через кратные интегралы с бесконечными пределами используются преобразования Лапласа по времени и преобразование Ханкеля по пространственной координате, которые вычисляются методом наискорейшего спуска. Исследована зависимость отношения амплитуды смещений точек дна океана к амплитуде смещений точек свободной поверхности от времени и от глубины океана при различных значениях параметров задачи и формах начальных возмущений. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическим решением задачи при наличии твердого дна.

Ключевые слова: задача Коши — Пуассона, упругое дно, волны расширения-сжатия, сдвиговые волны, преобразования Лапласа и Ханкеля, метод наискорейшего спуска

Введение. В большинстве работ, посвященных исследованию движения океанских поверхностных волн, дно океана считается жестким. В данной работе дно моделируется упругой средой. Результаты исследований распространения упругих поверхностных волн в изотропных упругих твердых телах, впервые обнаруженных Рэлеем [1], широко используются в сейсмологии, акустике, геофизике, при проектировании различных конструкций, при изучении причин возникновения цунами и т. д. Существует два основных типа упругих сейсмических волн, генерируемых возмущением жидкости: объемные волны и поверхностные волны. В теории упругости выделяется два основных типа упругих объемных волн: продольные и поперечные волны. Продольные волны являются первичными и сопровождаются сжатием и разрежением материала при прохождении через него волны, поперечные волны представляют собой вторичные волны, сопровождаемые сдвигом и вращением материала при прохождении через него волны. Продольные и поперечные волны могут распространяться в однородной изотропной бесконечной среде. В ограниченных средах (объемах) генерируются поверхностные волны. Существует два типа поверхностных упругих волн: волны Рэлея и волны Лява. Исследованию распространения упругих возмущений в слоистых средах посвящены работы [2, 3]. В [2] решалась задача о взаимодей-

© Маити П., Кунду П., Мандал Б. Н., 2023

ствии жидкости и твердого дна, при этом не обнаружены так называемые волны Стоунли, распространяющиеся с фазовой скоростью, меньшей скорости звука в воде. В работе [4] изучено распространение в океане волн Рэлея, вызванных сейсмическими возмущениями в твердом морском дне. Предполагалось, что длина волны велика по сравнению с глубиной океана. В работах [5–7] также исследовалось распространение волн в жидкостно-твердых системах. В [8] изучались двумерные бегущие волны в океане над упругим полупространством. Полученные результаты сравнивались с результатами решения задачи при наличии жесткого дна. В работе [9] исследовалось распространение акустико-гравитационных волн в океане при наличии упругого морского дна. Установлено, что скорость этих волн почти в два раза больше, чем в случае их проникания в твердую среду. Акустические гравитационные волны могут переходить из одного слоя в другой и обратно в зависимости от критической глубины, частоты и рельефа морского дна. В [10] изучено влияние сжатого шельфового ледника на распространение акустико-гравитационных волн в океане при наличии упругого полупространства.

В данной работе исследуется возникновение волнового движения в жидкости, расположенной над упругим полупространством, вследствие наличия начального возмущения свободной поверхности (в случае океана — при наличии упругого дна). В задаче Коши — Пуассона волновое движение возникает вследствие наличия начальных возмущений различного типа (возвышения или понижения свободной поверхности, воздействия импульса или их комбинации). Методы решения таких задач в случае жесткого дна изложены в работах [11, 12]. В случае если начальное возмущение сосредоточено в точке свободной поверхности, явное выражение для формы свободной поверхности имеет вид интеграла с бесконечными пределами. Осесимметричное возмущение впервые рассмотрено в работах [12, 13]. В [14–16] решались задачи о нестационарном движении волн, возникающем вследствие наличия различного типа начальных возмущений, сосредоточенных в точках свободной поверхности жидкости. В указанных выше работах дно полагалось жестким. Задача Коши — Пуассона о распространении в водоеме с неровным дном волн, возникающих вследствие наличия начальных возмущений в виде возвышения свободной поверхности и сосредоточенных в точках этой поверхности, изучалась в работе [17] с использованием метода асимптотического разложения. В [18] исследована двумерная задача Коши — Пуассона для водоема с плавно меняющейся формой дна.

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается двумерная задача о движении волн в океане постоянной глубины H, под дном которого находится полубесконечное упругое полупространство. Используется декартова система координат, в которой ось z направлена вертикально вниз, плоскость (x, y) совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Геометрия физической модели показана на рис. 1.

Исследуется двумерное, симметричное относительно оси z, безвихревое движение однородной несжимаемой невязкой жидкости. Потенциал скорости в жидкой среде обозначен через $\varphi_1(r, z, t)$, потенциал дилатации и потенциал сдвига в твердой среде — φ_2 и ψ_2 соответственно. Согласно [2]

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \quad q = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r\, \partial z}, \tag{1}$$

где точка обозначает производную по времени t; ω_1, ω_2 — компоненты вектора смещения в направлении оси z точек жидкости и точек упругой среды соответственно; q — компонента вектора смещения точек упругой среды в направлении, перпендикулярном оси z. В области, занятой жидкостью, потенциал φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 < z < H, \tag{2}$$

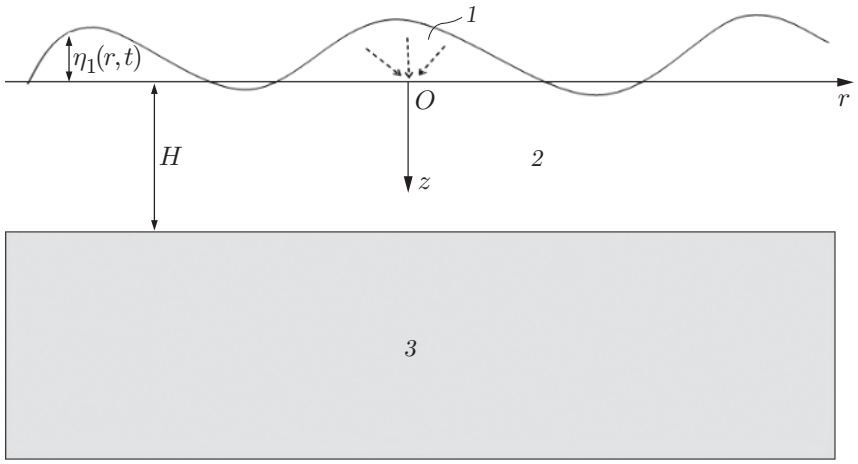

Рис. 1. Геометрия задачи:
1 — начальное осесимметричное возмущение, *2* — жидкая среда, *3* — упругое полупространство

в области, занятой упругой средой, потенциалы φ_2 и ψ_2 соответственно удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},\qquad z\geqslant H; \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2},\qquad z\geqslant H, \tag{4}$$

где α, β — скорости упругих волн:

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_1}}\,,\qquad \beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_1}}\,, \tag{5}$$

λ, μ — константы Ламе; ρ_1 — плотность упругой среды.

При $z=H$ краевые условия в цилиндрической системе координат имеют вид

$$p_{zr}=\mu\Big(\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\Big)=0,\qquad p_{zz}=\lambda\theta+2\mu\,\frac{\partial\omega_2}{\partial z}=P_l, \tag{6}$$

где

$$\theta=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2},\qquad P_l=-\rho_2\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\,, \tag{7}$$

P_l — давление в жидкости; ρ_2 — плотность жидкости; p_{zr}, p_{zz} — тангенциальная и нормальная компоненты тензора напряжений.

При $z=0$ линеаризованное условие на свободной поверхности представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}-g\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \tag{8}$$

(g — ускорение свободного падения).

Условие непрерывности смещений на дне в направлении координаты z записывается следующим образом:

$$\omega_1=\omega_2,\qquad z=H. \tag{9}$$

Константы Ламе вычисляются по формулам

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{10}$$

где E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона:

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{11}$$

Следует отметить, что для абсолютно твердого тела $E=\infty$, $0<\sigma\leqslant 1/2$.

Если в начальный момент времени задано возмущение свободной поверхности, то начальные условия на свободной поверхности имеют вид

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_{1_t} = gG(r), \qquad t=0, \quad z=0, \tag{12}$$

где $G(r)$ — заданная функция.

Смещения точек свободной поверхности $\eta_1(r,t)$ и вертикальное смещение точек дна океана $\eta_2(r,t)$ определяются формулами

$$\eta_1(r,t) = \frac{1}{g}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\,(r,0,t); \tag{13}$$

$$\eta_2(r,t) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\,(r,H,t) + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\,(r,H,t) - \frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\,(r,H,t). \tag{14}$$

Далее при вычислениях используются безразмерные уравнения (1)–(14), полученные после введения характерной длины L и характерного времени $(L/g)^{1/2}$.

2. Решение задачи. Применяя преобразования Лапласа и Ханкеля к уравнениям задачи, для изображений $\tilde{\bar{\varphi}}_1(k,z,p)$, $\tilde{\bar{\varphi}}_2(k,z,p)$ и $\tilde{\bar{\psi}}_2(k,z,p)$ получаем уравнения

$$\frac{d^2\tilde{\bar{\varphi}}_1}{dz^2} - k^2\tilde{\bar{\varphi}}_1 = 0, \qquad \frac{d^2\tilde{\bar{\varphi}}_2}{dz^2} - \nu_1^2\tilde{\bar{\varphi}}_2 = 0, \qquad \frac{d^2\tilde{\bar{\psi}}_2}{dz^2} - \nu_1'^2\tilde{\bar{\psi}}_2 = 0 \tag{15}$$

и условие на свободной поверхности

$$p^2\tilde{\bar{\varphi}}_1 - \frac{d\tilde{\bar{\varphi}}_1}{dz} = \tilde{G}(k), \qquad z=0. \tag{16}$$

Здесь $\nu_1^2 = k^2+\nu^2$; $\nu^2 = p^2/\alpha^2$; $\nu_1'^2 = k^2+\nu'^2$; $\nu'^2 = p^2/\beta^2$.

Условия на дне при $z=H$ записываются в следующем виде:

$$\begin{gathered} p\,\frac{d^2\tilde{\bar{\psi}}_2}{dz^2} + p\,\frac{d\tilde{\bar{\varphi}}_2}{dz} - \frac{d\tilde{\bar{\varphi}}_1}{dz} - \frac{p^3}{\beta^2}\,\tilde{\bar{\psi}}_2 = 0, \qquad 2\,\frac{d^2\tilde{\bar{\psi}}_2}{dz^2} + 2\,\frac{d\tilde{\bar{\varphi}}_2}{dz} - \frac{p^2}{\beta^2}\,\tilde{\bar{\psi}}_2 = 0, \\ -\rho p\tilde{\bar{\varphi}}_1 = \lambda\Big(-k^2\tilde{\bar{\varphi}}_2 + \frac{d^2\tilde{\bar{\varphi}}_2}{dz^2}\Big) + 2\mu\Big(\frac{d^2\tilde{\bar{\varphi}}_2}{dz^2} + \frac{d^3\tilde{\bar{\psi}}_2}{dz^3} - \frac{p^2}{\beta^2}\,\frac{d\tilde{\bar{\psi}}_2}{dz}\Big) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Решение уравнений (15), ограниченное при $z\to\infty$, имеет вид

$$\tilde{\bar{\varphi}}_1(k,z,p) = A(k,p)\,\mathrm{e}^{kz} + B(k,p)\,\mathrm{e}^{-kz}, \quad \tilde{\bar{\varphi}}_2(k,z,p) = C(k,p)\,\mathrm{e}^{-\nu_1 z},$$
$$\tilde{\bar{\psi}}_2(k,z,p) = D(k,p)\,\mathrm{e}^{-\nu_1' z}\,.$$

С использованием краевых условий (17) и условия на свободной поверхности (16) получаем

$$\tilde{\bar{\varphi}}_1(k,z,p) = \tilde{G}(k)\,\frac{\Delta_1(k,z,p)}{\Delta(k,p)}, \quad \tilde{\bar{\varphi}}_2(k,z,p) = -\frac{(2k^2+\nu'^2)k\tilde{G}(k)\,\Delta_2(k,z,p)}{p\nu_1\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1 H}\;\Delta(k,p)},$$

$$\tilde{\bar{\psi}}_2(k,z,p) = -\frac{2k\tilde{G}(k)\,\Delta_3(k,z,p)}{p\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\;\Delta(k,p)},$$

где

$$\Delta(k,p) = f(k,p)(p^2+k) + g(k,p)(p^2-k), \qquad \Delta_1(k,z,p) = g(k,p)\,\mathrm{e}^{kz} + f(k,p)\,\mathrm{e}^{-kz},$$

$$\Delta_2(k,z,p) = (g(k,p)\,\mathrm{e}^{kH} - f(k,p)\,\mathrm{e}^{-kH})\,\mathrm{e}^{-\nu_1 z},$$

$$\Delta_3(k,z,p) = (g(k,p)\,\mathrm{e}^{kH} - f(k,p)\,\mathrm{e}^{-kH})\,\mathrm{e}^{-\nu_1' z},$$

$$f(k,p) = \{k[(\lambda\nu^2+2\mu\nu_1^2)(2k^2+\nu'^2) - 4\mu k^2\nu_1'\nu_1] - \rho p^2\nu_1\nu'^2\}\,\mathrm{e}^{kH},$$

$$g(k,p) = \{k[(\lambda\nu^2+2\mu\nu_1^2)(2k^2+\nu'^2) - 4\mu k^2\nu_1'\nu_1] + \rho p^2\nu_1\nu'^2\}\,\mathrm{e}^{-kH}\,.$$

Применяя обратные преобразования Лапласа и Ханкеля, имеем

$$\varphi_1(r,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty kJ_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{\Delta_1(k,z,p)}{\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk,$$

$$\varphi_2(r,z,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{(2k^2+\nu'^2)\tilde{G}(k)\,\Delta_2(k,z,p)}{p\nu_1\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1 H}\;\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk,$$

$$\psi_2(r,z,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{\Delta_3(k,z,p)}{p\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\;\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk.$$

Так как в случае жесткого дна $E\to\infty$, $0<\sigma\leqslant 1/2$, то функции $\varphi_2(r,z,t)$ и $\psi_2(r,z,t)$ тождественно обращаются в нуль, а выражение для функции $\varphi_1(r,z,t)$ совпадает с выражением, полученным в работе [19].

Смещения точек свободной поверхности $\eta_1(r,t)$ и вертикальное смещение точек дна океана $\eta_2(r,t)$ определяются формулами

$$\eta_1(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty kpJ_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{\Delta_1(k,0,p)}{\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk; \tag{18}$$

$$\eta_2(r,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{(2k^2+\nu'^2)\Delta_4(k,H,p)}{p\nu_1\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1 H}\;\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk\,-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty 2k^2J_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{\Delta_5(k,H,p)}{p\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\;\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk\,+$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{G}(k)\,\frac{p\,\Delta_3(k,H,p)}{\nu'^2\,\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\;\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk, \tag{19}$$

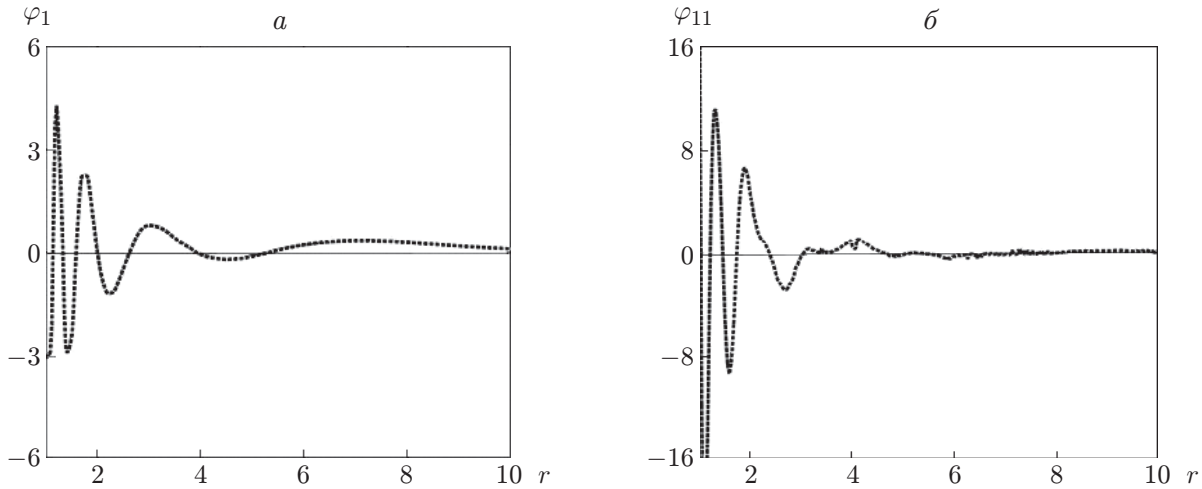

Рис. 2. Распределение потенциалов скорости на свободной поверхности при $t = 10$: *а* — начальное возмущение свободной поверхности, *б* — начальный импульс

где

$$\Delta_4(k,H,p) = \frac{\partial}{\partial z}\,\Delta_2(k,z,p)\Big|_{z=H}, \qquad \Delta_5(k,H,p) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\Delta_3(k,z,p)\Big|_{z=H}.$$

В случае если в начальный момент времени задается импульс давления, функции φ_1, φ_2, ψ_2, обозначенные через φ_{11}, φ_{22}, ψ_{22}, помимо уравнений (2)–(4) должны удовлетворять начальным условиям

$$\varphi_{11} = \frac{I(r)}{\rho_2}, \qquad \varphi_{11_t} = 0, \qquad t = 0, \quad z = 0.$$

Выражения для этих потенциалов можно получить тем же методом после его модификации. В случае жесткого дна функции $\varphi_{22}(r,z,t)$ и $\psi_{22}(r,z,t)$ тождественно обращаются в нуль, а выражение для функции $\varphi_{11}(r,z,t)$ совпадает с выражением, полученным в [19]. В этом случае форма свободной поверхности задается выражением

$$\zeta_1(r,t) = \frac{1}{2\pi i\rho}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)\tilde{I}(k)}{\Delta(k,p)}\,[g(k,p) + f(k,p) - 2k\rho\nu_1\nu'^2]\,\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk,$$

а вертикальное смещение точек дна — выражением

$$\zeta_2(r,t) = \frac{1}{2\pi i\rho}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{I}(k)\,\frac{(2k^2+\nu'^2)\,\Delta_6(k,p)}{\nu'^2\,\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk\,-$$

$$-\,\frac{1}{\pi i\rho}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty k^2J_0(kr)\tilde{I}(k)\,\frac{(\nu_1'^2+p^2/\beta^2)\,\Delta_6(k,p)}{\nu'^2\,\Delta(k,p)}\;\mathrm{e}^{pt}\;dp\,dk,$$

где $\Delta_6(k,p) = [g(k,p) - (p^2+k)\rho\nu_1\nu'^2]\;\mathrm{e}^{kH} - [f(k,p) + (p^2-k)\rho\nu_1\nu'^2]\;\mathrm{e}^{-kH}$; $\rho = \rho_2/\rho_1$.

3. Аппроксимация интегралов методом наискорейшего спуска. Для случая заданного начального смещения необходимо вычислить интегралы (18), (19), в которых подынтегральные выражения являются осциллирующими функциями. Эти интегралы можно вычислить методом наискорейшего спуска [15, 16, 20, 21], в котором путь интегрирования выбирается таким образом, чтобы интегрирование по окрестности седловой точки вносило наибольший вклад в интеграл.

Запишем интеграл (18) в следующем виде:

$$\eta_1(r,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty kJ_0(kr)p\tilde{G}(k)\,\frac{g(k,p)+f(k,p)}{\Delta(k,p)}\ \mathrm{e}^{pt}\ dp\,dk.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы интегралов

$$\eta_1(r,t) = \sum_{j=1}^{6} I_j,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)p\tilde{G}(k)}{\Delta(k,p)}\,(p^2+2\mu k^2)^2\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{KH}\ dp\,dk,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{4k^4 J_0(kr)p\mu\tilde{G}(k)}{\Delta(k,p)}\left(k^2+\frac{p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{1/2}\left(k^2+\frac{p^2}{\mu}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{KH}\ dp\,dk,$$

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)p^5\rho\tilde{I}(k)}{\mu\,\Delta(k,p)}\left(k^2+\frac{p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{KH}\ dp\,dk,$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)p\tilde{I}(k)}{\Delta(k,p)}\left(2k^2+\frac{p^2}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda p^2}{\lambda+2\mu}+2\mu\left(k^2+\frac{p^2}{\lambda+2\mu}\right)\right)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{-KH}\ dp\,dk,$$

$$I_5 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{4k^4 J_0(kr)p\mu\tilde{I}(k)}{\Delta(k,p)}\left(k^2+\frac{p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{1/2}\left(k^2+\frac{p^2}{\mu}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{-KH}\ dp\,dk,$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)p^5\rho\tilde{I}(k)}{\mu\,\Delta(k,p)}\left(k^2+\frac{p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{e}^{-KH}\ dp\,dk.$$

Интеграл I_1 можно записать в виде

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \Phi_{I_1}(k,p)\exp\left[\Psi_{I_1}(k,p)\right]dp\,dk,$$

где $\Phi_{I_1}(k,p) = k^2 J_0(kr)p\tilde{G}(k)/\Delta(k,p)$; $\Psi_{I_1}(k,p) = pt + kH + \log\,(p^2+2\mu k^2)^2$.

Седловая точка определяется из решения уравнений

$$\frac{\partial \Psi_{I_1}}{\partial k} = \frac{\partial \Psi_{I_1}}{\partial p} = 0,$$

откуда следует

$$H + \frac{8k\mu}{p^2 + 2k^2\mu} = 0, \qquad t + \frac{4p}{p^2 + 2k^2\mu} = 0.$$

Таким образом, седловая точка имеет координаты

$$k_{I_1} = -\frac{4H}{H^2 + 2t^2\mu}, \qquad p_{I_1} = -\frac{8\mu t}{H^2 + 2t^2\mu}.$$

В результате применения метода наискорейшего спуска находим

$$I_1 = \frac{(i\sqrt{2\pi}\,)^2}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}_{I_1}(k_{I_1}, p_{I_1})}} \Phi_{I_1}(k_{I_1}, p_{I_1}) \exp\left(\Psi_{I_1}(k_{I_1}, p_{I_1})\right),$$

где

$$\sqrt{\mathcal{H}_{I_1}(k_{I_1}, p_{I_1})} = \frac{i(H^2 + 2t^2\mu)}{4\sqrt{2\mu}},$$

$\mathcal{H}_{I_1}(k_{I_1}, p_{I_1})$ — значение гессиана в седловой точке (k_{I_1}, p_{I_1}).

Аналогично методом наискорейшего спуска можно вычислить интегралы I_j $(j = 2, 3, \ldots, 6)$. В результате функция $\eta_1(r, t)$ представляется в виде суммы

$$\eta_1(r, t) = \frac{(i\sqrt{2\pi}\,)^2}{\pi i} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}_{I_j}(k_{I_j}, p_{I_j})}} \Phi_{I_j}(k_{I_j}, p_{I_j}) \exp\left(\Psi_{I_j}(k_{I_j}, p_{I_j})\right).$$

Выражения для функций $\Phi_{I_j}(k, p)$, $\Psi_{I_j}(k, p)$ в точках k_{I_j}, p_{I_j} $(j = 2, 3, \ldots, 6)$ приведены в табл. 1 $(\delta_I'(k) = kJ_0(kr)\tilde{G}(k)/\Delta(k, p))$; k_{I_j}, p_{I_j} — координаты седловых точек уравнений $\partial\Psi_{I_j}/\partial k = \partial\Psi_{I_j}/\partial p = 0$, соответствующие интегралам I_j $(j = 2, 3, \ldots, 6)$; $\mathcal{H}_{I_j}(k_{I_j}, p_{I_j})$ — значения гессиана $\mathcal{H}_{I_j}$ в седловых точках (k_{I_j}, p_{I_j}) при $j = 2, 3, \ldots, 6$.

Выражение для $\eta_2(r, t)$ представим в виде суммы

$$\eta_2(r, t) = \sum_{j=1}^{3} J_j,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)\tilde{G}(k)(2k^2 + p^2/\mu)p\rho}{\mathrm{e}^{-\nu_1 H}\ \Delta(k, p)} \exp\Big[pt - \Big(k^2 + \frac{p^2}{\lambda + 2\mu}\Big)^{1/2} H + \\ + \log p + \log\Big(k^2 + \frac{p^2}{\lambda + 2\mu}\Big)^{1/2}\Big]\, dp\, dk,$$

$$J_2 = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_0^\infty \frac{2k^2 J_0(kr)\tilde{G}(k)\rho(k^2 + p^2/(\lambda + 2\mu))^{1/2}}{\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\ \Delta(k, p)} \exp\Big[pt - \Big(k^2 + \frac{p^2}{\mu}\Big)^{1/2} H + \\ + \log p + \log\Big(k^2 + \frac{p^2}{\mu}\Big)^{1/2}\Big]\, dp\, dk,$$

Таблица 1

Выражения для функций $\Phi_{I_j}(k,p)$, $\Psi_{I_j}(k,p)$ в точках k_{I_j} и p_{I_j} $(j = 2, 3, \ldots, 6)$

J	$\Phi_{I_j}(k,p)$	$\Psi_{I_j}(k,p)$	k_{I_j}	p_{I_j}
2	$-4\delta_I'(k)k^3\mu p\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$pt+kH+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\mu}\Big)^{1/2}$	$-\dfrac{H}{H^2+2t^2\mu}$	$-\dfrac{\mu t}{H^2+2t^2\mu}$
3	$-\delta_I'(k)p^5\,\dfrac{\rho}{\mu}$	$pt+kH+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$-\dfrac{H}{H^2+t^2(\lambda+2\mu)}$	$-\dfrac{t(\lambda+2\mu)}{H^2+t^2(\lambda+2\mu)}$
4	$\delta_I'(k)kp$	$pt-kH+\log(p^2+2\mu k^2)^2$	$\dfrac{4H}{H^2+2t^2\mu}$	$-\dfrac{8\mu t}{H^2+2t^2\mu}$
5	$-4\delta_I'(k)k^3\mu p\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$pt-kH+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\mu}\Big)^{1/2}$	$\dfrac{H}{H^2+2t^2\mu}$	$-\dfrac{\mu t}{H^2+2t^2\mu}$
6	$\delta_I'(k)p^5\,\dfrac{\rho}{\mu}$	$pt-kH+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$\dfrac{H}{H^2+t^2(\lambda+2\mu)}$	$-\dfrac{t(\lambda+2\mu)}{H^2+t^2(\lambda+2\mu)}$

$$J_3 = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)\tilde{G}(k)\rho(k^2+p^2/(\lambda+2\mu))^{1/2}}{\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\ \Delta(k,p)}\ \exp\Big[pt-\Big(k^2+\frac{p^2}{\mu}\Big)^{1/2}H+$$
$$+\log p^3+\log k^2\Big]\,dp\,dk.$$

После вычисления интегралов J_1, J_2, J_3 выражение для функции $\eta_2(r,t)$ записывается в виде следующей суммы:

$$\eta_2(r,t) = \frac{(i\sqrt{2\pi}\,)^2}{\pi i}\sum_{j=1}^{3}\Bigg(\frac{\Phi_{J_j}(k^1_{J_j},p^1_{J_j})}{\sqrt{\mathcal{H}_j(k^1_{J_j},p^1_{J_j})}}\ \exp\big(\Psi_{J_j}(k^1_{J_j},p^1_{J_j})\big)+$$
$$+\frac{\Phi_{J_j}(k^2_{J_j},p^2_{J_j})}{\sqrt{\mathcal{H}_{J_j}(k^2_{J_j},p^2_{J_j})}}\exp\big(\Psi_{J_j}(k^2_{J_j},p^2_{J_j})\big)\Bigg).$$

Выражения для функций $\Phi_{J_j}(k,p)$, $\Psi_J(k,p)$ и величин $k^1_{J_j}$, $p^1_{J_j}$, $k^2_{J_j}$, $p^2_{J_j}$ при $j = 1, 2, 3$ приведены в табл. 2 ($\delta_J'(k) = J_0(kr)\tilde{G}(k)\rho/[\mathrm{e}^{-\nu_1' H}\ \Delta(k,p)]$). Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда начальное возмущение является поверхностным импульсом.

4. Результаты численного решения. Ниже приведены результаты численного решения задачи при $\rho = 0{,}4$, $\lambda = \sqrt{3}\,\mu$ и различных типах возмущения свободной поверхности.

Случай 1. Пусть начальная осесимметричная депрессия задана в виде $G(r) = \delta(r)/r$ [15], поэтому $\tilde{G}(k) = 1$. На рис. 3 приведены зависимости отношения амплитуды смещения точек дна океана к амплитуде смещения точек свободной поверхности η^* от времени t при различных значениях r и от координаты r при различных значениях времени t. Из зависимостей, приведенных на рис. 3,*а*, следует, что в начальные моменты времени вертикальное смещение точек дна океана очень мало по сравнению со смещением точек свободной поверхности. На рис. 3 безразмерная глубина океана принимается равной $H = 5$. На рис. 4,*а* приведены зависимости отношения амплитуд η^* от глубины H при $t = 5$ и $r = 15$, 20, на рис. 4,*б* — те же зависимости при $r = 50$ и $t = 35$, 25. Из

Таблица 2

Выражения для функций $\Phi_{J_j}(k,p)$, $\Psi_{J_j}(k,p)$ и величин $k^1_{J_j}$, $p^1_{J_j}$, $k^2_{J_j}$, $p^2_{J_j}$ при $j = 1, 2, 3$

j	$\Phi_{J_j}(k,p)$	$\Psi_{J_j}(k,p)$	$k^1_{J_j}$	$p^1_{J_j}$	$k^2_{J_j}$	$p^2_{J_j}$
1	$k^2\delta'_J(k)\Big(2k^2+\dfrac{p^2}{\mu}\Big)\dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\nu'_1 H}}{\mathrm{e}^{-\nu_1 H}}$	$pt-\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}H+$ $+\log p+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$-\dfrac{\sqrt{-H^2+t^2\lambda+2t^2\mu}}{Ht\sqrt{\lambda+2\mu}}$	$-\dfrac{1}{t}$	$\dfrac{\sqrt{-H^2+t^2\lambda+2t^2\mu}}{Ht\sqrt{\lambda+2\mu}}$	$-\dfrac{1}{t}$
2	$-2k^2\delta'_J(k)\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$pt+\log\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\mu}\Big)+$ $+\log p-\sqrt{k^2+\dfrac{p^2}{\mu}}\,H$	$-\dfrac{\sqrt{-H^2+4t^2\mu}}{Ht\sqrt{\mu}}$	$-\dfrac{1}{t}$	$\dfrac{\sqrt{-H^2+4t^2\mu}}{Ht\sqrt{\mu}}$	$-\dfrac{1}{t}$
3	$\dfrac{\delta'_J(k)}{\beta^2}\,p^3\rho\Big(k^2+\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}\Big)^{1/2}$	$pt+\log k^2-\sqrt{k^2+\dfrac{p^2}{\mu}}\,H$	$-\dfrac{2}{\sqrt{H^2-t^2\mu}}$	$-\dfrac{2t\mu}{-H^2+t^2\mu}$	$\dfrac{2}{\sqrt{H^2-t^2\mu}}$	$-\dfrac{2t\mu}{-H^2+t^2\mu}$

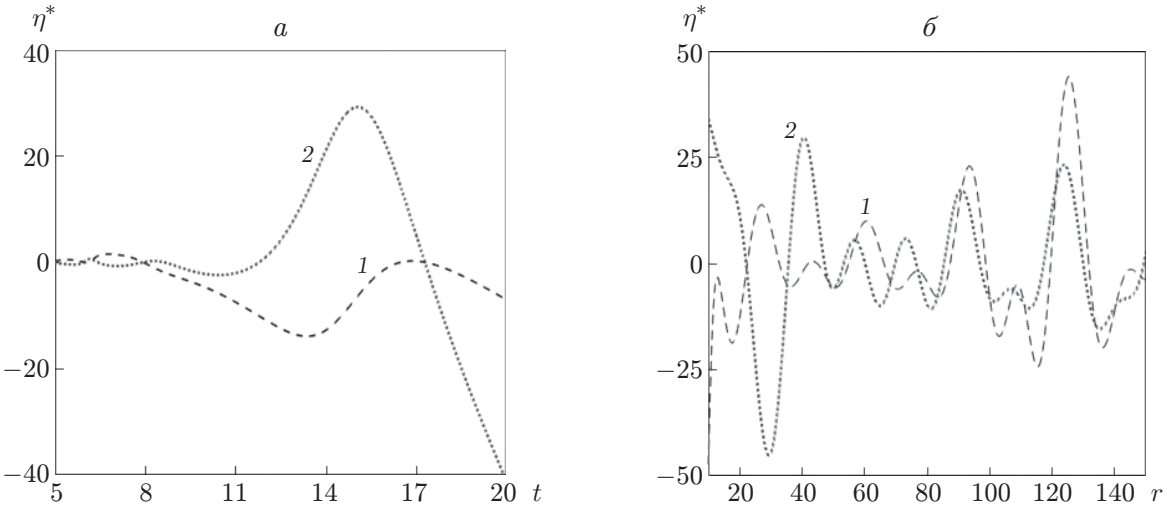

Рис. 3. Зависимости отношения амплитуды смещения точек дна океана к амплитуде смещения точек свободной поверхности η^* при заданном начальном возмущении свободной поверхности:
а — от времени (*1* — $r = 35$, *2* — $r = 40$), *б* — от координаты r (*1* — $t = 10$, *2* — $t = 15$)

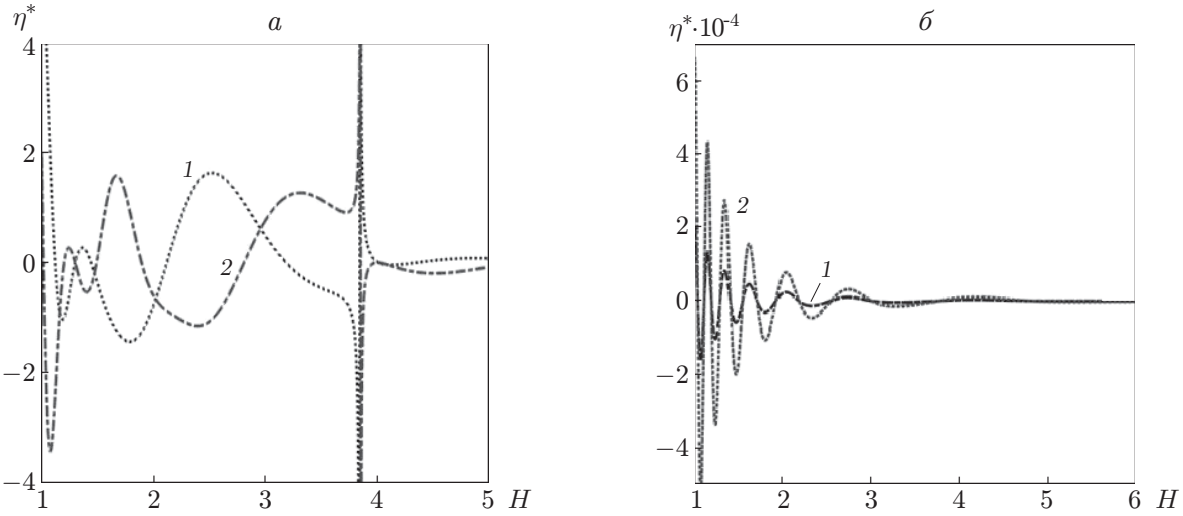

Рис. 4. Зависимости отношения амплитуд η^* от глубины H при начальном возмущении свободной поверхности:
а — $t = 5$ (*1* — $r = 15$, *2* — $r = 20$), *б* — $r = 50$ (*1* — $t = 35$, *2* — $t = 25$)

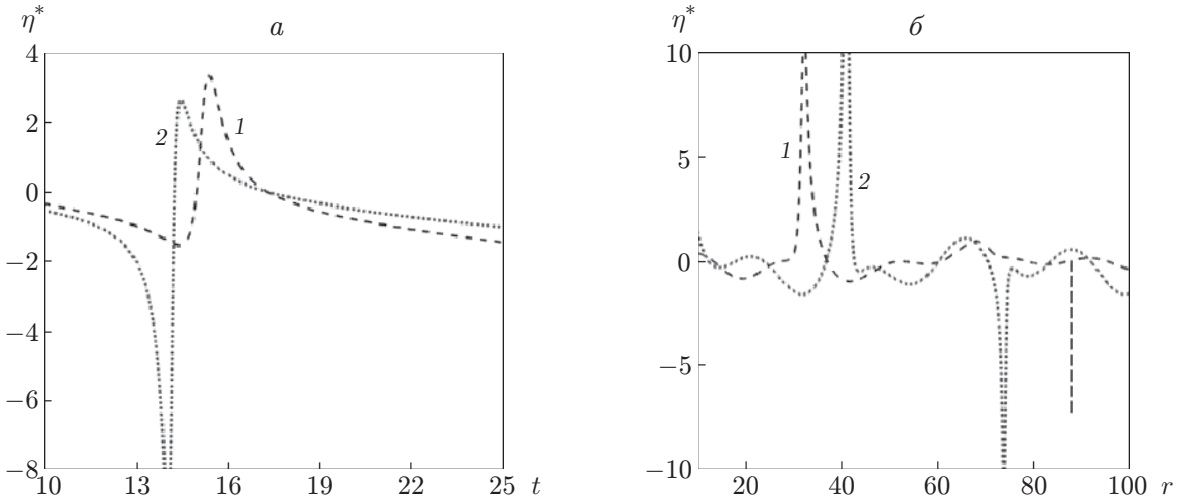

Рис. 5. Зависимости отношения амплитуд η^* в случае начального импульса, заданного в виде дельтообразной функции:
а — от времени t (*1* — $r = 30$, *2* — $r = 35$), *б* — от координаты r (*1* — $t = 15$, *2* — $t = 25$)

зависимостей, приведенных на рис. 4,*а*, следует, что в окрестности значений $H = 4$ и $H = 1$ зависимость $\eta^*(H)$ имеет резонансный характер. Это означает, что при указанных значениях H, r, t амплитуда смещения точек свободной поверхности либо очень мала, либо очень велика по сравнению с амплитудой смещения точек дна океана. В работе [9] изучалось поступательное движение волн в океане с упругим дном. Вода в океане моделировалась сжимаемой жидкостью. Зависимости отношения амплитуд η^* от глубины океана, полученные в работе [9], аналогичны зависимостям, полученным в данной работе. Возможно, это обусловлено тем, что сжимаемость океанской воды очень мала.

Случай 2. Пусть начальный осесимметричный импульс задан в виде дельтообразной функции $I(r) = \delta(r)/r$, следовательно $\tilde{I}(k) = 1$.

На рис. 5,*а* приведены зависимости отношения амплитуд η^* от времени t при $r = 30$, 35. Из приведенных результатов следует, что в окрестности значения $t = 14$ амплитуда смещения точек свободной поверхности значительно меньше амплитуды смещения точек дна океана. На рис. 5,*б* показаны зависимости отношения амплитуд η^* от координаты r при $t = 15$, 25. На рис. 5 безразмерная глубина принята равной $H = 5$. Из результатов, приведенных на рис. 5, следует, что резонансное поведение зависимости $\eta^*(t)$ имеет место при $t = 14$, $r = 35$ и $t = 16$, $r = 30$ (см. рис. 5,*а*), а также при $r = 35$, $r = 85$, $t = 15$ и $r = 40$, $r = 75$, $t = 25$ (см. рис. 5,*б*). Следовательно, при этих значениях амплитуда смещения точек свободной поверхности либо велика, либо мала по сравнению с амплитудой смещения точек дна океана.

На рис. 6 приведены зависимости $\eta^*(H)$ при $t = 15$ и $r = 35$, 25 (см. рис. 6,*а*), а также при $r = 30$ и $t = 10$, 15 (см. рис. 6,*б*). Из рис. 6,*а,б* следует, что зависимость $\eta^*(H)$ имеет резонансный характер при $H = 3$ и $H = 5$ соответственно.

Случай 3. Пусть начальное возмущение задано в виде осесимметричного параболического импульса [13]:

$$I(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2, & r \leqslant \sqrt{2}\,R, \\ 0, & r > \sqrt{2}\,R, \end{cases}$$

где R — эффективный радиус. Преобразование Ханкеля функции $I(r)$ определяется по

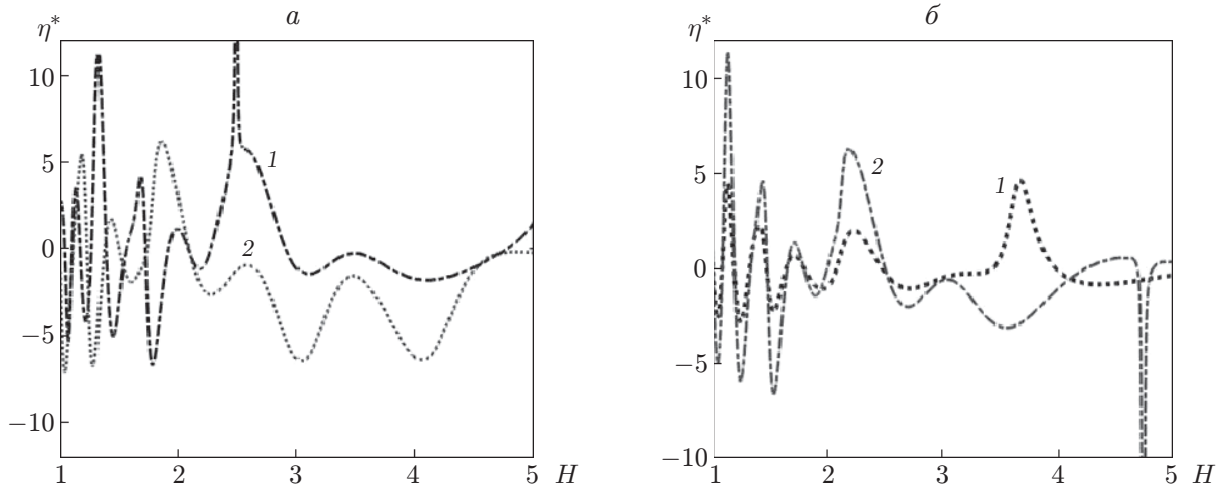

Рис. 6. Зависимости отношения амплитуд η^* от глубины H в случае начального импульса, заданного в виде дельтообразной функции:
а — $t = 15$ (*1* — $r = 35$, *2* — $r = 25$), *б* — $r = 30$ (*1* — $t = 10$, *2* — $t = 15$)

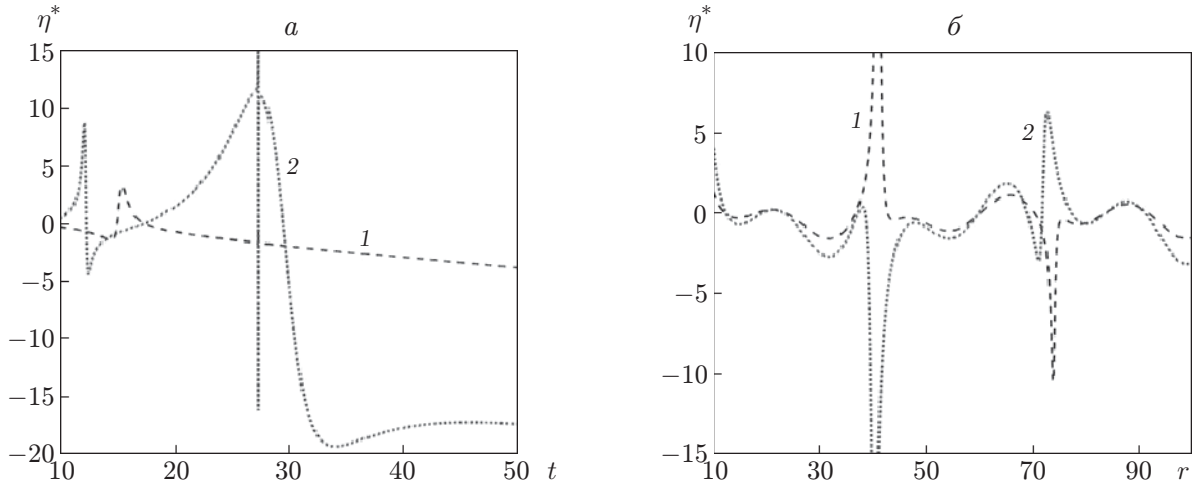

Рис. 7. Зависимости отношения амплитуд η^* при начальном возмущении, заданном в виде параболического импульса:
а — от времени t (*1* — $r = 30$, *2* — $r = 40$), *б* — от координаты r (*1* — $t = 25$, *2* — $t = 35$)

формуле $\tilde{I}(k) = (2/k^2)J_2(\sqrt{2Rk}\,)$. Ниже приведены результаты, полученные при $R = 1$. На рис. 7 показаны зависимости отношения амплитуд η^* от времени t при $r = 30$, 40 (см. рис. 7,*а*) и от координаты r при $t = 25$, 35 (см. рис. 7,*б*). На рис. 8 представлены зависимости отношения амплитуд η^* от глубины H при $r = 50$, $t = 20$, 30 (см. рис. 8,*а*) и при $t = 15$, $r = 25$, 35 (см. рис. 8,*б*). На рис. 7, 8 зависимости имеют колебательный характер, в некоторых точках наблюдается резонансное поведение. Это обусловлено тем, что смещения точек свободной поверхности меньше смещений точек дна океана.

Заключение. В работе с использованием линейной теории волн исследуется возникновение волнового движения в океане вследствие наличия начальных осесимметричных возмущений различного типа, заданных на свободной поверхности. Вода моделируется однородной несжимаемой невязкой жидкостью. Жидкость расположена над упругим полупространством. Исследовано влияние наличия упругого дна на течение несжимаемой

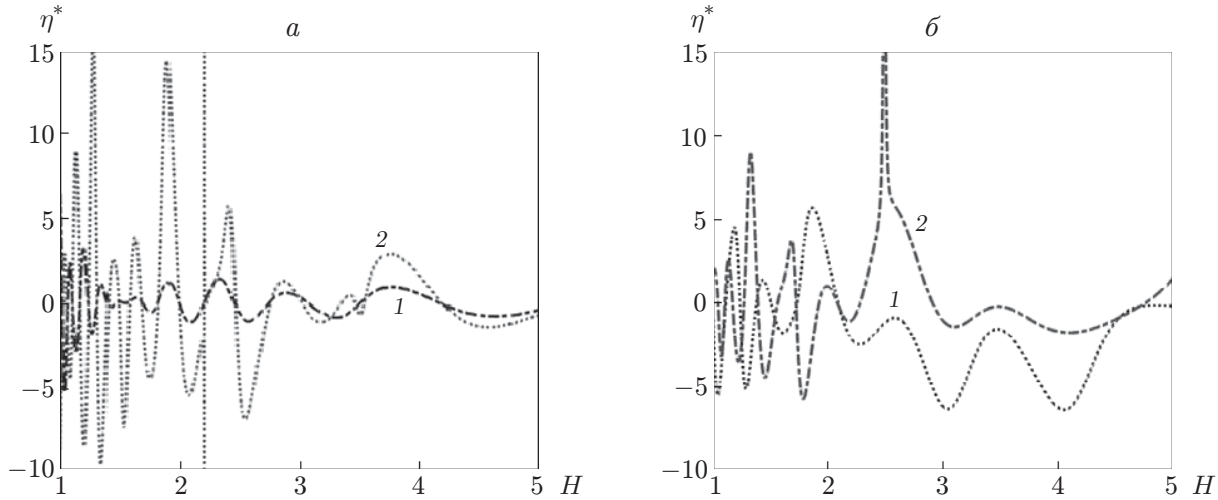

Рис. 8. Зависимости отношения амплитуд η^* от глубины H в случае начального возмущения, заданного в виде параболического импульса:
а — $r = 50$ (*1* — $t = 20$, *2* — $t = 30$), *б* — $t = 15$ (*1* — $r = 25$, *2* — $r = 35$)

жидкости. С использованием преобразований Ханкеля и Лапласа получены выражения для смещений точек свободной поверхности и точек дна в виде многомерных бесконечных интегралов, аппроксимация которых выполнена методом наискорейшего спуска. Проведено сравнение результатов численных расчетов с точным решением, полученным в работе [19] для случая жесткого дна. Исследованы зависимости отношения амплитуды смещений точек дна океана к амплитуде смещений точек свободной поверхности от времени, глубины и пространственной координаты при различных начальных возмущениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lord Rayleigh.** On waves propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1885. V. 17. P. 4–11. DOI: 10.1112/plms/s1-17.1.4.
2. **Ewing W. M.** Elastic waves in layered media / W. M. Ewing, W. S. Jardetzky. N. Y.: McGraw-Hill, 1957.
3. **Novotny O.** A fast method of computing group-velocity partial derivatives for Love waves propagating in a layer on a half-space // Studia Geophys. Geodaetica. 1999. V. 43. P. 78–86. DOI: 10.1023/A:1023314225947.
4. **Stoneley R.** The effect of the ocean on Rayleigh waves // London Math. Soc. Proc. 1926. V. 30. P. 349–356. DOI: 10.1111/J.1365-256X.1926.TB05382.X.
5. **Biot M. A.** The interaction of Rayleigh and Stoneley waves in the ocean bottom // Bull. Seismolog. Soc. Amer. 1952. V. 42. P. 81–92. DOI: 10.1785/BSSA0420010081.
6. **Tolstoy L.** Dispersive properties of a fluid layer overlying a semi-infinite elastic solid // Bull. Seismolog. Soc. Amer. 1954. V. 44. P. 493–512. DOI: 10.1785/BSSA0440030493.
7. **Bennett B. E., Hermann G.** The dynamic response of an elastic half-space with an overlying acoustic fluid // J. Appl. Mech. 1976. V. 43. P. 39–42. DOI: 10.1115/1.3423792.
8. **Eyov E., Klar A., Kadri U., Stiassnie M.** Progressive waves in a compressible-ocean with an elastic bottom // Wave Motion. 2013. V. 50. P. 929–939. DOI: 10.1016/J.WAVEMOTI.2013.03.003.
9. **Kadri U.** Effect of sea-bottom elasticity on the propagation of acousticgravity waves from impacting objects // Sci. Rep. 2019. V. 9, N 912. P. 1–7. DOI: 10.1038/s41598-018-37626-z.

10. **Das S., Meylan M. H.** The effect of compressed ice-shelf on acoustic-gravity wave propagation in a compressible ocean having elastic bottom // Wave Motion. 2022. V. 110. 102897. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2022.102897.
11. **Lamb H.** Hydrodynamics. N. Y.: Dover, 1945.
12. **Stoker J. J.** Water waves. N. Y.: Intersci. Publ., 1957.
13. **Kranzer H. C., Keller J. B.** Water waves produced by explosions // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. P. 398–407. DOI: 10.1063/1.1735176.
14. **Baek H. M., Kim Y. J., Lee I. J., Kwon S. H.** Revisit of Cauchy — Poisson problem in unsteady water wave problem // Proc. of the 32nd Intern. workshop on water waves and floating bodies, Dalian (China), 2017. S. l., 2017. P. 13–16.
15. **Kundu P., Mandal B. N.** Generation of surface waves due to initial axisymmetric surface disturbance in viscous fluid of finite depth // Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91. P. 2381–2392. DOI: 10.1007/s00419-021-01888-3.
16. **Kundu P., Mandal B. N.** Generation of waves due to bottom disturbance in a viscous fluid // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 2021. V. 116. P. 122–139. DOI: 10.1007/s00419-021-01888-3.
17. **Korobkin A. A.** Fundamental solution of a Cauchy — Poisson problem for a basin with an uneven bottom // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. V. 31, N 2. P. 198–204. DOI: 10.1007/BF00851828.
18. **Korobkin A. A., Sturova I. V.** Plane Cauchy — Poisson problem for a pond with a smoothly changing bottom. Examples of numerical computations // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. V. 31, N 3. P. 390–394. DOI: 10.1007/BF00864568.
19. **Clarisse J. M., Newman J. N., Ursell F.** Integrals with a large parameter: Water waves on finite depth due to an impulse // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 450. P. 67–87. DOI: 10.1098/rspa.1995.0072.
20. **Jeffreys H., Lapwood E. R.** The reflexion of a pulse within a sphere // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. P. 455–479. DOI: 10.1098/rspa.1957.0139.
21. **Chakraborty R., Mandal B. N.** Water waves generated by instantaneous disturbances at the bed of a sloping beach // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 2013. V. 107. P. 481–496. DOI: 10.1080/03091929.2012.732574.

Поступила в редакцию 24/VIII 2022 г.,
после доработки — 21/XI 2022 г.
Принята к публикации 28/XI 2022 г.