УДК 532.582

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

О. С. Пятигорская, В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поставлена и решена задача о движении двух "свободных" твердых частиц в однородно колеблющейся жидкости. Обнаружено, в частности, что частицы как целое наряду с колебаниями могут совершать среднее, монотонное перемещение.

Ключевые слова: колеблющаяся жидкость, твердые частицы, силовое взаимодействие, движение центра масс.

В работах [1–10] рассмотрены задачи о движении одной "свободной" абсолютно твердой частицы (кругового цилиндра, шара) в однородно и неоднородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости. В результате проведенных исследований обнаружены новые гидромеханические эффекты (например, парадоксальное поведение твердого тела в жидкости (при периодических по времени воздействиях на гидромеханическую систему) [1, 3]).

В данной работе рассмотрена задача о движении двух "свободных" абсолютно твердых частиц (шаров) в однородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости. Определено, в частности, среднее по времени силовое взаимодействие частиц и жидкости. Установлено, что при $\rho_1 \neq \rho_ж$, $\rho_2 \neq \rho_ж$, $\rho_1 \neq \rho_2$ ($\rho_ж$, ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости и частиц соответственно) центр масс частиц наряду с колебаниями совершает среднее, монотонное перемещение (вдоль оси колебаний жидкости).

1. В идеальной несжимаемой не ограниченной извне жидкости находятся две абсолютно твердые частицы Q_1 и Q_2 — шары радиусами A_1 и A_2 (см. рисунок). В начальный момент времени t, при $t = 0$, жидкость и частицы Q_1, Q_2 покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. В последующие моменты времени, при $t > 0$, жидкость на бесконечности периодически с периодом T колеблется вдоль оси Z; частицы Q_1, Q_2 совершают поступательное движение вдоль оси Z под действием сил давления жидкости; течение жидкости потенциальное, осесимметричное.

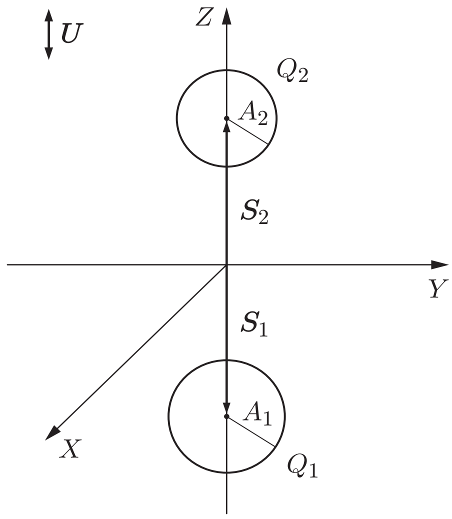
Положение частицы Q_i $(i = 1, 2)$ определяется радиус-вектором

$$\boldsymbol{S}_i = S_i \boldsymbol{e}_Z$$

ее центра ($\boldsymbol{e}_Z = \{0, 0, 1\}$; $S_2 > S_1 + A_1 + A_2$).

Требуется выяснить, каким образом $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ зависят от t.

Пусть $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_Z = U_0 \sin(2\pi t/T)\boldsymbol{e}_Z$ — скорость жидкости на бесконечности (U_0 — постоянная); Φ — потенциал скорости жидкости; P — давление в жидкости; Γ_i, $\boldsymbol{n}_i$ и



Гидромеханическая система (жидкость и твердые частицы)

$M_i = (4\pi/3)A_i^3\rho_i$ $(i = 1, 2)$ — граница частицы Q_i, единичный вектор внешней нормали к границе Γ_i и масса частицы Q_i соответственно;

$$\boldsymbol{F}_i = F_i\boldsymbol{e}_Z = -\iint\limits_{\Gamma_i} P\boldsymbol{n}_i\, d\Gamma_i = -\boldsymbol{F}_i' \qquad (i = 1, 2) \text{ —} \tag{1.1}$$

сила, действующая со стороны жидкости на частицу Q_i ($\boldsymbol{F}_i'$ — сила, действующая со стороны частицы Q_i на жидкость); S_0 — значение $(S_2 - S_1)/2$ при $t = 0$; I — функция t.

Постановку рассматриваемой задачи составляют уравнения движения частиц (центров частиц, центров масс частиц) Q_1, Q_2, интеграл Коши — Лагранжа, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах частиц, на бесконечности и в начальный момент времени:

$$M_1\,\frac{d^2\boldsymbol{S}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1, \qquad M_2\,\frac{d^2\boldsymbol{S}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho_{\text{ж}}} = I; \tag{1.3}$$

$$\Delta\Phi = 0; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\nabla\Phi = \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{e}_Z\,\frac{dS_1}{dt} \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \boldsymbol{n}_2\cdot\nabla\Phi = \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{e}_Z\,\frac{dS_2}{dt} \quad \text{на} \quad \Gamma_2; \tag{1.5}$$

$$\nabla\Phi \to \boldsymbol{U} \qquad \text{при} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 \to \infty; \tag{1.6}$$

$$S_1 = -S_0, \quad \frac{dS_1}{dt} = 0, \quad S_2 = S_0, \quad \frac{dS_2}{dt} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \tag{1.7}$$

2. Согласно (1.2)–(1.7) при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\text{ж}}$ имеем

$$\boldsymbol{S}_1 = \Big[-S_0 + \frac{U_0T}{2\pi}\Big(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_Z, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \Big[S_0 + \frac{U_0T}{2\pi}\Big(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_Z \tag{2.1}$$

(каждая из частиц Q_1, Q_2 движется со скоростью $\boldsymbol{U}$).

Положим, что хотя бы одна из плотностей ρ_1, ρ_2 отлична от плотности $\rho_{\text{ж}}$.

Будем рассматривать задачу (1.2)–(1.7) при малых по сравнению с единицей значениях $\alpha = A_1/S_0$ (при $S_0 \to \infty$).

Применяя изложенный в [11] метод определения потенциала скорости жидкости, найдем решение задачи (1.4)–(1.6), которое точно удовлетворяет (1.4), (1.6) и приближенно, с точностью до величин, пропорциональных dS_1/dt, dS_2/dt, малых по сравнению с $\alpha^4\,dS_1/dt$, $\alpha^4\,dS_2/dt$, удовлетворяет (1.5). Используя (1.1), (1.3) и указанное решение задачи (1.4)–(1.6), получим

$$F_1 = \frac{2\pi}{3}\,A_1^3\rho_{\text{ж}}\Big[-\frac{d^2S_1}{dt^2} + 3\,\frac{dU}{dt} + 3\,\frac{\alpha^3A_2^3}{A_1^3s^3}\Big(\frac{d^2S_2}{dt^2} - \frac{dU}{dt}\Big) - 9\,\frac{\alpha^4A_2^3}{A_1^4s^4}\Big(\frac{dS_2}{dt} - U\Big)^2\Big],$$
$$F_2 = \frac{2\pi}{3}\,A_2^3\rho_{\text{ж}}\Big[-\frac{d^2S_2}{dt^2} + 3\,\frac{dU}{dt} + 3\,\frac{\alpha^3}{s^3}\Big(\frac{d^2S_1}{dt^2} - \frac{dU}{dt}\Big) + 9\,\frac{\alpha^4}{A_1s^4}\Big(\frac{dS_1}{dt} - U\Big)^2\Big], \tag{2.2}$$

где $s = (S_2 - S_1)/S_0$.

Из (1.2), (1.7), (2.2) следует, что

$$\lambda_1\,\frac{d^2s_1}{d\tau^2} = \sum_{j=1}^{5}\alpha^j f_{1j}, \qquad \lambda_2\,\frac{d^2s_2}{d\tau^2} = \sum_{j=1}^{5}\alpha^j f_{2j}; \tag{2.3}$$

$$s_1 = -1, \quad \frac{ds_1}{d\tau} = 0, \quad s_2 = 1, \quad \frac{ds_2}{d\tau} = 0 \qquad \text{при} \quad \tau = 0. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad s_1 = \frac{S_1}{S_0}, \quad s_2 = \frac{S_2}{S_0}, \quad \lambda_1 = \frac{\rho_{\text{ж}} + 2\rho_1}{3\rho_{\text{ж}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho_{\text{ж}} + 2\rho_2}{3\rho_{\text{ж}}},$$
$$f_{11} = \frac{du}{d\tau}, \quad f_{12} = 0, \quad f_{13} = \frac{a^3}{s^4}\Big[s\,\frac{d^2s_2}{d\tau^2} - 3\Big(\frac{ds_2}{d\tau}\Big)^2\Big],$$
$$f_{14} = \frac{a^3}{s^4}\Big(-\frac{du}{d\tau}\,s + 6u\,\frac{ds_2}{d\tau}\Big), \qquad f_{15} = -\frac{3a^3u^2}{s^4},$$
$$f_{21} = \frac{du}{d\tau}, \qquad f_{22} = 0, \qquad f_{23} = \frac{1}{s^4}\Big[s\,\frac{d^2s_1}{d\tau^2} + 3\Big(\frac{ds_1}{d\tau}\Big)^2\Big],$$
$$f_{24} = -\frac{1}{s^4}\Big(\frac{du}{d\tau}\,s + 6u\,\frac{ds_1}{d\tau}\Big), \qquad f_{25} = 3u^2s^{-4} \qquad \Big(a = \frac{A_2}{A_1}, \quad u = \frac{TU}{A_1}\Big).$$

Предположим, что при $\alpha \to 0$

$$s_1 \sim s_{10} + \alpha s_{11} + \ldots + \alpha^5 s_{15}, \qquad s_2 \sim s_{20} + \alpha s_{21} + \ldots + \alpha^5 s_{25}. \tag{2.5}$$

Используя (2.3)–(2.5), определим задачи α^0-, α^1-, …, α^5-приближений соответственно для s_{i0}, s_{i1}, …, s_{i5} $(i = 1, 2)$. Решая эти задачи, найдем

$$s_{10} = -1, \quad s_{20} = 1, \quad s_{11} = \tilde{s}_{11}, \quad s_{21} = \tilde{s}_{21},$$
$$s_{12} = s_{22} = s_{13} = s_{23} = 0, \qquad s_{14} = \tilde{s}_{14}, \quad s_{24} = \tilde{s}_{24},$$
$$s_{15} = -\frac{9}{16}\,\frac{a^3u_0^2\rho_{\text{ж}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_1)(\rho_{\text{ж}} - \rho_2)}{(\rho_{\text{ж}} + 2\rho_1)^2(\rho_{\text{ж}} + 2\rho_2)}\,\tau^2 + \tilde{s}_{15}, \tag{2.6}$$
$$s_{25} = \frac{9}{16}\,\frac{u_0^2\rho_{\text{ж}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_1)(\rho_{\text{ж}} - \rho_2)}{(\rho_{\text{ж}} + 2\rho_1)(\rho_{\text{ж}} + 2\rho_2)^2}\,\tau^2 + \tilde{s}_{25},$$

где $u_0 = TU_0/A_1$; $\tilde{s}_{11}$, $\tilde{s}_{21}$, $\tilde{s}_{14}$, $\tilde{s}_{24}$, $\tilde{s}_{15}$, $\tilde{s}_{25}$ — периодические функции τ.

Согласно (2.5), (2.6) имеем

$$\boldsymbol{S}_1 = -\Big(S_0 + \frac{9}{16}\,\frac{A_2^3 U_0^2 \rho_ж(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)^2(\rho_ж+2\rho_2)}\,t^2 + \tilde{S}_1\Big)\boldsymbol{e}_Z,$$
$$\boldsymbol{S}_2 = \Big(S_0 + \frac{9}{16}\,\frac{A_1^3 U_0^2 \rho_ж(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)(\rho_ж+2\rho_2)^2}\,t^2 + \tilde{S}_2\Big)\boldsymbol{e}_Z. \tag{2.7}$$

Здесь $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ — периодические функции t.

3. Формулами (2.1) (точно) и (2.7) (приближенно) определяются зависимости $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ от t.

3.1. Из (2.1), (2.7) следует, что при $\rho_1=\rho_2=\rho_ж$ и при $\rho_1=\rho_ж$, $\rho_2\neq\rho_ж$ либо $\rho_1\neq\rho_ж$, $\rho_2=\rho_ж$ каждая из частиц Q_1, Q_2 в среднем по времени неподвижна.

3.2. Положим, что $\rho_1\neq\rho_ж$, $\rho_2\neq\rho_ж$.

Формулы (2.7) показывают, что частицы Q_1, Q_2 наряду с колебаниями совершают монотонное движение вдоль оси Z. Это движение имеет следующие особенности:

а) частицы Q_1, Q_2 перемещаются в противоположных направлениях;

б) при $\rho_1<\rho_ж$, $\rho_2>\rho_ж$ либо $\rho_1>\rho_ж$, $\rho_2<\rho_ж$ частицы Q_1, Q_2 приближаются друг к другу;

в) при $\rho_1<\rho_ж$, $\rho_2<\rho_ж$ либо $\rho_1>\rho_ж$, $\rho_2>\rho_ж$ частицы Q_1, Q_2 удаляются друг от друга.

Рассмотрим вопрос о силовом взаимодействии частиц Q_1, Q_2 и жидкости.

Согласно (1.2), (2.7) имеем

$$\bar{\boldsymbol{F}}_1 = -\frac{3\pi}{2}\,\frac{A_1^3A_2^3U_0^2\rho_ж\rho_1(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)^2(\rho_ж+2\rho_2)}\,\boldsymbol{e}_Z,$$
$$\bar{\boldsymbol{F}}_2 = \frac{3\pi}{2}\,\frac{A_1^3A_2^3U_0^2\rho_ж\rho_2(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)(\rho_ж+2\rho_2)^2}\,\boldsymbol{e}_Z; \tag{3.1}$$
$$\bar{\boldsymbol{F}}_1' = -\bar{\boldsymbol{F}}_1, \qquad \bar{\boldsymbol{F}}_2' = -\bar{\boldsymbol{F}}_2,$$

где $\bar{\boldsymbol{F}}_1$, $\bar{\boldsymbol{F}}_2$ — средние по времени силы, действующие со стороны жидкости на частицы Q_1, Q_2 соответственно; $\bar{\boldsymbol{F}}_1'$, $\bar{\boldsymbol{F}}_2'$ — средние по времени силы, действующие со стороны частиц Q_1, Q_2 соответственно на жидкость.

Используя (3.1), получим

$$\bar{\boldsymbol{F}}_1 + \bar{\boldsymbol{F}}_2 = \frac{3\pi}{2}\,\frac{A_1^3A_2^3U_0^2\rho_ж^2(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)^2(\rho_ж+2\rho_2)^2}\,\boldsymbol{e}_Z. \tag{3.2}$$

Формулой (3.2), в частности, устанавливается, что при $\rho_1\neq\rho_2$ полная средняя по времени сила, действующая со стороны жидкости на частицы Q_1, Q_2, отлична от нуля.

Принимая во внимание (3.2), перейдем к вопросу о движении частиц Q_1, Q_2 как целого.

Согласно (2.7) имеет место следующее выражение для радиус-вектора $\boldsymbol{S}_{ц.м}$ центра масс частиц Q_1, Q_2:

$$\boldsymbol{S}_{ц.м} = \Big((A_2^3\rho_2 - A_1^3\rho_1)S_0 + \frac{9}{16}\,\frac{A_1^3A_2^3U_0^2\rho_ж^2(\rho_ж-\rho_1)(\rho_ж-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{S_0^4(\rho_ж+2\rho_1)^2(\rho_ж+2\rho_2)^2}\,t^2 + \tilde{S}_{ц.м}\Big)\times$$
$$\times\,(A_1^3\rho_1 + A_2^3\rho_2)^{-1}\boldsymbol{e}_Z, \tag{3.3}$$

где $\tilde{S}_{ц.м}$ — периодическая функция t.

Таким образом (в соответствии с (3.3)), частицы Q_1, Q_2 как целое наряду с колебаниями совершают монотонное движение со скоростью

$$\boldsymbol{W} = \frac{9}{8}\,\frac{A_1^3 A_2^3 U_0^2 \rho_{\text{ж}}^2 (\rho_{\text{ж}} - \rho_1)(\rho_{\text{ж}} - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)}{S_0^4 (A_1^3 \rho_1 + A_2^3 \rho_2)(\rho_{\text{ж}} + 2\rho_1)^2 (\rho_{\text{ж}} + 2\rho_2)^2}\, t\boldsymbol{e}_Z.$$

Данный результат, в частности, указывает на то, что "свободные" частицы, включения в жидкости, количеством более (и много более) двух в условиях, аналогичных рассмотренным, способны как целое осуществлять в жидкости (наряду с колебаниями) среднее, монотонное перемещение. Это может представлять интерес, например, при исследовании особенностей различных природных явлений и технологических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
3. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.** О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Перм. гос. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.
5. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proc. of the Intern. workshop on G-jitter, Potsdam (USA), 13–19 June 1993. Potsdam: Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
6. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
7. **Lavrenteva O. M.** On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, pt 3. P. 251–263.
8. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
9. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–106.
10. **Сенницкий В. Л.** О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
11. **Кирхгоф Г.** Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 22/VI 2012 г.