

УДК 532.526
DOI: 10.15372/PMTF202215218

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: batishev-v@mail.ru

С использованием системы уравнений Навье — Стокса рассчитаны вращательные режимы термокапиллярных течений жидкости в полубесконечном пространстве, ограниченном сверху недеформируемой свободной границей, на которой задано локальное распределение температуры. Показано, что в пограничном слое вблизи свободной границы в результате бифуркации возникают вращательные режимы течений жидкости при неравномерном охлаждении этой границы. Рассчитаны вторичные вращательные режимы, образующие два семейства решений, которые зависят от нескольких параметров, причем два параметра не определяются внешними условиями.

Ключевые слова: термокапиллярный эффект, свободная граница, пограничный слой, бифуркация, вращение

Введение. Термокапиллярные течения жидкости в пограничных слоях активно исследуются начиная со второй половины XX в. В окрестности свободной границы в случае малых значений диффузионных коэффициентов возникает пограничный слой Марангони, течение в котором вызвано касательными напряжениями, созданными неравномерными температурными нагрузками. Одной из первых работ, в которых рассчитывались автомодельные режимы течений жидкости в пограничном слое Марангони, является работа [1]. Изучению физических свойств слоев Марангони посвящен цикл работ В. В. Пухначева и его учеников. Отметим работы [2, 3], в которых выполнен групповой анализ и приведены результаты расчетов термокапиллярных течений. В [4] изучена бифуркация в пограничном слое Марангони, в результате которой возникает вращательный режим. Показано, что ветвление решений представляет собой возникновение двух вращательных режимов при охлаждении свободной границы. Вращательные режимы термокапиллярных течений изучались теоретически с экспериментальным подтверждением их существования в “жидком мостике” [5].

В настоящей работе получен результат, показывающий, что в результате бифуркации возможно ответвление от основного режима бесконечного числа вторичных режимов в виде нелинейных азимутальных волн, параметры которых не описываются постановкой задачи.

1. Уравнения движения. Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости в полубесконечном пространстве, используя систему уравнений Навье — Стокса

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости; r, θ, z — цилиндрические координаты; $\mathbf{g} = (0, 0, -gt)$ — вектор, параллельный оси Oz ; gt — ускорение свободного падения; p — давле-

ние; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость. Будем полагать, что жидкость сверху ограничена свободной недеформируемой границей Γ , которая представляет собой плоскость, описываемую уравнением $z = 0$. Условие непротекания через границу Γ имеет вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Gamma,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности. Краевые условия для касательных напряжений на границе Γ принимают вид

$$2\nu\rho(\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) = \nabla_{\Gamma}\sigma, \quad (r, \theta, z) \in \Gamma.$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, который линейно зависит от температуры и определяется по формуле $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T_{\Gamma} - T_{\infty})$; σ_0, σ_T — заданные постоянные; T_{Γ} — температура свободной границы; T_{∞} — значение T_{Γ} на бесконечности; Π — тензор скоростей деформаций; ∇_{Γ} — оператор градиента вдоль границы Γ . Предполагается, что температура T_{Γ} зависит только от радиальной координаты и подчиняется квадратичному закону $T_{\Gamma} = T_{\infty} + T_m(r^2/L^2 - 1)$ при $r \leq L$ и $T_{\Gamma} = T_{\infty}$ при $r \geq L$ (L — радиус круга на поверхности границы Γ , внутри которого температура является переменной; $T_m = T_{\Gamma}|_{r=L} - T_{\Gamma}|_{r=0}$ — разность температур при $0 \leq r \leq L$). Очевидно, что при $T_m > 0$ происходит неравномерное охлаждение свободной границы, а случай $T_m < 0$ соответствует нагреву. Введем безразмерный параметр $\alpha = T_m/T_{\infty}$. При охлаждении границы $0 < T_m < T_{\infty}$, поэтому параметр α изменяется в диапазоне $0 < \alpha < 1$.

Приведем уравнения и краевые условия к безразмерному виду. Безразмерный масштаб скорости определим по формуле $u = (T_{\infty}^2 |\sigma_T|^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}$. Параметры $L, \rho u^2, T_{\infty}$ примем в качестве масштабов длины, давления и температуры. Введем безразмерный параметр $\varepsilon = \sqrt{\nu/(Lu)}$, который становится малым в случае малости значения вязкости и при конечном значении масштаба длины L .

Далее будем рассматривать малые значения параметра ε . В этом случае вблизи свободной поверхности формируется пограничный слой Марангони, толщина которого имеет порядок $O(\varepsilon)$. В главном приближении вне пограничного слоя формируется невязкое течение, описываемое уравнениями Эйлера. Заметим, что в области пограничного слоя поле скорости невязкого течения, описываемого выражением $\mathbf{v}_0 = (v_{r0}, v_{\theta0}, v_{z0})$, имеет порядок $O(u)$. Будем полагать, что невязкое течение не закручено, т. е. $v_{\theta0} = 0$.

2. Асимптотические разложения. Для решения краевой задачи применяется метод пограничного слоя [6]. Поместим начало системы координат на свободную поверхность. Введем преобразование растяжения $s = z/\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ разложим компоненты поля скорости в асимптотические ряды по степеням этого параметра

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + h_{r0} + \varepsilon(h_{r1} + v_{r1}) + \dots, \\ v_{\theta} &= h_{\theta0} + \varepsilon h_{\theta1} + \dots, \quad v_z = v_{z0} + \varepsilon(h_{z1} + v_{z1}) + \dots \end{aligned}$$

Здесь функции $h_{r0}, h_{r1}, h_{\theta0}, h_{\theta1}, h_{z1}$ зависят от переменных r, θ, s , определены в области пограничного слоя D_{Γ} и исчезают при выходе из этого слоя. Функцию давления представим в виде аналогичного ряда. Функции $v_{r0}, v_{r1}, v_{z0}, v_{z1}$ (“внешнее решение”) определены при $z \leq 0$ и описывают решение задачи вне области пограничного слоя.

Применяя метод пограничного слоя, выводим краевую задачу для главных членов асимптотики. Вводя новые функции $H_r = h_{r0} + v_{r0}|_{\Gamma}$, $H_z = h_{z1} + v_{z1}|_{\Gamma} + s \partial v_{z0}/\partial z|_{\Gamma}$, для функций $H_r, H_z, h_{\theta0}$ получаем краевую задачу в области пограничного слоя D_{Γ}

$$H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{h_{\theta0}}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} + H_z \frac{\partial H_r}{\partial s} - \frac{h_{\theta0}^2}{r} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial s^2} + v_{r0} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \Big|_{\Gamma},$$

$$H_r \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{h_{\theta 0}}{r} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial \theta} + H_z \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} + \frac{H_r h_{\theta 0}}{r} = \frac{\partial^2 h_{\theta 0}}{\partial s^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial s} = 0$$

с краевыми условиями

$$s = 0: \quad \frac{\partial H_r}{\partial s} = -2\alpha r, \quad \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} = 0, \quad H_z = 0, \quad (2)$$

$$s \rightarrow -\infty: \quad H_r \rightarrow v_{r0}|_{\Gamma}, \quad h_{\theta 0} \rightarrow 0.$$

Предположим, что радиальная компонента скорости на свободной границе идеальной жидкости линейно зависит от радиальной координаты по закону $v_{r0}|_{\Gamma} = Ur$, $U \geq 0$. В этом случае в окрестности свободной границы поле скоростей идеальной жидкости определяется по формулам $v_{r0} = Ur$, $v_{z0} = -2Uz$, $v_{\theta 0} = 0$.

3. Основные режимы течения. Рассмотрим осесимметричное незакрученное течение жидкости в пограничном слое ($h_{\theta 0} = 0$ и вектор скорости не зависит от координаты θ). Решение системы уравнений пограничного слоя строится по формулам

$$H_{r0} = r(H_0'(\eta) + U), \quad h_{\theta 0} = 0, \quad H_{z0} = 2(H_0 + \eta U), \quad \eta = -s.$$

Функция $H_0(\eta)$ определяется из решения краевой задачи

$$H_0^{(3)} = H_0'^2 + 2UH_0' - 2(H_0 + \eta U)H_0'', \quad (3)$$

$$H_0(0) = 0, \quad H_0''(0) = 2\alpha, \quad H_0'(\infty) = 0.$$

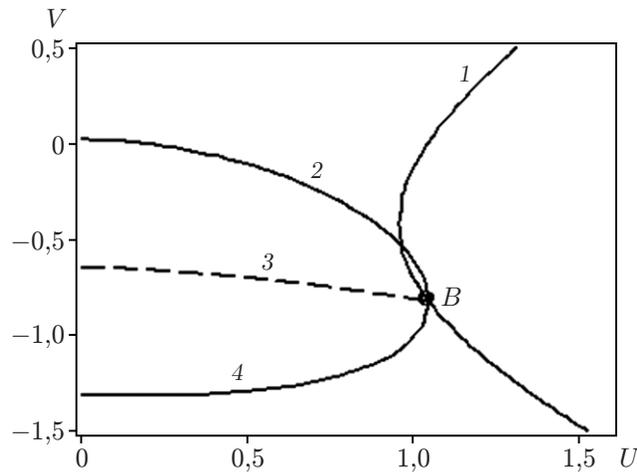
Решение задачи (3) для значений параметра $\alpha \in (0, 1)$ можно получить, если решить эту задачу при $\alpha = 0,5$ и далее выполнить перерасчет полученного решения по формулам

$$H_0(\eta) = (2\alpha)^{1/3} H_1(\xi), \quad U = (2\alpha)^{2/3} U_1, \quad \xi = (2\alpha)^{1/3} \eta \quad (4)$$

(H_1 — решение задачи (3) при $U = U_1$, $\alpha = 0,5$).

Обозначим через $V = r^{-1}H_r|_{\Gamma}$ функцию, пропорциональную радиальной компоненте скорости на поверхности Γ . Для основных режимов $V = U + H_0'(0)$ является параметром, подлежащим определению. Параметр U пропорционален радиальной компоненте скорости идеальной жидкости на свободной границе. Краевая задача для функции $H_0(\eta)$ решалась численно с помощью метода пристрелки. На рисунке представлена зависимость параметра V от параметра U при $\alpha = 0,7$. Основному режиму соответствует кривая 1. Заметим, что решение $H_0(\eta)$ существует только при $U \geq U_m \approx 1,2144\alpha^{2/3}$. Значению U_m соответствует “вершина” кривой 1. При $U < U_m$ решения задачи (3) не существует, при $U > U_m$ для каждого значения параметра U найдено по два различных решения задачи (3), при $U = U_m$ решения совпадают. Радиальная компонента скорости при удалении от свободной границы монотонно возрастает и асимптотически стремится к значению U .

4. Точки бифуркации. Основные режимы отсутствуют при значениях скорости внешнего потока U , не превышающих значения U_m . Однако для этих значений параметра U существуют вращательные режимы ($h_{\theta 0} \neq 0$), ответвляющиеся от основных режимов в точках бифуркаций $U = U_*$. Точки ветвления решений зависят от параметра α и определяются путем численного интегрирования краевой задачи на собственные значения, которая получается линеаризацией задачи (1), (2) в окрестности основного режима. Для



Зависимость $V(U)$ на свободной границе при $\alpha = 0,7$:

1 — режимы течений жидкости в отсутствие вращения, 2, 4 — режимы с вращением в случае отсутствия осевой симметрии (2 — $A_1 = 0,5$, 4 — $A_1 = -0,5$), 3 — режимы с вращением в случае осевой симметрии ($A_1 = 0$)

радиальной, окружной и осевой компонент собственного вектора введем обозначения u_* , v_* , w_* соответственно. Линеаризованную задачу разделим на две краевые задачи. Решением первой задачи являются окружная компонента v_* и собственное значение U_* :

$$\frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} = L_0 v_*, \quad \frac{\partial v_*}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0), \quad v_* = 0 \quad (\eta = \infty), \quad (5)$$

где

$$L_0 = 2(H'_0 + U)I - 2(H_0 + \eta U) \frac{\partial}{\partial \eta},$$

I — единичный оператор. Компоненты u_* , w_* определяются при интегрировании неоднородной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_*}{\partial \eta^2} &= L_0 u_* - H''_0 w_*, & \frac{\partial w_*}{\partial \eta} &= 2u_* + \frac{\partial v_*}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial u_*}{\partial \eta} &= 0, \quad w_* = 0 \quad (\eta = 0), & u_* &= 0 \quad (\eta = \infty). \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (5) решается путем разделения переменных $v_* = v_c(\eta)f(\theta)$. Функция $f(\theta)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению и определяется ниже. Заметим, что $f \equiv 1$ в осесимметричном случае при $\partial v / \partial \theta = 0$. Для определения функции $v_c(\eta)$ заменим в краевой задаче (5) функцию v_* на v_c . Введем условие нормировки $v_c(0) = 1$. Используя численный расчет и формулы (4), получаем собственные значения $U_* \approx 1,3263\alpha^{2/3}$. Функция $v_c(\eta)$ монотонно убывает от единицы до нуля при увеличении переменной η в диапазоне $[0, \infty)$. Функции u_* , w_* находятся при интегрировании краевой задачи (6), в которой используется разделение переменных $u_* = u_c(\eta)f'(\theta)$, $w_* = w_c(\eta)f'(\theta)$. Имеют место два случая. Во-первых, при условии осевой симметрии с учетом $f \equiv 1$ получаем $u_* = 0$, $w_* = 0$. Во-вторых, при отсутствии осевой симметрии находим $u_c = -0,5v_c$, $w_c = 0$. Пусть $U \neq U_*$, тогда в (5) $v_* = 0$ (отсутствует бифуркация вращения). Функции u_c , w_c удовлетворяют краевой задаче на собственные значения, которая следует из (6) при $v_* = 0$ и из которой находим собственные значения $U_c \approx 1,2145\alpha^{2/3}$.

5. Асимптотика вращательных режимов вблизи точки бифуркации. Компоненты вектора скорости H_r , $h_{\theta 0}$, H_z строятся в виде суммы компонент основного режима и возмущений

$$H_r = r(H'_0(\eta) + U + u_r), \quad h_{\theta 0} = ru_{\theta}, \quad H_z = H_{z0} + u_z$$

(u_r , u_{θ} , u_z — возмущения). Подставляя функции H_r , $h_{\theta 0}$, H_z в задачу (1), (2), получаем нелинейную краевую задачу для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \eta^2} &= L_0 u_r - H''_0 u_z + u_r^2 + u_{\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_z \frac{\partial u_r}{\partial \eta} - u_{\theta}^2, \\ \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial \eta^2} &= L_0 u_{\theta} + u_{\theta} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} - u_z \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \eta} = 2u_r + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \eta} = 0, \quad u_z = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_r = 0, \quad u_{\theta} = 0 \quad (\eta = \infty). \end{aligned}$$

Вблизи точки бифуркации $U = U_*$ введем малый параметр $\delta = U - U_*$. Очевидно, что при $U \rightarrow U_*$ $\delta \rightarrow 0$. Определим второй малый параметр ε_1 , который пропорционален амплитуде окружной компоненты скорости на свободной границе вблизи точки бифуркации и вводится по формуле $u_{\theta}|_{\Gamma} = \varepsilon_1 v_*$ при $\eta = 0$, $U \rightarrow U_*$ ($u_{\theta}|_{\Gamma} \rightarrow 0$ при $U \rightarrow U_*$).

В окрестности точки бифуркации при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ построим решения задачи для возмущений в виде асимптотических рядов по степеням параметра ε_1 :

$$u_r = \varepsilon_1 u_* + \varepsilon_1^2 u_1 + \dots, \quad u_{\theta} = \varepsilon_1 v_* + \varepsilon_1^2 v_1 + \varepsilon_1^3 v_2 + \dots, \quad u_z = \varepsilon_1^2 w_1 + \dots \quad (7)$$

($w_* = 0$ при $U = U_*$). Параметр δ также разложим в асимптотический ряд при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$:

$$\delta = V_1 \varepsilon_1 + V_2 \varepsilon_1^2 + \dots \quad (8)$$

Указанный выше выбор параметра ε_1 приводит к дополнительным краевым условиям $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ при $\eta = 0$.

Определим коэффициенты разложений (7), (8), подставляя эти ряды в нелинейную краевую задачу для возмущений и приравнивая к нулю суммы коэффициентов при $\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \dots$. Функции основного режима также разлагаем в ряды по степеням ε_1 .

Для определения функций u_1, v_1, w_1 получаем краевую задачу, которая распадается на две задачи. Первая краевая задача определяет функцию $v_1(\eta, \theta)$ и приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = L_* v_1 + 2V_1 E_1(v_*), \quad \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0), \quad v_1 = 0 \quad (\eta = \infty), \quad (9)$$

где $L_* = 2(H'_* + U_*)I - 2(H_* + \eta U_*) \partial / \partial \eta$ — линейный оператор L_0 в точке бифуркации; H_* — значение функции H_0 при $U = U_*$. Дифференциальное выражение для $E_1(v_*)$ имеет вид

$$E_1(v_*) = \left(1 + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \eta \partial U} \Big|_{U=U_*}\right) v_* - \left(\eta + \frac{\partial H_0}{\partial U} \Big|_{U=U_*}\right) \frac{\partial v_*}{\partial \eta}.$$

Для определения функций u_1, w_1 используем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} &= L_* u_1 + 2V_1 E_1(u_*) - H''_* w_1 + u_*^2 + v_* \frac{\partial u_*}{\partial \theta} - v_*^2, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} &= 2u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, \quad w_1 = 0 \quad (\eta = 0), \quad u_1 = 0 \quad (\eta = \infty).$$

Обозначим через $\varphi(\eta)$ функцию, полученную путем интегрирования краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 2(H_* + \eta U_*) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 4(H'_* + U_*)\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0), \quad \varphi = 0 \quad (\eta = \infty)$$

с условием нормировки $\varphi(0) = 1$.

Умножим уравнение из (9) на функцию $\varphi(\eta)$. Проинтегрируем полученное уравнение по переменной η на полуоси $[0, \infty)$, выполним интегрирование по частям и перенесем операцию дифференцирования с функции v_1 на функцию $\varphi(\eta)$. С учетом краевой задачи для функции $\varphi(\eta)$ получаем условие разрешимости краевой задачи (9) в виде равенства

$$V_1 J_1 f(\theta) = 0 \quad \left(J_1 = 2 \int_0^{\infty} E_1(v_c) \varphi d\eta \right).$$

Путем численного расчета при $\alpha = 0,5$ получаем $J_1 \approx -4,3522$. Из соотношения $V_1 J_1 f(\theta) = 0$ при $J_1 \neq 0$, $f(\theta) \neq 0$ следует, что $V_1 = 0$. Учитывая дополнительное условие $v_1 = 0$ при $\eta = 0$, решение краевой задачи (9) находим в виде $v_1 = 0$.

Для определения функций u_1, w_1 из системы (10) исключаем функцию u_1 и, учитывая соотношения $V_1 = 0, v_1 = 0$, выводим краевую задачу

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial \eta^3} = L_* \left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right) - 2H_*'' w_1 + 2 \left(u_*^2 + v_* \frac{\partial u_*}{\partial \theta} - v_*^2 \right),$$

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta = 0), \quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = \infty).$$
(11)

С учетом зависимости собственных функций u_*, v_* от функции $f(\theta)$ и ее производной преобразуем выражение в правой части уравнения в задаче (11):

$$u_*^2 + v_* \frac{\partial u_*}{\partial \theta} - v_*^2 = 0,25v_c^2 (f'^2 - 2ff'' - 4f^2).$$

Введя обозначение $\Phi(\theta) = f'^2 - 2ff'' - 4f^2$, функцию $w_1(\eta, \theta)$ преобразуем с помощью формулы $w_1(\eta, \theta) = w_{11}(\eta)\Phi(\theta)$. Из (11) получаем неоднородную краевую задачу для определения функции $w_{11}(\eta)$:

$$w_{11}^{(3)} = 2(H_*' + U_*)w_{11}' - 2(H_* + \eta U_*)w_{11}'' - 2H_*'' w_{11} + 0,5v_c^2,$$

$$w_{11}(0) = 0, \quad w_{11}''(0) = 0, \quad w_{11}'(\infty) = 0.$$

Решение полученной задачи найдено численно, в частности $w_{11}'(0) \approx 0,3554$ при $\alpha = 0,5$. Функция u_1 рассчитывается по формуле $u_1 = 0,5w_{11}'(\eta)\Phi(\theta)$.

Для определения коэффициента V_2 в формуле (8) рассмотрим неоднородную задачу, определяющую функцию $v_2(\eta, \theta)$:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2} = L_* v_2 + 2V_2 E_1(v_*) + v_* \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - w_1 \frac{\partial v_*}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0), \quad v_2 = 0 \quad (\eta = \infty)$$

при дополнительном условии $v_2 = 0$ ($\eta = 0$). По аналогии с (9) приведем условие разрешимости полученной задачи

$$V_2 J_1 + J_2 \Phi = 0, \tag{12}$$

где $J_2 = \int_0^{\infty} (v_c w'_{11} - v'_c w_{11}) \varphi \, d\eta$. Численный расчет показал, что $J_2 > 0$, в частности $J_2 \approx 0,3783$ при $\alpha = 0,5$. Соотношение (12) представляет собой дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$:

$$f'^2 - 2f f'' - 4f^2 = -J_1 V_2 / J_2 = \text{const}. \quad (13)$$

Дифференцируя формулу (13), получаем уравнение $f(f''' + 4f') = 0$, ненулевое решение которого представим в виде $f = 1 + A \cos(2\theta + \gamma)$ с учетом того, что при $A = 0$ течение жидкости является осесимметричным и для него выполняется соотношение $f = 1$. Параметры A и γ произвольны. Подставляя функцию $f(\theta)$ в уравнение (12), получаем $V_2 = 4(1 - A^2)J_2/J_1$. При $\alpha = 0,5$ с учетом значений J_1, J_2 находим $V_2 \approx 0,3477(A^2 - 1)$. Будем рассматривать значения параметра A , которые удовлетворяют неравенству $|A| < 1$. С учетом формулы (8) находим, что при $U \rightarrow U_*$ параметры ε_1 и δ связаны асимптотическим соотношением $\varepsilon_1 = \sqrt{0,25\delta J_1 J_2^{-1}(1 - A^2)^{-1} + O(\delta)}$.

Для определения окружной компоненты скорости вблизи точки бифуркации используем асимптотическую формулу

$$v_\theta = \pm \varepsilon_1 r v_c(\eta)(1 + A \cos(2\theta + \gamma)) + O(\varepsilon_1^3).$$

Заметим, что произвольные параметры A и γ не определяются постановкой задачи.

6. Точные решения. В общем случае компоненты вектора скорости вращательных режимов строятся в виде рядов Фурье по окружной координате. Подставляя эти ряды в уравнения пограничного слоя (1), выводим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье. Эта система уравнений обрывается на втором коэффициенте Фурье, а интегрирование полученных уравнений приводит к точному решению

$$\begin{aligned} H_r &= r(H'(\eta) + U + A_1 G(\eta) \sin(2\theta + \gamma_1)), \\ h_\theta &= rG(\eta)(\sqrt{1 + A_1^2} + A_1 \cos(2\theta + \gamma_1)), \quad H_z = 2(H + \eta U), \end{aligned} \quad (14)$$

где A_1, γ_1 — произвольные параметры. Функции $H(\eta), G(\eta)$ определяются из краевой задачи

$$\begin{aligned} H^{(3)} &= H^2 + 2UH' - 2(H + \eta U)H'' - G^2, \\ G'' &= 2G(H' + U) - 2G'(H + \eta U), \\ H(0) &= 0, \quad H''(0) = 2\alpha, \quad G'(0) = 0, \quad H'(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что каждой функции $H(\eta)$ в (15) соответствуют две функции $\pm G(\eta)$. При выводе задачи (15) в системе (1) следует положить $\eta = -s$.

Краевая задача (15) интегрировалась численно и асимптотически в [4]. Основные режимы соответствуют случаю $G(\eta) = 0$. Значение $U = U_*$ является точкой бифуркации задачи (15). Введенная в п. 3 функция V рассчитывается по формуле $V = U + H'(0) + A_1 G(0) \sin(2\theta + \gamma_1)$. Зависимость функции V от параметра U для вторичных режимов при $A_1 = 0$, т. е. в осесимметричном случае для $f = 1$, показана на рисунке (кривая 3). Кривые 2, 4 соответствуют вращательным режимам при $\alpha = 0,7, \gamma_1 = \pi/2, \theta = 0, A_1 = \pm 0,5$. Ввиду произвольности параметров A_1, γ_1 формулы (14) описывают бесконечное число вторичных режимов, ответвляющихся от основных режимов в точке бифуркации.

Заметим, что при расчете конвекции в пористой среде в работе [7] обнаружено бесконечное число вторичных режимов, зависящих от произвольного параметра, который не определялся постановкой задачи.

Заключение. В работе рассмотрено возникновение вращательных режимов течений жидкости в результате бифуркации в пограничном слое Марангони при неравномерном охлаждении свободной границы. Показано, что при осевой симметрии возникают только два вторичных закрученных режима, которые однозначно определяются постановкой задачи. В случае отсутствия такой симметрии в точке бифуркации появляются два двухпараметрических семейства вращательных режимов, содержащих параметры, не определяемые постановкой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. of the 3rd Europ. symp. on material science in space, Grenoble (France), 24–27 Apr. 1979. P.: Europ. Space Agency, 1979. P. 313–315.
2. **Пухначев В. В.** Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061–1064.
3. **Batishchev V. A., Kuznetsov V. V., Pukhnachev V. V.** Marangoni boundary layers // Progr. Aerospace Sci. 1984. V. 26. P. 353–370.
4. **Батищев В. А.** Возникновение вращения жидкости в пограничном слое Марангони в области локального охлаждения свободной границы // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 3. С. 26–35.
5. **Tanaka S., Kawamura H., Ueno I., Schwabe D.** Flow structure and dynamic particle accumulation in thermocapillary convection in a liquid bridge // Phys. Fluids. 2006. V. 18, N 6. 067103.
6. **Вишик М. А., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–102.
7. **Любимов Д. В.** О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.

*Поступила в редакцию 24/X 2022 г.,
после доработки — 8/I 2023 г.
Принята к публикации 27/III 2023 г.*
