

УДК 536.24

## **Эффект броуновского движения в потоке и теплообмен наножидкостей за уступом при наличии и в отсутствии адиабатического цилиндра квадратного сечения**

**Л. Буазизи, С. Турки**

*Национальная инженерно-техническая школа, Сфакс, Тунис*

E-mails: lot.bouazizi@yahoo.fr, said.turki@fss.rnu.tn

Предложена математическая модель, которая позволяет прогнозировать значительное увеличение теплопроводности наножидкости при учете броуновского движения. Исследовалось влияние броуновского движения на течения и характеристики теплообмена. Расчеты выполнялись для различных видов наночастиц, таких как CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO, диспергированных в базовой жидкости (воде), с их объемной долей  $\phi$  от 1 до 6 % при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 450$  и диаметре наночастиц  $d_{np} = 30$  нм. Результаты показали, что броуновское движение может оказывать значительное влияние на повышение теплопроводности наножидкости. Наножидкость с частицами Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> продемонстрировала самое высокое число Нуссельта по сравнению с другими видами наножидкостей, а наножидкость с частицами ZnO — самое низкое. Влияние цилиндра с квадратным сечением на характеристики теплопередачи также оказывается значительным при наличии броуновского движения. Максимальные значения числа Нуссельта увеличиваются на нижней и верхней стенках канала соответственно на 29 и 26 % при наличии броуновского эффекта и цилиндра квадратного сечения по сравнению со случаем без броуновского движения. С другой стороны, результаты показывают заметное улучшение теплообмена по сравнению с базовой жидкостью, которое более выражено на верхней стенке при большем  $\phi$ .

**Ключевые слова:** наножидкость, теплопроводность, броуновское движение, уступ поверхности, теплообмен.

### **Введение**

Изучение течений за уступом поверхности является важной областью фундаментальной науки о механике жидкости. После исследования [1], в котором рассматривалась чистая жидкость, было выполнено несколько работ в этой области [2–6]. Однако, насколько известно авторам, лишь в некоторых работах данный вопрос изучался применительно к наножидкостям. Этот относительно новый класс жидкостей со взвешенными металлическими наночастицами стал объектом изучения из-за заметного увеличения их теплопроводности, и многие исследования [5–7], проведенные в области течений и теплообмена наножидкости, показали, что такие жидкости обладают удивительной способностью теплообмена по сравнению с обычными жидкостями. Эта способность наножидкостей может послужить основой для огромного поля инноваций в сфере интенсификации передачи тепла, что является важным для ряда промышленных отраслей, в том числе для транспорта, энергетики, теплоэнергетики, охлаждения, вентиляции, конди-

ционирования воздуха и т.д. Что касается исследования течения наножидкости за уступом, то здесь нужно отметить пионерскую работу [8], в частности, в вопросе анализа влияния наножидкостей на картину течения и связанного с этим теплообмена. Результаты, полученные при вынужденной конвекции, показывают, что наличие наночастиц с высокой теплопроводностью влечет за собой значительное увеличение числа Нуссельта за областью рециркуляции течения. К числу самых широко известных наночастиц относятся  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{SiC}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{SiO}_2$ , металлы —  $\text{Al}$  и  $\text{Ag}$ , и неметаллические материалы — графит и другие наночастицы [9]. Небольшое количество твердых наночастиц в жидкостях значительно увеличивает их теплопроводность по сравнению с базовой жидкостью. Влияние на теплообмен течения наножидкости при смешанной конвекции за горизонтальным микроуступом, размещенном в канале, было численно изучено в работе [10]. Результаты, полученные в ней для различных наночастиц ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{SiO}_2$  и  $\text{ZnO}$ ) с объемными долями в диапазоне от 1 до 4 % и диаметрами наночастиц от 25 до 70 нм, показали, что число Нуссельта увеличивается с увеличением объемной доли частиц и числа Рейнольдса.

Важное место в исследованиях занимает поиск пути для эффективного увеличения характеристик теплообмена в течении за уступом в каналах. Действительно, изменение геометрии потока является одним из методов, которые используются для повышения скорости передачи тепла, таких как расширение или сужение канала, использование ребер на стенках канала, вставка закрученных лент через проходящий поток, использование препятствий в потоках и т.д. Например, авторы работы [11] исследовали влияние размера препятствия на теплообмен, которое составило около 190 % при нагреве уступа и 150 % при нагреве участка нижней пластины. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования обтекания цилиндра в потоке с обратным уступом с использованием принципа взаимодействия поля был применен в работе [12]. Результаты показали, что при наличии цилиндра конвективный теплообмен увеличился за счет неоднородности потока и эффектов сжатия теплового пограничного слоя. В работе [13] были получены экспериментальные данные при обтекании жидкостью 12 сегментированных перегородок. Было показано, что после прохождения примерно двух препятствий вертикальная средняя скорость и ее пульсации вдоль горизонтальной центральной линии приобретают периодический характер. В работе [14] изучалось конвективное ламинарное обтекание наклонных уступов в воздуховоде с препятствием, установленным на верхней стенке. Результаты показали, что препятствие усиливает теплообмен на нижней стенке. Авторы [15] изучали интенсификацию теплообмена в двумерном ламинарном и турбулентном смешанных конвективных течениях вблизи уступов с препятствием на стенке канала, используя различные типы наножидкости. Их результаты показали, что при добавлении частиц  $\text{SiO}_2$  достигаются самые высокие значения числа Нуссельта и скорости потока, за  $\text{SiO}_2$  следуют соответственно  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{ZnO}$  и  $\text{CuO}$ , а самый низкий результат дает чистая вода. Кроме того, было показано, что число Нуссельта увеличивается с ростом объемной доли и уменьшается с ростом диаметра наночастиц. Оптимальное положение перегородки для интенсификации теплообмена меняется в зависимости от заданных режимов температуры и течения, а влияние ширины и количества перегородок на теплообмен незначительно. В работе [16] численно исследовались вынужденная конвекция ламинарного течения наножидкости и теплообмен за уступом с препятствием и без него. Было показано, что число Нуссельта возрастает с увеличением числа Рейнольдса и высоты прямоугольного цилиндра. Самый значительный рост тепла наблюдался при числе Рейнольдса, равном 225, высоте прямоугольного цилиндра 4,5 мм и объемной доли наночастиц  $\text{CuO}$ , равной 4 %.

Для прогнозирования эффективности теплопроводности наножидкости в последние годы было проведено множество теоретических исследований и предложено несколько моделей. При изучении взаимодействия наночастиц и их движения в жидкости некоторые исследователи учитывали вклад динамической составляющей, связанной

с броуновским движением частиц (см., например, [17–22]). Однако остаются еще сомнения в правильности моделирования броуновского движения наночастиц, и большинство исследований наножидкости по-прежнему полагаются на оригинальные либо модифицированные модели, предложенные авторами работ [23, 24], в которых рассматриваются не просто наночастицы, а наночастицы в окружении межфазного слоя.

Обзор литературы показал, что поток наножидкости и связанные с ним характеристики теплообмена за уступом в присутствии плохообтекаемого тела еще недостаточно исследованы. Настоящая работа способствует пониманию структуры течения и интенсификации теплообмена с целью практических применений. Она посвящена изучению двумерного конвективного течения за уступом с использованием различных типов наножидкостей и разных объемных долей наночастиц в диапазоне от 0 до 0,06. Работа состоит из двух частей. В первой части исследуется воздействие броуновского движения на отрывное течение жидкости с наночастицами и теплообмен при наличии уступа без цилиндра, а также влияние силы плавучести и объемной доли наночастиц на структуру потока и связанный с этим теплоперенос. Вторая часть посвящена исследованию теплообмена в наножидкости в канале с внезапным расширением при наличии квадратного цилиндра.

Для исследования структуры потока и распределения теплообмена в канале за основной областью рециркуляции помещался адиабатический квадратный цилиндр. Его расположение в области отрыва имеет большее влияние на теплообмен из-за интерференции отрывных течений за уступом и самим цилиндром. Численные расчеты выполнены для числа Рейнольдса  $Re = 450$  при фиксированном диаметре наночастиц  $d_{np} = 30$  нм.

### 1. Определяющие уравнения

Геометрия рассматриваемого течения и система координат показаны на рис. 1. Безразмерные уравнения неразрывности, импульса и тепловой энергии, определяющие ламинарное течение за уступом, могут быть записаны в следующей консервативной форме:

$$\operatorname{div}(V) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{div}(J_u) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad J_u = uV - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \operatorname{grad}(u), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \operatorname{div}(J_v) = -\frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varphi \rho_s \beta_s + (1-\varphi) \rho_f \beta_f}{\rho_{nf} \beta_f} \operatorname{Ri} \theta, \quad J_v = vV - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \operatorname{grad}(v), \quad (3)$$

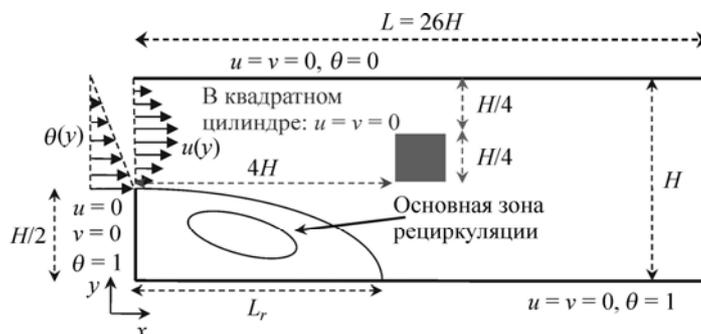


Рис. 1. Схема течения.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \operatorname{div}(J_\theta) = 0, \quad J_\theta = \theta V - \frac{1}{\operatorname{Re} \operatorname{Pr}} \cdot \frac{\alpha_{\text{nf}}}{\alpha_f} \operatorname{grad}(\theta). \quad (4)$$

Эффективная плотность ( $\rho_{\text{nf}}$ ), коэффициент теплового расширения ( $\beta_{\text{nf}}$ ) и теплоемкость  $(\rho C_p)_{\text{nf}}$  наножидкостей определяются [25] как:

$$\rho_{\text{nf}} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_s, \quad (5)$$

$$\beta_{\text{nf}} = (1 - \varphi)\beta_f + \varphi\beta_s, \quad (6)$$

$$(\rho C_p)_{\text{nf}} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_s. \quad (7)$$

Броуновское движение оказывает существенное влияние на эффективную теплопроводность. В табл. 1 приведены теплофизические свойства воды и различных наночастиц.

Авторы работы [27] предположили, что эффективную теплопроводность наножидкости определяют статическое слагаемое частиц и слагаемое, описывающее броуновское движение. Такая двухкомпонентная модель теплопроводности учитывает влияние типа частиц, их размера, объемной доли, зависимость от вида базовой жидкости и ее температуры. Основываясь на своих экспериментальных данных, авторы представили корреляцию, которая явилась сочетанием статической части, предложенной Максвеллом, и динамической компоненты, возникающей за счет Броуновского движения наночастиц:

$$k_{\text{nf}} = k_{\text{static}} + k_{\text{Brownian}}, \quad (8)$$

здесь  $k_{\text{static}}$  — статическая теплопроводность на основе классической корреляции Максвелла,

$$k_{\text{static}} = k_f \left[ \frac{(k_s + 2k_f) - 2\varphi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \varphi(k_f - k_s)} \right], \quad (9)$$

где  $k_s$  и  $k_f$  — теплопроводности твердых частиц и базовой жидкости соответственно. В то же время теплопроводность за счет броуновского движения определяется в работе [27] как

$$k_{\text{Brownian}} = 5 \cdot 10^4 \beta \varphi \rho C_{p,f} \sqrt{\frac{KT}{\rho_{\text{nf}} d_{\text{nf}}}} f(T, \varphi), \quad (10)$$

где

$$f(T, \varphi) = (2,8217 \cdot 10^{-2} \varphi + 3,917 \cdot 10^{-3}) (T/T_0) + (-3,0669 \cdot 10^{-2} \varphi - 3,91123 \cdot 10^{-3}), \quad (11)$$

где  $K$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура жидкости,  $T_0$  — исходная температура.

Вязкость наножидкости рассматривается приблизительно как вязкость базовой жидкости с учетом добавления сферических наночастиц. В работе [28] была разработана теоретическая модель для прогнозирования эффективной вязкости наножидкости на основе броуновского движения. Было показано, что эта модель может точно предсказать

Таблица 1

Теплофизические свойства воды и различных наночастиц при  $T = 300 \text{ K}$  [26]

Теплофизические свойства	Вода	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{CuO}$	$\text{ZnO}$
Плотность, $\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	998,2	3970	6500	5600
Удельная теплоемкость, $C_p$ (Дж/кг·К)	4182	765	535,6	495,2
Коэффициент теплопроводности, $k$ (Вт/м·К)	0,6	40	20	13
Коэффициент динамической вязкости, $\mu$ (Нс/м)	0,001003	—	—	—
Коэффициент теплового расширения, $\beta$ (1/К)	$207 \cdot 10^{-6}$	$5,80 \cdot 10^{-6}$	$4,30 \cdot 10^{-6}$	$4,31 \cdot 10^{-6}$

эффективную вязкость различных наножидкостей. В результате было получено следующее выражение:

$$\mu_{nf} = \mu_f + \rho_{np} V_B d_{np}^2 / (72C\delta), \quad (12)$$

в котором

$$V_B = \frac{1}{d_{np}} \sqrt{\frac{18KT}{\pi\rho_{np}d_{np}}}, \quad (13)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\varphi}d_{np}}, \quad (14)$$

$$C = \mu_f^{-1} [(c_1 d_{np} \cdot 10^9 + c_2)\varphi + (c_3 d_{np} \cdot 10^9 + c_4)], \quad (15)$$

где  $c_1 = -0,000001133$ ,  $c_2 = -0,000002771$ ,  $c_3 = 0,00000009$ ,  $c_4 = -0,000000393$ ,  $\mu_{nf}$  и  $\mu_f$  — вязкость наножидкости и базовой жидкости соответственно,  $d_{np}$  — диаметр наночастицы,  $\varphi$  — объемная доля наночастиц. В табл. 2 приведены выражения для коэффициента теплового расширения  $\beta$  уравнения для частиц  $Al_2O_3$ ,  $ZnO$  и  $CuO$  [29].

Авторы работы [20] исследовали ламинарное течение наножидкости в созданном ими микротеплопоглощающем устройстве с использованием эффективной тепловой проводимости наножидкости. Для определения эффективной вязкости за счет микро-смешивания в суспензии ими было предложено выражение

$$\mu_{nf} = \mu_{static} + \mu_{Brownian} = \mu_{static} + \frac{k_{Brownian}}{k_f} \cdot \frac{\mu_f}{Pr}, \quad (16)$$

где  $\mu_{static} = \mu_f / (1 - \varphi)^{2,5}$  — вязкость наножидкости [30], число Прандтля  $Pr = 6,2$ .

В приведенных выше уравнениях пространственные координаты, скорость, время и давление нормализуются на высоту канала вниз по потоку  $H$ , максимальную скорость на входе в канал  $u_0$ , характерное время  $H/u_0$  и характерное давление  $\rho_f u_0^2$  соответственно. Безразмерная переменная  $\theta$  определялась следующим образом:  $\theta = (T - T_c) / (T_h - T_c)$ , где  $T_h$  и  $T_c$  — высокая и низкая температуры соответственно.

### Граничное условие

Для скорости на всех твердых стенках ставятся граничные условия прилипания. Температура на верхней стенке канала постоянна и равна  $T_c$ , что соответствует  $\theta = 0$ . Уступ и нижние стенки канала предполагаются изотермически нагретыми до  $T_h$ , что соответствует  $\theta = 1$ . На входе в канал нормальная составляющая скорости принимается равной нулю и задается полностью развитый параболический профиль осевой скорости, выражаемый зависимостью  $u(y) = -16(y^2 - 1,5y + 0,5)$ . Профиль температуры входящего потока жидкости имеет линейный вид:  $\theta(y) = 2(1 - y)$  (см. [8]). На выходе из канала задается конвективное граничное условие  $\partial\phi/\partial t + u_{av}(\partial\phi/\partial x) = 0$ , где  $\phi$  — переменная ( $u, v, \theta$ ),  $u_{av}$  — средняя скорость на входе в канал. Как отмечалось в работах [31] и [32], конвективное граничное условие сокращает количество итераций на шаг по времени и

Таблица 2  
Выражения для коэффициентов теплового расширения [29]

Частицы	$\beta$	Концентрация	Температура
$Al_2O_3$	$8,4407(100\varphi)^{-1,07304}$	$1\% \leq \varphi \leq 10\%$	$298\text{ K} \leq T \leq 363\text{ K}$
$ZnO$	$8,4407(100\varphi)^{-1,07304}$	$1\% \leq \varphi \leq 7\%$	$298\text{ K} \leq T \leq 363\text{ K}$
$CuO$	$9,8810(100\varphi)^{-0,9446}$	$1\% \leq \varphi \leq 6\%$	$298\text{ K} \leq T \leq 363\text{ K}$

обеспечивает более короткую расчетную область по сравнению со случаем граничного условия Неймана. Стенки квадратного цилиндра считаются адиабатическими.

Тепловой поток между течением и горизонтальными стенками уступа характеризуется пространственно усредненным числом Нуссельта, вычисляемым как

$$\text{Nu}_{\text{av}} = 1/L \int_0^L \text{Nu}(x) dx, \quad (17)$$

где  $\text{Nu}(x)$  — это локальное число Нуссельта, рассчитанное с помощью уравнения [8]

$$\text{Nu}(x) = \frac{1}{\theta_b(x) - 1} \cdot \frac{k_{\text{nf}}}{k_f} \cdot \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\text{wall}}, \quad (18)$$

здесь  $\theta_b(x)$  — среднемассовая температура, рассчитанная по уравнению

$$\theta_b(x) = \int_0^1 u \theta dy / \int_0^1 u dy. \quad (19)$$

Осредненное по времени и пространству число Нуссельта  $\langle \overline{\text{Nu}} \rangle$  на горизонтальных стенках уступа вычисляется следующим образом:

$$\langle \overline{\text{Nu}} \rangle = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{Nu}_{\text{av}} d\tau, \quad (20)$$

где временной интервал  $(\tau_2 - \tau_1)$  велик по сравнению с периодом колебаний и обычно выбирается как целое, кратное периоду колебаний.

## 2. Процедура решения

Система уравнений непрерывности, движения и энергии решается с помощью метода конечных объемов [33] на разнесенных сетках. Члены конвекции в уравнениях (2)–(4) дискретизировались с использованием гибридной схемы, а диффузионные члены — с помощью схемы второго порядка. Алгоритм SIMPLER применялся для решения в паре давление–скорость в сочетании с неявной схемой переменного направления для определения эволюции во времени.

Настоящие вычисления выполнены с использованием сетки с  $366 \times 119$  ячейками с переменными размерами  $10^{-2} \leq \Delta x \leq 10^{-1}$  и  $10^{-3} \leq \Delta y \leq 10^{-2}$ . Для определения независимости сетки выполнен расчет для  $561 \times 255$  точек сетки размерами  $5 \cdot 10^{-3} \leq \Delta x \leq 7 \cdot 10^{-2}$  и  $5 \cdot 10^{-4} \leq \Delta y \leq 7 \cdot 10^{-3}$  для  $\text{Re} = 450$ ,  $\text{Pr} = 6,2$ ,  $\text{Ri} = 0$  и  $\varphi = 0$  (чистая вода). Результаты вычислений продемонстрировали разницу всего в 1,5, 0,7 и 1,1 % в значениях длины присоединения потока  $L_r$  и в осредненных по времени и пространству числах Нуссельта  $\langle \overline{\text{Nu}} \rangle$

на нижней и верхней стенках канала соответственно. Поскольку на сетке  $561 \times 255$  время вычисления почти в четыре раза выше, чем на сетке  $366 \times 119$ , авторы решили использовать последнюю в качестве базовой. Для всех исследованных случаев шаг вычислений по времени составлял  $\Delta \tau = 0,005$ . Шаг  $\Delta \tau = 0,0025$  не привел к изменениям результатов вычислений. Данные, полученные по предложенной схеме вычисления сравнивались по длине присоединения потока и по осредненным числам Нуссельта с результатами работы [8], полученными для ламинарного течения с вынужденной конвекцией наножидкости Си-вода с уступом в отсутствие квадратного цилиндра. Из рис. 2 видно, что длина присоединения начинает расти с ростом числа Рейнольдса, увеличивая таким образом первую зону рециркуляции. С другой стороны, как видно на рис. 3, результаты показывают заметную интенсификацию теплообмена по сравнению с базовой жидкостью ( $\varphi = 0$ ),

Рис. 2. Сравнение результатов настоящих расчетов (1) для длины присоединения с данными, полученными в работе [8] (2), при  $\varphi = 0$  в отсутствии квадратного цилиндра.

наблюдаемое усиление более выражено на горизонтальных стенках для большего  $\varphi$ . Это вполне логично из-за увеличения эффективной теплопроводности на обеих боковых стенках из-за хаотического движения наночастиц. Рисунки 2, 3 показывают, что результаты расчетов хорошо согласуются с данными работы [8]. Максимальные отклонения составляют всего 3 и 2,7 % для длины присоединения и осредненного числа Нуссельта соответственно. Поэтому можно заключить, что представленный алгоритм может быть пригоден для расчета течения и теплообмена наножидкости за уступом поверхности.

### 3. Результаты и обсуждение

Численное моделирование было выполнено для изучения влияния броуновского движения наночастиц на течение жидкости и теплообмен за уступом поверхности. Таким образом, целью настоящего исследования является изучение интенсификации теплообмена двумерного ламинарного смешанно-конвективного течения за уступом для случаев наличия и отсутствия адиабатического квадратного цилиндра при использовании различных типов наножидкостей. Расчеты проводились для потока наножидкостей CuO-вода, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-вода и ZnO-вода за уступом при разнице температур  $\Delta T < 35$  К, объемной доли  $\varphi$  в диапазоне от 0 до 0,06 и постоянном числе Рейнольдса  $Re = 450$ . Здесь представлено влияние броуновского движения, типов наночастиц и наличия квадратного цилиндра на длину зоны рециркуляции, скорость, число Нуссельта, распределения линий тока и температуры.

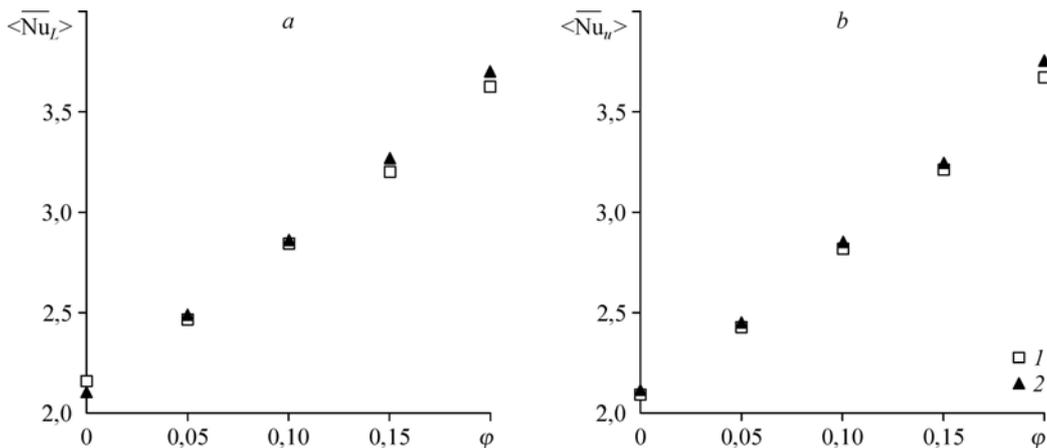
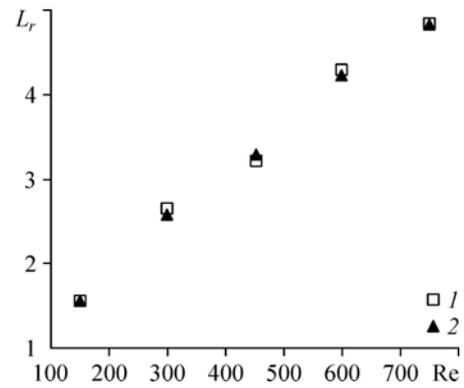


Рис. 3. Сравнение осредненных по времени и пространству чисел Нуссельта, полученных в настоящих расчетах (1), с данными, полученными в работе [8] (2), при  $Re = 450$  в отсутствие квадратного цилиндра и броуновского движения (вода/Cu).

Нижняя (a) и верхняя (b) стенки канала.

**Верификация модели броуновского движения  
для отрывного течения жидкости с наночастицами  
и влияния этого движения на теплообмен за уступом  
в отсутствие квадратного цилиндра**

Поток отрывается от кромки уступа из-за внезапного расширения канала и направляется на стенки ниже по течению. Он делится на две части: одна разворачивается, движется в противоположном направлении к стенке уступа и образует область рециркуляции, а другая движется вниз по потоку от точки присоединения, лежащей между этими частями, там, где скорость имеет нулевое значение [1]. Точкой присоединения называется точка, где оторвавшийся поток достигает нижней стенки (см. рис. 1). Поток характеризуется рециркуляционными вихрями и обратными течениями внутри отрывной области. Воздействие наночастиц и броуновского движения на длину присоединения показаны на рис. 4. Результаты представлены для развитого стационарного режима и случая  $\Delta T = 0$ . Можно наблюдать, что длина области рециркуляции начинает уменьшаться с увеличением объемной доли дисперсной фазы. Это связано с относительно меньшим воздействием инерции при большей величине объемной доли наночастиц. Кроме того, на длину области рециркуляции влияет броуновское движение, особенно при больших объемных долях дисперсной фазы. Последнее также можно объяснить увеличением динамической вязкости наножидкости с увеличением  $\varphi$  (см. уравнение (16)) и, следовательно, ростом силы трения на кромке стенок уступа. Эти силы, как правило, противостоят развитию основной зоны рециркуляции (см. рис. 5). Такое поведение может быть вызвано генерацией вихря, расположенного в верхней части основной зоны рециркуляции, как показано на рисунке. Вихрь, который увеличивается в размерах с течением времени, покидает основную зону рециркуляции в направлении движения основного потока. В случае течения без броуновского движения величина  $L_r$  незначительно уменьшается с увеличением  $\varphi$ . Тип жидкости не оказывает существенного влияния на длину области рециркуляции. При учете броуновского движения большая длина зоны рециркуляции отвечает наножидкостям с низкой плотностью —  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{ZnO}$  или  $\text{CuO}$ . Уменьшение длины области рециркуляции при увеличении объемной доли дисперсной фазы составляет примерно 7 и 64 % соответственно для случаев без учета и с учетом броуновского движения при объемной концентрации наночастиц 6 %.

На рис. 6b представлен профиль скорости базовой жидкости с наночастицами  $\text{CuO}$  с учетом и без учета броуновского движения при  $X = 2$  по сечению канала. Поток становится отрывным после прохождения через кромку уступа из-за внезапного расширения канала. Видно, что при учете броуновского движения и действия сил плавучести значение отрицательной скорости увеличивается в области рециркуляции как и величина положительной скорости выше зоны рециркуляции. Установлено, что размер области рециркуляции увеличивается с возрастанием разницы температуры между нагретой стенкой

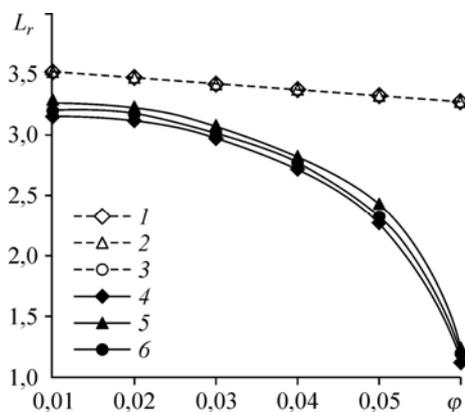


Рис. 4. Влияние броуновского движения на изменение  $L_r$  с объемной долей наночастиц  $\varphi$ . Вода/ $\text{CuO}$  (1), вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  (2), вода/ $\text{ZnO}$  (3) без учета броуновского движения; вода/ $\text{CuO}$  (4), вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  (5), вода/ $\text{ZnO}$  (6) с учетом броуновского движения.

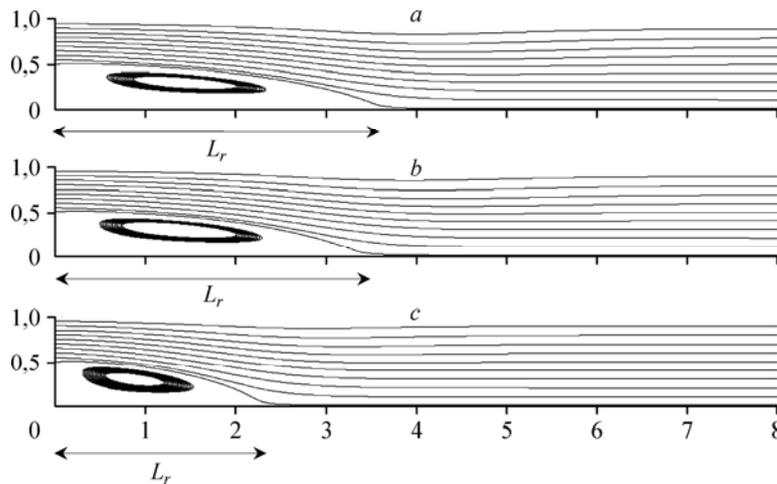


Рис. 5. Влияние броуновского движения на линии тока для наножидкости вода/CuO.

Чистая (базовая) жидкость ( $\varphi = 0$ ) (a),  
наножидкость вода/CuO (5 %) без учета (b) и с учетом (c) броуновского движения.

с уступами и наножидкостью, как показано на рис. 6a. Это происходит потому, что поток, расширяющийся в направлении течения, подвергается воздействию силы плавучести, которая действует перпендикулярно ему. Следовательно, сила плавучести не настолько значительна, чтобы повлечь повышения скорости потока с более низкой температурой, но влияет на течение, увеличивая длину области рециркуляции, как было указано ранее. Вниз по течению при  $X = 2$  поток имеет отрицательные скорости у нагретых стенок, указывая на то, что зона рециркуляции развивается за уступом. Происходит увеличение отрицательной величины скорости наножидкости для течения без учета броуновского движения (т.е. градиент скорости увеличивается в отрицательном значении, а плотность жидкости уменьшается при приближении к горячей стенке). Следует заметить, что наножидкость с более высокой плотностью имеет меньшую скорость потока по сравнению с наножидкостями с меньшей плотностью. Очевидно, что плотность увеличивается при учете броуновского движения ( $\mu_{nf} = \mu_{static} + \mu_{Brownian}$ ).

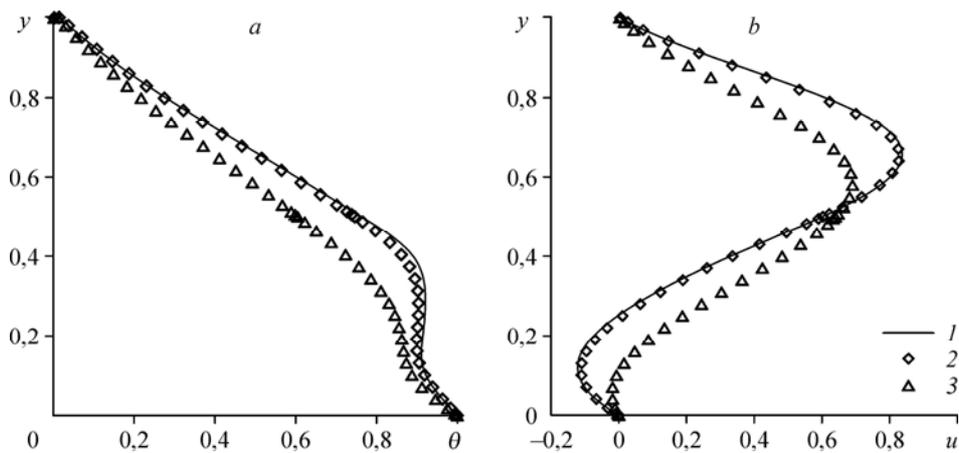


Рис. 6. Влияние учета броуновского движения для  $\varphi = 0,05$  при  $X = 2$ .

a — распределение температуры, b — распределение скорости;  
1 — чистая (базовая) жидкость, 2 — вода/CuO (5 %) без учета броуновского движения,  
3 — вода/CuO (5 %) с учетом броуновского движения.

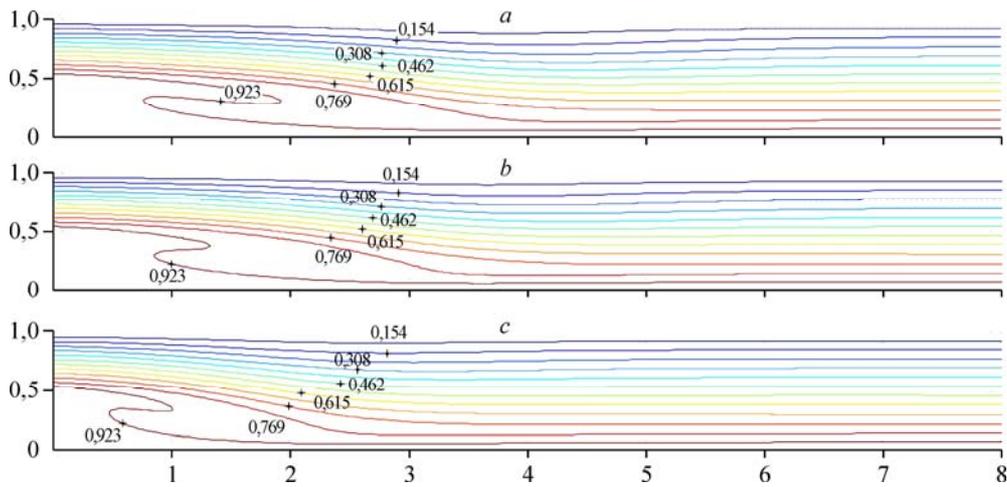


Рис. 7. Влияние броуновского движения на контуры изотерм.

Чистая (базовая) жидкость ( $\varphi = 0$ ) (a),  
наножидкость вода/CuO (5 %) без учета (b) и с учетом (c) броуновского движения.

Влияние наличия в жидкости наночастиц на распределение поля температур показано на рис. 7. Интенсивность теплообмена и деформация изотерм увеличиваются при добавлении наночастиц в базовую (чистую) жидкость. Уменьшение толщины теплового пограничного слоя, которое отчетливо проявляется в присутствии наночастиц, является основной причиной такого поведения, таким образом, за счет этого увеличивается число Нуссельта. Изотермы расположены гораздо плотнее в нижней части канала при расчете с учетом броуновского движения. В то же время число Нуссельта является результатом умножения градиента температуры на коэффициент теплопроводности. Интенсификация теплообмена при учете броуновского движения наночастиц происходит за счет роста градиента температуры, и эта величина гораздо выше, чем без его учета. Похожее поведение теплообмена наблюдается на рис. 5, где заметно влияние броуновского движения на структуру течения. Показано также, что контуры температуры имеют наиболее крутой подъем для чистой жидкости в области ближнего следа.

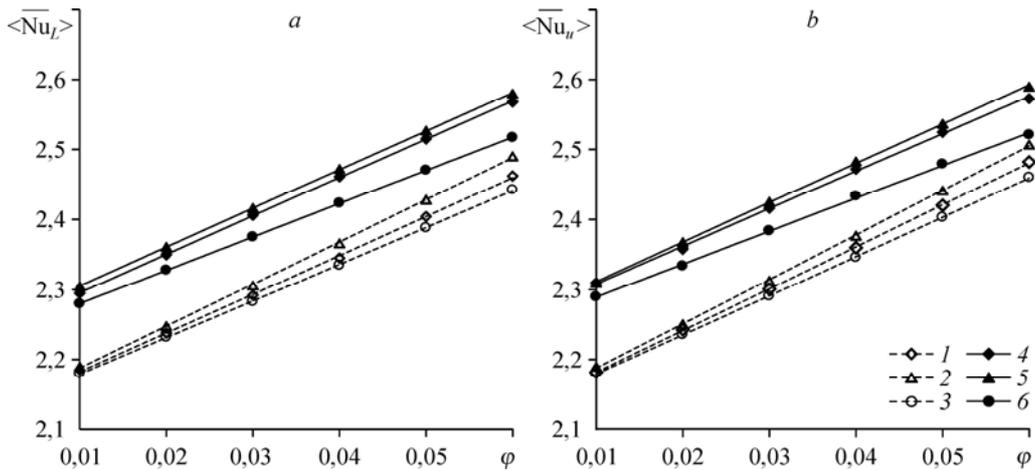


Рис. 8. Влияние броуновского движения на изменение  $\langle \overline{Nu} \rangle$  при вариации  $\varphi$ .

Нижняя (a) и верхняя (b) стенки канала; вода/CuO (1), вода/ $Al_2O_3$  (2), вода/ZnO (3) без учета броуновского движения; вода/CuO (4), вода/ $Al_2O_3$  (5), вода/ZnO (6) с учетом броуновского движения.

На рис. 8 показано влияние броуновского движения на осредненный теплообмен на нижней и верхней стенках. Наблюдается значительное увеличение числа Нуссельта при увеличении объемной доли наночастиц для различных наножидкостей с учетом и без учета броуновского движения. Кроме того, видно, что теплообмен возрастает при учете броуновского движения по сравнению со случаем без его учета, причем в первом случае очевидно, что броуновское движение оказывает влияние на теплообмен на всех участках за исключением верхней стенки. Например, для  $\varphi = 0,04$  рост теплообмена составляет приблизительно около 4,91, 4,48 и 3,76 % для CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO соответственно. Наличие броуновского движения наночастиц увеличивает теплопроводность наножидкости, поскольку на теплопроводность наножидкости влияют статические и динамические механизмы. Также броуновское движение наночастиц может способствовать интенсификации теплообмена за счет двух механизмов: за счет движения наночастиц, переносящих тепловую энергию, и за счет микроконвекции жидкости, окружающей наночастицу [34].

Влияние броуновского движения и типа наночастиц на распределение числа Нуссельта на стенке по течению за уступом демонстрируется на рис. 9. Здесь рассмотрено три различных типа наночастиц: CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO при  $\varphi = 0,05$ . Следует отметить, что для всех этих типов наножидкостей получены более высокие значения числа Нуссельта по сравнению с чистой водой. Кроме того, число Нуссельта при наличии учета броуновского движения перечисленных наночастиц имеет значение выше, чем без учета последнего. Видно, что наножидкость с частицами Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> демонстрирует наибольшее число Нуссельта, за ней следуют CuO и ZnO соответственно. Как упоминалось выше, при учете броуновского движения наножидкость демонстрирует меньшую область зоны рециркуляции (это можно увидеть далее на рис. 12) и вторичный отрывной поток жидкости смешивается с основным отрывным течением ближе к стенке уступа. Подобные явления были отмечены в работе [10], где изучалось влияние броуновского движения на характеристики течения в основной рециркуляционной области. Результаты численных расчетов показывают, что величины максимального и минимального локальных чисел Нуссельта увеличиваются и сдвигаются вверх по потоку при добавлении наночастиц. Этот феномен ярче выражается при учете броуновского движения. Причиной этому является рост теплопроводности и удельной теплоемкости наножидкости, которые влияют на поток наряду с плотностью и вязкостью.

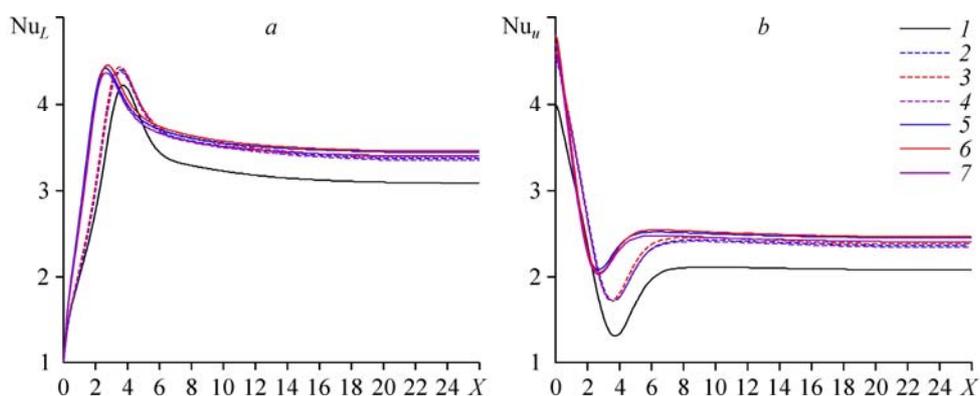


Рис. 9. Влияние броуновского движения на локальное распределение Нуссельта для  $\varphi = 0,05$ .

Нижняя (a) и верхняя (b) стенки канала; чистая (базовая) жидкость (1);  
без учета броуновского движения: вода/CuO (2), вода/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (3), вода/ZnO (4);  
с учетом броуновского движения: вода/CuO (5), вода/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (6), вода/ZnO (7).

В работе [35] утверждалось, что пики локального теплообмена сдвигаются вверх по потоку к началу канала по мере того как поток изменяет температуру (см. рис. 6). Число Нуссельта в отрывной зоне увеличивается, пока не достигает своего максимального значения. После этого оно уменьшается из-за роста разности температур, пока не достигнет своего минимального значения непосредственно за точкой присоединения потока. После этого значение числа Нуссельта остается практически неизменным до конца вычислительной области. На верхней стенке (рис. 9b) число Нуссельта резко уменьшается и достигает своего минимального значения в точке вблизи зоны рециркуляции, что объясняется уменьшением градиента температуры. Недалеко от стенки уступа скорость жидкости и, следовательно, коэффициент теплопереноса увеличивается из-за внезапного сжатия потока, что приводит к уменьшению разности температур стенки и наножидкости. С другой стороны, распределение числа Нуссельта на верхней стенке демонстрирует увеличение на ней числа Нуссельта при добавлении наночастиц и при учете влияния броуновского движения (в основном при  $X = 2-4$ ). Объяснение такому поведению можно получить, рассмотрев уравнение (18). Формула для числа Нуссельта состоит из трех частей: разности температур между стенкой и среднemasсовой температурой потока  $1/(\theta_b - 1)$ , отношения теплопроводностей (т.е.  $k_{nf}/k_f$ ) и градиента температуры на стенке (т.е.  $d\theta/dy$ ). Изотермы наножидкости вблизи верхней стенки становятся разреженными (см., например, рис. 7 от  $X = 2$  до  $X = 4$ ). Таким образом, снижение градиента температуры и уменьшение теплоотдачи достигается в этой зоне на верхней стенке. Кроме того, следует отметить, что зона рециркуляции искривляет линии тока от верхней стенки к нижней, что также было установлено в работе [8]. В этот момент число Нуссельта начинает снова увеличиваться за счет снижения температуры при смешении и это происходит до тех пор, пока не будет достигнута точка, где влияние рециркуляции заканчивается, и число Нуссельта начинает постепенно уменьшаться.

#### **Исследование теплообмена в наножидкости при внезапном расширении канала и наличии квадратного цилиндра**

На рисунке 10 показано осевое изменение числа Nu вдоль нижней и верхней стенок канала для  $\varphi = 0,05$  с квадратным цилиндром для наножидкости вода/ $Al_2O_3$ . Максимальное значение Nu получено на расстоянии  $X = 4$ , соответствующем передней грани квадратного цилиндра (см. рис. 11), где в распределении числа Нуссельта наблюдается появление пика.

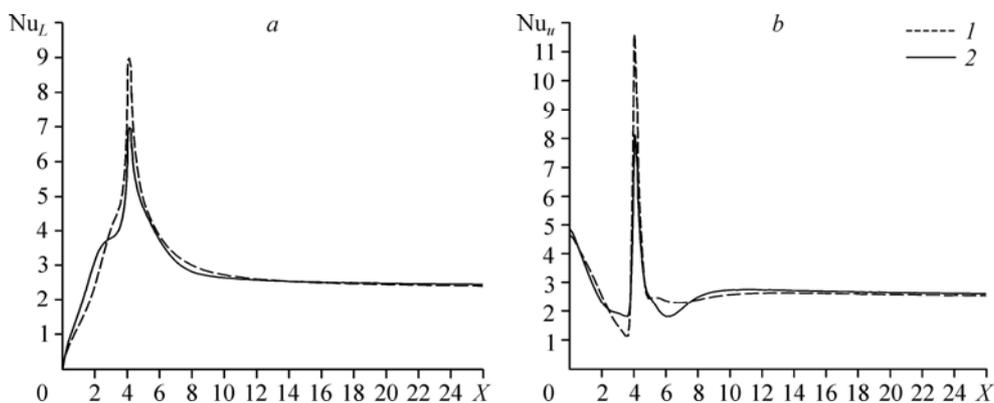


Рис. 10. Локальное распределение числа Нуссельта для наножидкости вода/ $Al_2O_3$  для  $\varphi = 0,05$  при наличии квадратного цилиндра.

Нижняя (a) и верхняя (b) стенки канала; без учета (1) и с учетом (2) броуновского движения.

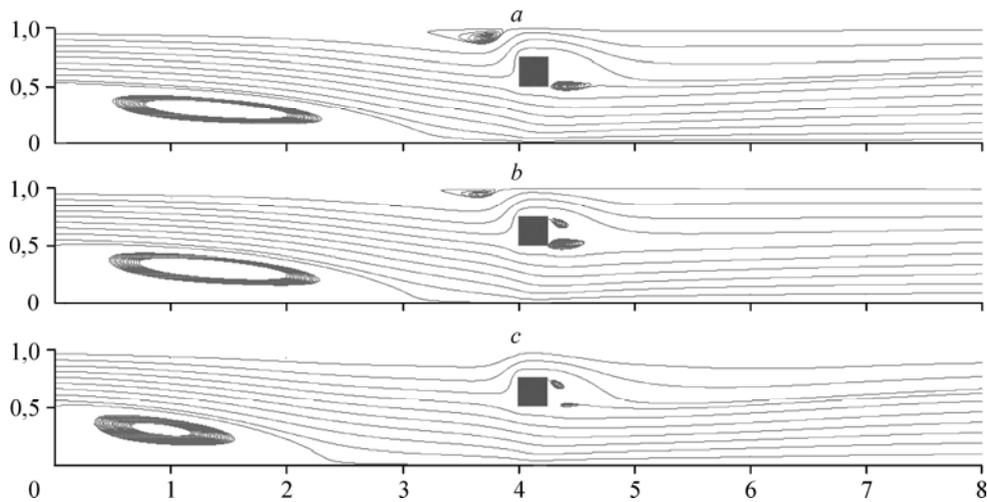


Рис. 11. Картины течения при наличии квадратного цилиндра в наножидкости вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$ .  
Однофазная базовая жидкость ( $\varphi = 0$ ) (a),  
наножидкость вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  (5 %) с учетом (b) и без учета (c) броуновского движения.

Увеличение числа Нуссельта зарегистрировано у горизонтальной стенки уступа. Максимальное значение  $Nu$  резко падает до очень низких значений на задней грани квадратного цилиндра. Такое поведение коэффициента теплообмена может объясняться тем, что вихреобразование резко возрастает в зоне рециркуляции за цилиндром, увеличивая вклад вязкости в теплообмен. Однако в точке присоединения отсутствуют сдвиговые касательные напряжения, что исключает вклад вязкости и оставляет только вклад теплопроводности в теплообмен. Этим объясняется резкое падение числа Нуссельта после достижения его максимального значения. На нижней стенке минимальное значение  $Nu$  обнаруживается при  $X = 0$  в нижнем левом углу канала, так как в этой точке нет движения и отсутствует теплообмен. Причина максимума теплообмена на передней кромке стенки при наличии квадратного цилиндра обусловлена развитием гидродинамического пограничного слоя, отрыва потока и высокой скорости теплообмена с наибольшим локальным числом Нуссельта на передней кромке стенки цилиндра. На рис. 12 изображены контуры изотерм для разных объемных долей наночастиц в наножидкости вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$ , которые подтверждают эти результаты. Таким образом, зона рециркуляции за уступом сжимается сильнее при наличии квадратного цилиндра, кроме того, в отличие от случая его отсутствия (см. рис. 7), наблюдается сжатие изотермы вблизи горизонтальных стенок. При наличии квадратного цилиндра характеристики теплообмена могут быть заметно улучшены (рассматривается далее на рис. 13).

На рис. 10b продемонстрировано появление второго пика за точкой присоединения вторичной отрывной зоны на верхней стенке канала. Таким образом, совершенно очевидно, что второй пик связан с наличием зоны вторичной рециркуляции. Область рециркуляции за цилиндром влияет на значение  $Nu$  на верхней стенке канала. Однако её основное влияние выражается в сужении проходного сечения потока между вторичной отрывной областью и квадратным цилиндром, как показано на рис. 11. Это приводит к увеличению градиента скорости между вторичной областью рециркуляции и квадратным цилиндром. Высокие значения градиента скорости у стенки отвечают за высокие числа генерации энтропии, которые вызывают появление второго пика максимума теплоотдачи. Таким образом, можно сделать вывод, что эффект вторичной зоны рециркуляции за цилиндром имеет решающее значение для увеличения локальных темпов производства

энтропии на верхней стенке канала и, соответственно, общих показателей производства энтропии по всей области потока.

На рис. 11 и 12 показано, что наличие квадратного цилиндра, обтекаемого потоком наножидкости, может вызвать значительные изменения в распределении линий тока и изотерм по сравнению с базовой однофазной жидкостью. Это изменение может быть более значительным при учете броуновского движения. Действительно, на рис. 11, отображающем изменения линий тока течения жидкости в канале при наличии и отсутствии наночастиц, видно, что основная зона рециркуляции за уступом уменьшается при наличии наночастиц в жидкости. Между тем точка повторного отрыва основного потока сдвигается вверх по течению по мере того, как основной поток проходит уступ (особенно это заметно в случае учета броуновского движения) и зона рециркуляции вблизи уступа уменьшается. Результаты, представленные на рис. 12 показывают, что вблизи нижней стенки канала изотермы становятся все более и более компактными и приближаются к левому нижнему углу канала. Поэтому вполне можно ожидать, что характеристики теплообмена в этой области могут изменяться с ростом объемной концентрации наночастиц. Влияние наночастиц на увеличение теплообмена становится значительнее при принятии во внимание броуновского движения.

На рис. 13 представлены осредненные числа Нуссельта на нижней и верхней стенках при наличии квадратного цилиндра. Здесь отображено увеличение числа Нуссельта, наблюдаемое при росте объемной доли наночастиц для разных видов наножидкостей

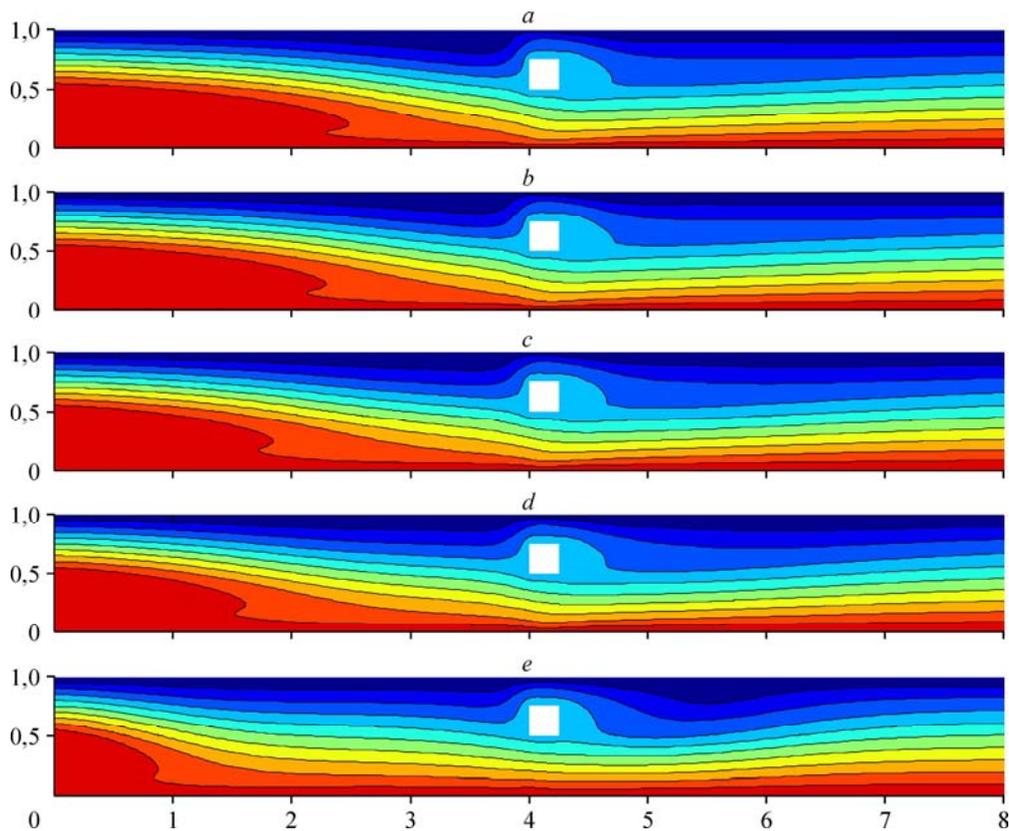


Рис. 12. Контуры изотерм при вариации объемной концентрации наночастиц для системы вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  при наличии квадратного цилиндра.

Базовая жидкость ( $\varphi=0$ ) (a), наножидкость вода/ $\text{Al}_2\text{O}_3$  (5 %) без учета (b) и с учетом ( $\varphi=4$ ) (c), 5 (d), 6 (e) % броуновского движения.

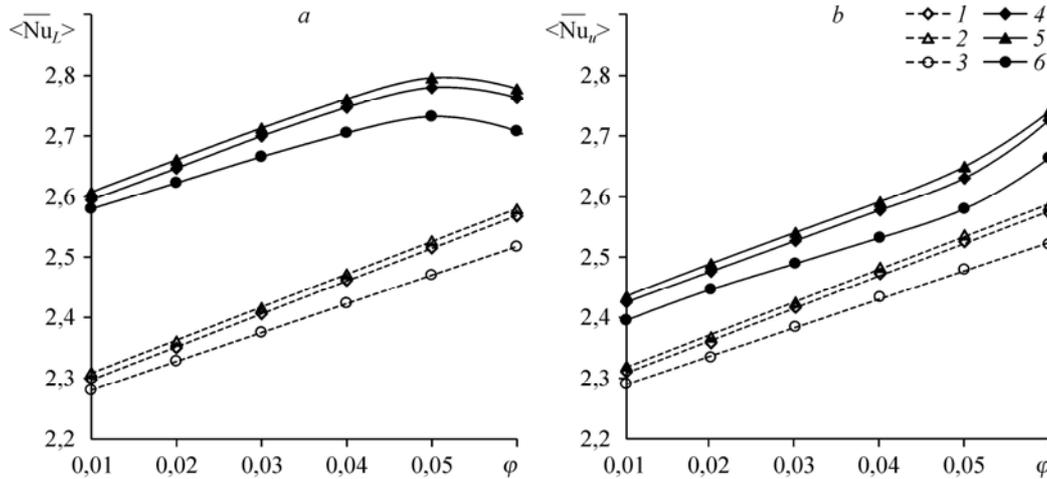


Рис. 13. Влияние квадратного цилиндра при учете броуновского движения на изменение  $\langle \overline{Nu} \rangle$  для  $\varphi$ .

Нижняя (а) и верхняя (б) стенки канала; вода/CuO (1), вода/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (2), вода/ZnO (3) в отсутствие квадратного цилиндра; вода/CuO (4), вода/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (5), вода/ZnO (6) при наличии квадратного цилиндра.

при наличии и отсутствии квадратного цилиндра. Кроме того, видно, что теплообмен увеличивается при наличии квадратного цилиндра в сравнении со случаем его отсутствия. Учет броуновского движения при наличии квадратного цилиндра приводит к интенсификации теплообмена за исключением области у нижней стенки. Действительно, при  $\varphi = 0,04$  наблюдается увеличение теплоотдачи на нижней стенке на 17,14, 16,69 и 15,84 % для CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO соответственно в сравнении со случаем без квадратного цилиндра.

### Заключение

В представленной работе выполнено численное моделирование в целях изучения влияния броуновского движения на течение различных наножидкостей и теплообмен за уступом поверхности при наличии и отсутствии адиабатического квадратного цилиндра, расположенного за областью отрыва потока. Исследование выполнено как с учетом броуновского движения, так и в его отсутствие. Рассматриваемая проблема является классической задачей механики жидкости и теплотехники. Приведем наиболее важные результаты.

1. Длина зоны рециркуляции течения уменьшается при добавлении наночастиц к базовой однофазной жидкости. Сокращение составляет 7 и 64 % для случаев без учета и с учетом броуновского движения соответственно и для концентрации наночастиц 6 %.

2. Длина зоны рециркуляции уменьшается с учетом броуновского движения.

3. При наличии броуновского движения без квадратного цилиндра всегда наблюдается увеличение теплообмена на горизонтальных стенках. Его интенсификация более выражена при высоких объемных долях наночастиц.

4. Пики максимума и минимума числа Нуссельта увеличиваются и сдвигаются вверх по потоку при добавлении наночастиц и рассмотрении броуновского движения.

5. Наличие адиабатического квадратного цилиндра сильно увеличивает теплообмен. Результаты показывают, что последний достигает своего максимума в месте расположения квадратного цилиндра.

6. При наличии броуновского движения среднее по времени число Нуссельта возрастает с увеличением объемной доли твердой фазы менее чем на 5 % для всех наножидкостей. Например, на нижней стенке для  $\varphi = 0,04$  это увеличение близко к 4,91, 4,48 и 3,76 % для CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO соответственно. В присутствии квадратного цилиндра это увеличение составляет 17,14, 16,69 и 15,84 %, для CuO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ZnO.

7. Для всех наножидкостей значение числа Нуссельта выше в сравнении с однофазной базовой жидкостью (вода); наножидкости Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> соответствует наибольшее его значение, за ней следуют соответственно CuO и ZnO.

### Условные обозначения

$C_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, кДж·кг <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup> ,	$Pr = \nu_f/a_f$ — число Прандтля,
$h$ — коэффициент конвективной теплопередачи, Вт·м <sup>-2</sup> ·К <sup>-1</sup> ,	$q_w$ — плотность теплового потока к стенке, Вт·м <sup>-2</sup> ,
$H$ — высота канала за сечением отрыва, м,	$Re = \rho_f u_0 H / \mu_f$ — число Рейнольда,
$k$ — коэффициент теплопроводности, Вт·м <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup> ,	$Ri = g \beta_f H^3 \cdot (T_h - T_c) / (v_f^2 \cdot R_e^2)$ — число Ричардсона,
$L$ — длина канала, м,	$T$ — температура, К,
$L_r$ — длина повторного присоединения потока, безразмерная,	$u_0$ — максимальная скорость на входе в канал,
$Nu$ — число Нуссельта,	$u$ — безразмерная компонента скорости в направлении координаты $x$ ,
$\overline{Nu}$ — число Нуссельта, осредненное по времени и пространству,	$v$ — безразмерная компонента скорости в направлении координаты $y$ ,
$P$ — безразмерное давление,	$x$ — безразмерная горизонтальная координата,
$p$ — давление, Н·м <sup>-2</sup> ,	$y$ — безразмерная вертикальная координата.
$Pe = Re \cdot Pr$ — число Пекле,	

### Греческие символы

$\alpha$ — коэффициент температуропроводности, м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> ,	$\mu$ — коэффициент динамической вязкости, кг·м <sup>-1</sup> ·с <sup>-1</sup> ,
$\beta$ — коэффициент теплового расширения, К <sup>-1</sup> ,	$\theta$ — безразмерная температура,
$\phi$ — переменная,	$\rho$ — плотность, кг·м <sup>-3</sup> ,
$\varphi$ — объемная концентрация наночастиц,	$\tau$ — безразмерное время.
$\nu$ — коэффициент кинематической вязкости, м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> ,	

### Подстрочные индексы

$av$ — среднее значение,	$s$ — твердое тело,
$b$ — среднемассовая величина параметра,	$w$ — стенка,
$nf$ — наножидкость,	$wc$ — холодная стенка,
$f$ — жидкость,	$wh$ — горячая стенка.

### Список литературы

1. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schönung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 473–496.
2. Gartling D.K. A test problem for outflow boundary condition-flow over a backward facing step // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1990. Vol. 11. P. 953–967.
3. Vradis G.C., Outgen V., Sanchez J. Heat transfer over a backward-facing step: solutions to a benchmark // Benchmark Problems for Heat Transfer Codes. ASME. 1992. Vol. 222. P. 27–34.
4. Barkeley D., Gomes M.G., Henderson R.D. Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 473. P. 167–190.
5. Ramšak M., Škerget L.A. Subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2004. Vol. 46. P. 815–847.
6. Tinney C.E., Ukeiley E.L.S. A study of a 3-D double backward-facing step // Experiments in Fluids. 2009. Vol. 47. P. 427–439.
7. Abu-Mulaweh H.I. A review of research on laminar mixed convection flow over backward and forward-facing steps // Int. J. of Thermal Sci. 2003. Vol. 42. P. 897–909.

8. **Abu-Nada E.** Application of nanofluids for heat transfer enhancement of separated flows encountered in a backward facing step // *Int. J. of Heat and Fluid Flow*. 2008. Vol. 29. P. 242–249.
9. **Demir H., Dalkilic A.S., Kurekci N.A., Duangthongsuk W., Wongwises S.** Numerical investigation on the single phase forced convection heat transfer characteristics of TiO<sub>2</sub> nanofluids in a double-tube counter flow heat exchanger // *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 38, No. 2. P. 218–228.
10. **Kherbeet A.Sh., Mohammed H.A., Salman B.H.** The effect of nanofluids flow on mixed convection heat transfer over microscale backward-facing step // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2012. Vol. 55. P. 5870–5881.
11. **Tsay Y.L., Chang T., Cheng J.** Heat transfer enhancement of backward-facing step flow in a channel by using baffle installation on the channel wall // *Acta Mech*. 2005. Vol. 174, No. 1. P. 63–76.
12. **Chen C.K., Yen T.S., Yang Y.T.** Lattice Boltzmann method simulation of a cylinder in the backward-facing step flow with the field synergy principle // *Int. J. of Thermal Sci*. 2006. Vol. 45. P. 982–989.
13. **Berner C., Durst F., McEligot D.M.** Streamwise-periodic flow around baffles // *Proc. 2nd International Conf. on Applications of Laser Anemometry to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1984. P. 14–15.
14. **Asad B., Seyyed A., Gandjalikhan N., Maliheh H.** Effects of baffle on entropy generation in separated convection flow adjacent to inclined backward-facing step // *J. Electronics Cooling and Thermal Control*. 2012. Vol. 2. P. 53–61.
15. **Mohammed H.A., Alawi O.A., Wahid M.A.** Mixed convective nanofluid flow in a channel having backward-facing step with a baffle // *Powder Technology*. 2015. Vol. 275. P. 329–343.
16. **Hussein T.** Laminar CuO–water nano-fluid flow and heat transfer in a backward-facing step with and without obstacle // *Applied Nanoscience*. 2015. Vol. 6, Iss. 3. P. 371–378.
17. **Xuan Y., Li Q., Hu W.** Aggregation structure and thermal conductivity of nanofluids // *AIChE J*. 2003. Vol. 49, No. 4. P. 1038–1043.
18. **Jangand S.P., Choi S.U.S.** Role of Brownian motion in the enhanced thermal conductivity of nanofluids // *Applied Physics Letters*. 2004. Vol. 84, No. 21. P. 4316–4318.
19. **Kumar D.H., Patel H.E., Kumar V.R.R., Sundararajan T., Pradeep T., Das S.K.** Model for heat conduction in nanofluids // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, No. 14. P. 144301-1–144301-4.
20. **Koon J., Kleinstreuer C.** A new thermal conductivity model for nanofluids // *J. of Nanoparticle Research*, 2004. Vol. 6, No. 6. P. 577–588.
21. **Prasher R., Bhattacharya P., Phelan P.E.** Thermal conductivity of nanoscale colloidal solutions (nanofluids) // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, No. 2. P. 1–4.
22. **Murshed S.M.S., Leong K.C., Yang C.** A combined model for the effective thermal conductivity of nanofluids // *Applied Thermal Engng*. 2009. Vol. 29. P. 2477–2483.
23. **Maxwell J.C.** *A Treatise on electricity and magnetism*. Vol. II. Oxford University Press, Cambridge, UK, 1873. P. 54.
24. **Hamilton R.L., Crosser O.K.** Thermal conductivity of heterogeneous twocomponent systems // *Industrial and Engng Chemistry Fundamentals*. 1962. Vol. 1, No. 3. P. 187–191.
25. **Khanafar K., Vafaiand K., Lightstone M.** Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. P. 3639–3653.
26. **Incropera F.P., DeWitt D.P.** *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6th edn. Hoboken: John Wiley & Song, NJ, 2007. 997 p.
27. **Vajjha R.S., Das D.K., Kulkarni D.P.** Development of new correlations for convective heat transfer and friction factor in turbulent regime for nanofluids // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 53. P. 4607–4618.
28. **Masoumi N., Sohrabi N., Behzadmehr A.** A new model for calculating the effective viscosity of nanofluids // *J. Phys. D: Appl. Phys*. 2009. Vol. 42, No. 5. P. 055501-1–055501-6.
29. **Vajjhaand R.S., Das D.K.** Experimental determination of thermal conductivity of three nanofluids and development of new correlations // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 4675–4682.
30. **Brinkman H.C.** The viscosity of concentrated suspensions and solutions // *J. of Chemical Physics*. 1952. Vol. 20. P. 571–581.
31. **Sohankar A., Norberg C., Davidson L.** Low-Reynolds number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*. 1998. Vol. 26. P. 39–56.
32. **Abbassi H., Turki S., Ben Nasrallah S.** Channel flow bluff-body: outlet boundary condition, vortex shedding and effects of buoyancy // *Computational Mechanics*. 2002. Vol. 28. P. 10–16.
33. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
34. **Valipour M.S., Masoodi R., Rashidi S., Bovand M., Mirhosseini M.** A numerical study on convection around a square cylinder using Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–H<sub>2</sub>O nanofluid // *Thermal Sci*. 2014. Vol. 18, No. 4. P. 1305–1314.
35. **Мохаммед Х.А., Аль-Асвади А.А., Шуэйб Н.Х., Сайдур Р.** Смешанно-конвективное течение наножидкостей в вертикальном канале с обратным уступом // *Теплофизика и аэромеханика*. 2012. Т. 19, № 1. С. 35–55.

*Статья поступила в редакцию 3 ноября 2016 г.,  
после переработки — 17 июля 2017 г.*