

К ТЕОРИИ ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Л. М. Бучацкий, А. М. Столин, С. И. Худяев

(Черноголовка)

Проблема устойчивости течения вязкоупругих жидкостей имеет принципиальное значение для технологии производства полимерных изделий и вискозиметрии. Эта проблема не сводится только к классической инерционной турбулентности. Известен ряд других механизмов, приводящих к неустойчивости течения [1, 2]. Для объяснения этого явления в работе [1] привлекался тепловой механизм, основанный на учете диссипативного разогрева и упругих свойств в рамках линейной модели вязкоупругой жидкости. На основе качественного анализа реологического уравнения и уравнения теплового баланса применительно к простому сдвиговому течению и однородному растяжению была показана возможность автоколебательного режима течения.

В данной работе проведен теоретический анализ саморазогрева текучих систем, обладающих вязкоупругими свойствами. Описаны основные закономерности тепловой неустойчивости вязкоупругих жидкостей, обнаруженной в работе [1].

1. Постановка задачи. В основу рассмотрения положим линейную модель Максвелла вязкоупругой жидкости

$$(1.1) \quad \bar{D} = \frac{1}{G} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \bar{\tau},$$

где $\bar{\tau}$ — тензор напряжений; $\bar{D}$ — тензор скоростей деформаций; G — модуль упругости; μ — вязкость; t — время.

В общем случае G и μ являются функциями термодинамических величин, например температуры T и плотности ρ . Для простоты в дальнейшем считается $G = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$, однако вязкость предполагается зависящей от температуры: $\mu = \mu(T)$. Основные предположения о характере течения сводятся к требованиям:

а) однородности деформации, т. е. постоянства $\bar{D}$ по объему жидкости, при этом зависимость $\bar{D}(t)$ считается известной;

б) постоянства температуры по объему жидкости.

В этих предположениях уравнение (1.1) замыкается одним уравнением теплового баланса

$$(1.2) \quad c\rho dT/dt = q(\bar{\tau}, T) - \alpha(T - T_0),$$

где α — коэффициент теплоотдачи с поверхности жидкости; c — удельная теплоемкость жидкости; T_0 — температура окружающей среды. Диссипативная функция $q(\bar{\tau}, T)$ определяется необратимой вязкой деформацией и для простого сдвигового течения имеет вид

$$q(\bar{\tau}, T) = |\bar{\tau}|^2/\mu(T) = \sum_{i,j} \tau_{ij}^2/\mu(T).$$

Анализ описанной модели проведем для куэттовского течения между двумя соосными цилиндрами, вращающимися вокруг оси с различной постоянной скоростью. В этом случае лишь тангенциальные компоненты $D_{r,\varphi} = D$ и $\tau_{r,\varphi} = \tau$ тензоров $\bar{D}$ и $\bar{\tau}$ отличны от нуля и уравнение (1.1)

является скалярным. Будем считать $D = \text{const}$. Зависимость вязкости от температуры зададим формулой Рейнольдса:

$$\mu = \mu_0 \exp [-\beta(T - T_0)] \quad (\mu_0, \beta = \text{const}).$$

В задаче можно выделить три характерных времени:

$$(1.3) \quad t_0 = (c\rho)/\alpha, \quad t_1 = (c\rho)/(\beta\mu_0 D^2), \quad t_2 = \mu_0/G,$$

где t_0 — время теплоотвода; t_1 — время тепловыделения; t_2 — время упругой релаксации.

Введем безразмерные величины по формулам

$$(1.4) \quad \Theta = \beta(T - T_0), \quad \sigma = \tau/(GDt_0), \quad x = t/t_0, \quad \delta = t_0/t_2, \quad \kappa = t_0/t_1.$$

Тогда уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$(1.5) \quad d\sigma/dx = 1 - \delta\sigma e^\Theta, \quad d\Theta/dx = \kappa\delta^2\sigma^2 e^\Theta - \Theta.$$

Выбор безразмерных параметров в (1.4) отличен от работы [1]. Параметры κ и δ выражают соответственно интенсивность тепловыделения и изменения упругой энергии по отношению к интенсивности теплоотвода. При $\kappa \rightarrow 0$ имеет место изотермический, а при $\kappa \rightarrow \infty$ — адиабатический режим течения. Случай $\delta \rightarrow 0$ соответствует мягкой пружине в упругом элементе модели Максвелла, когда упругое деформирование развивается медленно ($t_2 \rightarrow \infty$), а $\delta \rightarrow \infty$ — жесткой пружине, когда поведение модели при деформировании определяется вязким элементом.

2. Качественный анализ. В зависимости от структуры стационарной точки (σ_0, Θ_0) системы (1.5), определяемой из уравнений

$$(2.1) \quad \delta = \frac{4}{\sigma_0} e^{-\Theta_0}, \quad \kappa = \frac{\Theta_0}{\sigma_0^2} e^{\Theta_0},$$

в работе [1] были выделены следующие три области в квадранте $\sigma_0 > 0$, $\Theta_0 > 0$:

$$(2.2) \quad \Theta_0 > 1 + 1/\sigma_0;$$

$$(2.3) \quad 1 + 3/\sigma_0 - 2\sqrt{2(1 + 1/\sigma_0)/\sigma_0} < \Theta_0 < 1 + 1/\sigma_0^*;$$

$$(2.4) \quad 0 < \Theta_0 < 1 + 3/\sigma_0 - 2\sqrt{2(1 + 1/\sigma_0)/\sigma_0}.$$

В области (2.2), являющейся областью неустойчивости стационарной точки, система (1.5) допускает устойчивый предельный цикл. Доказательство существования предельного цикла можно найти в [3]. Физически это означает существование автоколебательного режима течения, при котором напряжение и температура совершают во времени периодические колебания.

В области (2.3) стационарная точка является устойчивым «фокусом», что соответствует режиму течения с затухающими колебаниями напряжения и температуры во времени.

В области (2.4), где стационарная точка является устойчивым «узлом», реализуется устойчивый режим течения.

Возможность колебательных режимов в данном случае связана с взаимодействием упругого деформирования и тепловых факторов. С одной стороны, упругое деформирование пружины в модели Максвелла

* В работе [1] в выражении для нижней границы области (2.3) есть опечатка.

при $D = \text{const}$ приводит к росту напряжения, а с другой стороны, диссипативный саморазогрев жидкости и связанное с ним уменьшение вязкости вызывает падение напряжения. Конкуренция этих факторов и является причиной тепловой неустойчивости. Принципиальным моментом здесь является сильная температурная зависимость вязкости, которая обеспечивает наличие эффекта «обратной связи».

Можно получить описание областей (2.2)–(2.4) в плоскости параметров κ и δ . Если положить $\xi = 1/\sigma_0$, то из (2.1)–(2.3) получаем параметрическое представление границы Γ_1 , разделяющей область автоколебаний I от области затухающих колебаний II, и границы Γ_2 , разделяющей область II от области устойчивого течения III:

$$\begin{aligned}\Gamma_1: \delta &= \xi \exp(-1 - \xi), \kappa = \xi^2(1 + \xi) \exp(1 + \xi); \\ \Gamma_2: \delta &= \xi \exp(-1 - 3\xi + 2\sqrt{2\xi(1 + \xi)}), \kappa = \xi(1 + 3\xi - \\ &\quad - 2\sqrt{2\xi(1 + \xi)})/\delta.\end{aligned}$$

Диаграмма этих областей представлена на фиг. 1. Из ее анализа видно, что автоколебания невозможны как при больших δ ($\delta > 1/e^2$), так и при малых κ ($\kappa < e$). Это означает, что возникновение автоколебаний связано с определенным сочетанием вязкоупругих свойств материала и условий теплоотдачи. В изотермическом случае ($\kappa = 0$) для всех значений δ имеет место устойчивый режим течения. При фиксированных тепловых параметрах, соответствующих малым значениям κ ($\kappa < e$), колебательный режим реализуется лишь при промежуточных значениях времени упругой релаксации t_2 , а при достаточно больших и малых значениях δ течение устойчиво. В адиабатическом случае ($\kappa \rightarrow \infty$) область колебаний практически исчезает.

3. Предельные случаи. Заслуживают специального рассмотрения различные предельные соотношения между характерными временами (1.3). Наиболее интересными оказываются следующие два предельных случая:

$$t_0 \gg t_2 (\delta \gg 1), \quad t_0 \ll t_2 (\delta \ll 1),$$

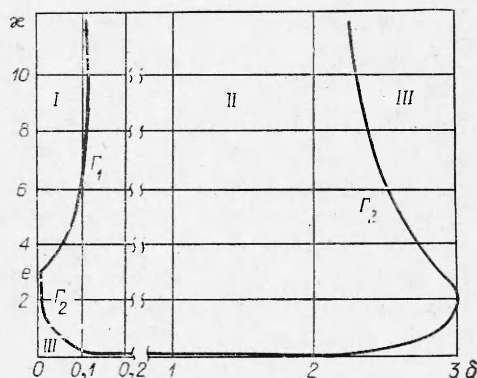
которые назовем случаями механической и тепловой квазистационарности соответственно. Для их рассмотрения удобно ввести новую нормировку напряжения. Положим

$$\eta = \delta \sigma = \tau / G D t_2.$$

Тогда система (1.5), которую будем рассматривать при нулевых начальных условиях, принимает вид

$$\begin{aligned}(3.1) \quad \frac{1}{\delta} \frac{d\eta}{dx} &= 1 - \eta e^\eta, \quad \eta(0) = 0, \\ \frac{d\Theta}{dx} &= \kappa \eta^2 e^\eta - \Theta, \quad \Theta(0) = 0.\end{aligned}$$

Механическая квазистационарность ($\delta \gg 1$). В этом случае упругое деформирование завершается задолго до окончания процесса тепловой стабилизации ($t_2 \ll t_0$) и далее основной вклад в общую деформацию вносит вязкая необратимая составляющая, т. е. имеет



Ф и г. 1

место вязкое течение. Если рассматривать течение при $t > t_{2*}$ то происходит квазистационарное изменение напряжения [4], определяемое лишь тепловыми факторами:

$$\eta = \exp(-\Theta), \quad d\Theta/dx = \kappa e^{-\Theta} - \Theta, \quad \Theta(0) = 0.$$

Отсюда видно, что существует единственный устойчивый режим течения со стационарным разогревом Θ_0 , определяемым равенством тепловыделения и теплоотвода $\Theta_0 \exp \Theta_0 = \kappa$. Напряжение же монотонно приближается к своему предельному значению $\eta_0 = \exp(-\Theta_0)$. Это приближенное решение справедливо для всех κ . В изотермическом случае ($\kappa \rightarrow 0$) имеем $\Theta_0 \rightarrow 0$, $\eta_0 \rightarrow 1$. Рассмотренный случай реализуется в области III при $\delta > \delta_1 = 3,07$ (фиг. 1).

Тепловая квазистационарность ($\delta \ll 1$). В этом случае самым медленным процессом является упругое деформирование и в качестве масштаба времени следует принять время упругой релаксации t_2

$$x' = \delta x = t/t_2.$$

Уравнения (3.1) при этом принимают вид

$$d\eta/dx' = 1 - \eta e^{\Theta}, \quad \eta(0) = 0, \quad \delta d\Theta/dx' = \kappa \eta^2 e^{\Theta} - \Theta, \quad \Theta(0) = 0.$$

Изменение температуры подстраивается под изменение напряжения, и справедливо следующее квазистационарное описание [4]:

$$(3.2) \quad \frac{d\eta}{dx'} = 1 - \eta e^{\Theta}, \quad \eta(0) = 0;$$

$$(3.3) \quad \left(\frac{1}{\kappa} \Theta e^{-\Theta} \right)^{1/2} = \eta.$$

Уравнение (3.3) разрешимо в области

$$0 < \eta < \eta_m = 1/\sqrt{\kappa e}.$$



Фиг. 2

При этом существует два решения для температуры: $\Theta_1(\eta)$ и $\Theta_2(\eta)$ (фиг. 2). Согласно [4], следует выбрать нижнюю ветвь решения $\Theta_1(\eta)$, где $\Theta_1(\eta) < 1$, $\Theta_1(\eta_m) = 1$.

Из (3.2) изменение напряжения во времени находится с помощью квадратуры

$$(3.4) \quad x' = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{1 - \eta \exp \Theta_1(\eta)}.$$

В зависимости от κ это решение имеет качественно различный характер.

1. Пусть $\eta_m e = \sqrt{e/\kappa} \geq 1$. В этом случае интеграл (3.4) расходится при некотором $\eta = \eta_0 < \eta_m$, т. е. решение системы (3.2), (3.3) определено на всем временном интервале $0 < x' < \infty$. Напряжение и температура монотонно возрастают и ограничены $0 < \eta < \eta_0$, $0 < \Theta < \Theta_0$.

2. Пусть $\eta_m e = \sqrt{e/\kappa} < 1$. В этом случае интеграл (3.4) определен и ограничен во всей области $0 < \eta < \eta_m$. Это означает, что напряжение за конечное время x_m

$$(3.5) \quad x_m = \int_0^{\eta_m} \frac{d\eta}{1 - \eta \exp \Theta_1(\eta)}$$

достигает значения $\eta = \eta_m$. Далее, при $x > x_m$ квазистационарное решение отсутствует. Течение носит существенно нестационарный характер. Эти два типа решений разделяются критическим условием $\kappa_* = e$. На фиг. 1 область $\kappa < \kappa_*$ при $\delta \ll 1$ попадает в область устойчивого течения III, а $\kappa > \kappa_*$ — в область автоколебаний I. Таким образом, в данном случае отсутствие квазистационарного решения означает выход в режим автоколебаний. В размерном виде критическое условие запишется следующим образом:

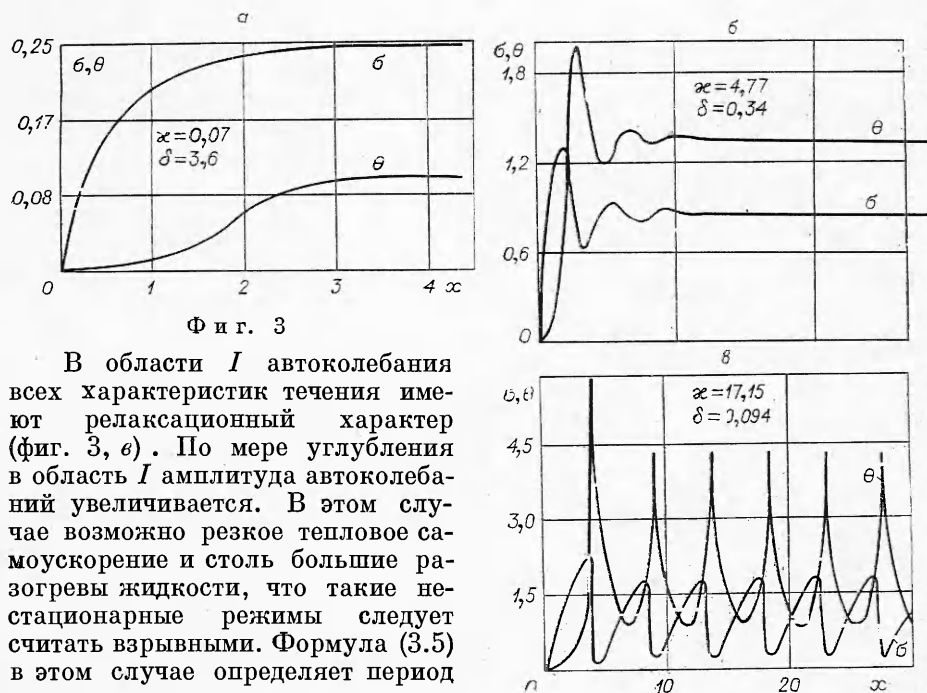
$$\beta \mu_0 D^2 / \alpha = e.$$

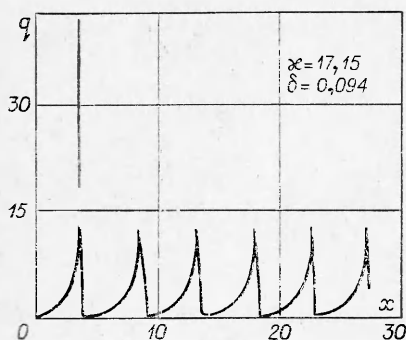
Эта формула показывает, какие параметры влияют на возникновение автоколебаний.

4. Нестационарные тепловые режимы. Численное решение системы (1.5) позволяет исследовать нестационарные особенности тепловых режимов течения. На фиг. 3, а—в представлены характерные кривые изменения напряжения и температуры во времени в различных областях параметров κ и δ (см. фиг. 1). В области III устойчивого течения напряжение и температура монотонно приближаются к стационарному значению, причем кривые разогрев — время имеют перегиб (фиг. 3, а). В области II установлению стационарного состояния предшествуют затухающие колебания напряжения и температуры, носящие синусоидальный характер (фиг. 3, б). Частоту колебаний ω и декремент затухания Δ легко выразить через стационарные значения напряжения и температуры σ_0 и Θ_0

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 \frac{\Theta_0 + 1}{\sigma_0} - \left(\Theta_0 - \frac{1 + \sigma_0}{\sigma_0} \right)^2}, \quad \Delta = \frac{1}{2} \left(\Theta_0 - \frac{1 + \sigma_0}{\sigma_0} \right).$$

Формулы (2.1) позволяют рассчитать эти величины через основные параметры κ и δ .





Фиг. 4

фиг. 4, на которой видны участки резкого возрастания функции тепловыделения. Для вязкой жидкости функция тепловыделения в этих условиях является убывающей функцией времени.

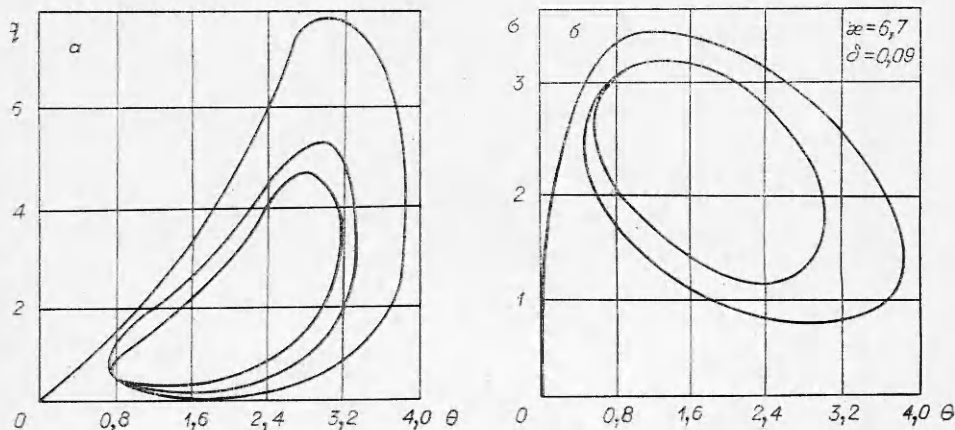
Интерес представляет рассмотрение фазовых диаграмм (q, Θ) и (σ, Θ) (фиг. 5, а, б). На диаграмме (q, Θ) довольно четко можно выделить три участка: участок прогрессивного тепловыделения, мгновенный спад за счет сброса напряжения и «застойная зона», где тепловыделение практически не меняется вследствие компенсации падения температуры ростом напряжения. На диаграмме (σ, Θ) показан предельный цикл, на который «наматывается» решение системы (1.5).

Важнейшей характеристикой автоколебаний является период. На основе анализа и обработки численных результатов можно предложить эмпирическую формулу

$$X = \delta^{-0,71}(2,6k^{-1/2} + 0,21),$$

которая позволяет рассчитать период колебаний с точностью 10–15% в области $e < k < 50$, $0,03 < \delta < e^{-2} = 0,135$.

5. Некоторые замечания. Выше проанализирована математическая модель упругого деформирования и тепловых факторов, приводящего к неустойчивости вискозиметрического течения. Однако описанный меха-



Фиг. 5

низм автоколебаний имеет общий характер и представляет интерес в связи с рядом других более сложных явлений: автоколебаний при растяжении полимеров на стадии однородного деформирования [1] и образования шейки [7, 8], глубокофокусных землетрясений [9] и т. д. В некоторых случаях этот механизм, не являясь определяющим, может быть сопутствующим. Это соображение (при обсуждении работы [1]) было высказано С. К. Годуновым в связи с автоколебательными явлениями при сварке взрывом.

В рассматриваемой модели учтены принципиальные моменты, обуславливающие тепловую неустойчивость течения вязкоупругой жидкости. Она позволяет выяснить качественную сторону явления и проводить некоторые количественные оценки. Отметим роль некоторых деталей, не учитываемых в принятой модели. Практическое значение для вискозиметрического эксперимента имеет учет инерционности динамометрической системы. Это приводит к временной зависимости скорости деформации $D(t)$. В этом случае даже в изотермическом режиме при деформировании чисто вязкой жидкости возможны затухающие колебания, носящие синусоидальный характер. Их наложение на автоколебания вязкоупругой жидкости может изменить лишь количественные характеристики процесса.

Выбор экспоненциальной зависимости вязкости от температуры, принятой в данной работе, является несущественным ограничением. Появление автоколебаний имеет место для широкого класса зависимостей, удовлетворяющих определенным условиям [1]. Второстепенную роль играет и учет температурной зависимости модуля упругости.

В связи с возможностью других механизмов неустойчивости течения вязкоупругих жидкостей интересно сопоставить условия их возникновения. Так, в работе [10] условие перехода от устойчивого режима течения к неустойчивому режиму эластической турбулентности связывается с эластическим критерием Рейнольдса Re_e . Найденное в данной работе условие тепловой неустойчивости связано с тепловым критерием κ (1.3), (1.4), который можно представить в виде $\kappa = (\beta\mu_0/\alpha t_2^2) Re_e^2$. Отсюда видно, что возможно различное сочетание этих механизмов: как одновременное их действие, так и действие каждого из них по отдельности.

Поступила 13 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Столин А. М., Худяев С. И. Неизотермическая неустойчивость течения вязкоупругих сред. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 1.
2. Малкин А. Я., Леонов А. И. Неустойчивое течение полимеров. — В кн.: Успехи реологии полимеров. М., «Химия», 1970.
3. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.
4. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 131, № 3.
5. Мержанов А. Г., Столин А. М. К тепловой теории течения вязкой жидкости. — «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 6.
6. Бучацкий Л. М., Столин А. М., Худяев С. И. Саморазогрев вязкой жидкости при циклическом деформировании. — ПМТФ, 1979, № 1.
7. Кечекьян А. С., Андрианова Г. П., Каргин В. А. Периодические колебания при растяжении полиэтилентерефталата. — «Высокомолек. соединения», 1970, т. А XII, № 11.
8. Баренблатт Г. И. Автоколебательное распространение шейки в полимерах. — «Изв. АН СССР, МТТ», 1970, № 5.

9. Griggs D. T., Baker D. W. The origin of deep-focus earthquakes.— In: Properties of Matter under Unusual Conditions. N. Y., 1969.
10. Малкин А. Я., Леонов А. И. О критериях неустойчивости режимов сдвиговых деформаций упруговязких полимерных систем.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 2.

УДК 539.370

О ФЕРРОУПРУГОСТИ МАТЕРИАЛОВ С МЕХАНИЧЕСКОЙ ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

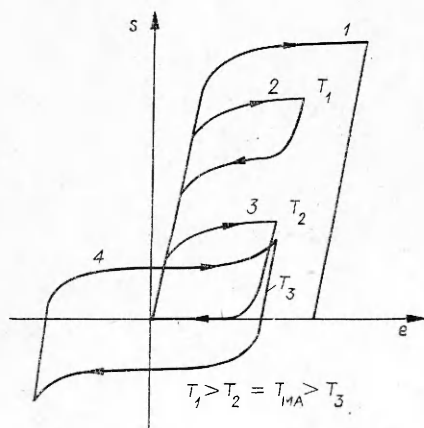
Е. Н. Бондарев, В. В. Дудукаленко

(Куйбышев)

Полный учет разнообразных аспектов поведения твердых тел при их деформировании весьма затруднителен. Поэтому при расчетах конструкций вводятся упрощенные модели, учитывающие лишь наиболее существенные в каждом конкретном случае свойства материалов (ползучесть, последействие, пластичность и т. д.), и используются соответствующие феноменологические теории [1]. В данной работе сделана попытка построения основ теории, описывающей явление ферроупругости, связанное с поведением термоупругого мартенсита, впервые обнаруженного в работе [2]. Аппарат такой теории будет необходим при расчете самовосстанавливающихся конструкций, изготовление которых возможно из материалов с механической памятью формы.

1. К настоящему времени обнаружено, что большое количество сплавов (NiTi, CuAlNi, CuZn, CuZnSi, AlCuZn, FeNi, FeMn, NiAl и т. д.) и некоторые чистые металлы (Co, Ti, Zr) претерпевают термоупругий мартенситный переход, который сопровождается рядом уникальных свойств: сверхупругость, эффект памяти формы, самопроизвольное направленное деформирование при охлаждении и др. [3—7].

Наиболее интересный (с точки зрения использования в технике) эффект памяти формы заключается в следующем. Если материалу, находящемуся в высокотемпературной модификации, задать определенную геометрическую форму, а затем, охладив его через температуру мартенситного перехода, «пластически» деформировать, то при нагреве выше точки перехода материал возвратит себе первоначально заданную форму. Величина полностью обратимой неупругой деформации неодинакова для различных материалов и составляет 6—16% [3, 5].



Ф и г. 1

На фиг. 1 приведено схематическое семейство графиков, отражающих наиболее существенные особенности механических свойств сплавов с термоупругим мартенситом при различных температурах. Кривая 1 иллюстрирует обычное пластическое течение, кривые

2, 3 и 4 — поведение материала с эффектом памяти формы при температурах T_1 , T_2 и T_3 соответственно. Кривые 2, 3 и 4 характеризуются тем, что при нагреве выше температуры T_1 материал возвращается к исходной форме, что проявляется в виде скачка на графике σ vs ϵ .