8. **Гун Г.Я., Фролов А.А., Садыков О.Б.** Система проектирования технологических режимов горячего изостатического прессования // Порошковая металлургия. — 1991. — № 6.
9. **Мосолов П.П., Мясников В.П.** Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
10. **Проценко А.М.** Теория упругоидеальнопластических сред. — М.: Наука, 1982.
11. **Мосолов П.П.** Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206, № 2.
12. **Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А.** и др. Феноменологические теории прессования порошков. — Киев: Наук. думка, 1982.
13. **Скороход В.В., Штерн М.Б., Мартынова И.Ф.** Теория нелинейно-вязкого и пластического поведения пористых тел // Порошковая металлургия. — 1988. — № 8.
14. **Друянов Б.А., Непершин Р.И.** Теория технологической пластичности. — М.: Машиностроение, 1990.
15. **Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.** Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971.

г. Киев *Поступила 17/III 1993 г.*

УДК 539.219.1

Г.Н. Миренкова, Э.Г. Соснина

НЕОДНОРОДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Решается пространственная задача о распределении напряжений и деформаций внутри и на поверхности неоднородного включения в анизотропной упругой среде и об энергии взаимодействия неоднородного включения с внешним полем. Различаются понятия неоднородности, включения и неоднородного включения. Под неоднородностью понимается область, упругие постоянные которой отличны от упругих постоянных среды, под включением — область, имеющая те же упругие свойства, что и среда, но претерпевшая какие-либо изменения и являющаяся вследствие этого источником внутренних напряжений в среде, под неоднородным включением — область со свойствами неоднородности и включения одновременно.

В настоящей работе под неоднородным включением понимается область, под давлением заполненная материалом, упругие свойства которого отличны от упругих свойств среды. Давление моделируется слоем объемных сил, распределенных по границе области. Одновременно среда находится под действием внешнего поля напряжений.

1. Рассмотрим трехмерную неограниченную анизотропную упругую среду с областью V, которая под давлением заполнена материалом с упругими свойствами, отличными от упругих свойств среды. Тензор упругих модулей среды с неоднородным включением $c^{\alpha\beta\lambda\mu}(x)$ запишем в виде

$$c(\mathrm{x}) = c_0 + c_1 V(\mathrm{x}),$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка среды; $V(\mathrm{x})$ — характеристическая функция области, занятой включением ($V(\mathrm{x}) = 1$, $\mathrm{x} \in V$; $V(\mathrm{x}) = 0$, $\mathrm{x} \notin V$); c_0 — тензор упругих постоянных однородной среды; c_1 — постоянный тензор, характеризующий изменение упругих постоянных внутри включения. Случаю полости соответствует $c_1 = -c_0$, а абсолютно жесткому включению $c_1 \to \infty$. Обозначим через $q^\alpha(\mathrm{x})$ слой объемных сил, распределенных по поверхности неоднородного включения и моделирующих давление, под которым заполнена область. Положим

(1.1) $$q_1^\alpha(x) = p^{\alpha\nu} n_\nu \delta(S).$$

Здесь $p^{\alpha\nu} = p^{\nu\alpha}$ — заданный тензор; $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S неоднородного включения; $\delta(S)$—δ-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности.

Пусть одновременно среда находится под действием внешнего поля напряжений $\sigma_0^{\alpha\beta}(x)$. Под внешним, как обычно, понимается поле, которое было бы в однородной среде под действием внешних сил $q_0^\alpha(x)$. Предполагается, что силы q_0 не содержат сингулярностей типа простого и двойного слоев. Считается также, что на границе неоднородного включения выполнены обычные условия непрерывности смещений $u_\alpha(x)$ и вектора напряжений $\sigma_n^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} n_\beta$ [1].

Получим сначала интегральные уравнения для определения деформаций внутри неоднородного включения. Перемещения $u_\alpha(x)$ в среде с неоднородным включением удовлетворяют уравнениям (которые записаны в операторной форме и понимаются в смысле обобщенных функций)

$$-\nabla c \nabla u = q_0 + q_1, \; u(x) \to u_0(x) \text{ при } x \to \infty$$

или

(1.2) $$(L_0 + L_1)u = q_0 + q_1, \; L_0 = -\nabla c_0 \nabla, \; L_1 = -\nabla c_1 V \nabla,$$

где операторы L_0 и L_1 учитывают условия на бесконечности; $u_0(x)$ — перемещения в однородной среде под действием сил q_0.

Пусть $G_0 = L_0^{-1}$ — тензор Грина однородной среды ($G_0 L_0 = I$, I — тождественный оператор). Применив к обеим частям (1.2) оператор $\mathrm{def} G_0$ (оператор def соответствует симметризованному градиенту), имеем

$$\varepsilon - \mathrm{def} G_0 \nabla c_1 V \nabla u = \varepsilon_0 + \mathrm{def} G_0 q_1,$$
$$\varepsilon = \mathrm{def} u, \; \varepsilon_0 = \mathrm{def} u_0.$$

В силу симметрии тензоров упругих постоянных c_0 и c_1 эти уравнения можно записать в виде

(1.3) $$\varepsilon + K_0 c_1 V \varepsilon = \varepsilon_0 + \mathrm{def} G_0 q_1, \; K_0 = -\mathrm{def} G_0 \mathrm{def}.$$

В подробной записи

(1.4) $$\varepsilon_{\alpha\beta}(x) + \int_V K^0_{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x') c_1^{\lambda\mu\varkappa\rho} \varepsilon_{\varkappa\rho}(x') dx' =$$
$$= \varepsilon^0_{\alpha\beta}(x) + \int_S \partial_{(\alpha} G^0_{\beta)\mu}(x - x') p^{\mu\nu}(x') n_\nu(x') dx'.$$

Здесь $G^0_{\alpha\beta}(x - x')$ — ядро оператора Грина G_0; $K^0_{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x') = - [\partial_\alpha \partial_\lambda G^0_{\beta\mu}(x - x')]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}$ — ядро оператора K_0; (α, β) означает симметрирование по индексам α и β.

Предположим, что нагрузка равномерно распределена по поверхности включения. В этом случае тензор $p^{\mu\nu}$ в (1.1) постоянный и можно показать, что $\mathrm{def} G_0 q_1 = K_0 V p$. Действительно, взяв последний интеграл в (1.4) по частям и учитывая симметрию тензора p и свойства δ-функций, сосредоточенных в области и на поверхности [2], получим

$$\mathrm{def} G_0 q_1 = \int_S \partial_{(\alpha} G^0_{\beta)\mu}(x - x') p^{\mu\nu} n_\nu(x') dx' =$$
$$= - \int_V \partial_\nu \partial_{(\alpha} G^0_{\beta)\mu}(x - x') p^{\mu\nu} dx' = \int_V K^0_{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x') p^{\mu\nu} dx' = K_0 V p.$$

Уравнения (1.3) теперь примут вид

$$\varepsilon + K_0 c_1 V \varepsilon = \varepsilon_*, \; \varepsilon_* = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + K_0 V p.$$

Так как по предположению внешние силы q_0 не содержат сингулярностей типа простого и двойного слоев, компоненты деформации $\varepsilon(x)$ на S кусочно-непрерывны. Поэтому полученные уравнения эквивалентны системе

$$(1.5) \qquad \varepsilon^+ + K_0^+ c_1 \varepsilon^+ = \varepsilon_*^+, \ \varepsilon_*^+ = \varepsilon_0^+ + K_0^+ p, \ \varepsilon^- = \varepsilon_0^- + K_0^-(p - c_1\varepsilon^+),$$

где первое уравнение определяет деформацию ε^+ внутри неоднородного включения, а второе — ее продолжение ε^- на дополнение $\bar{V}$ области V; $K_0^+ = VK_0V$ — сужение оператора K_0 на область V; $K_0^- = \bar{V}K_0V$. Операторное решение уравнения имеет вид

$$\varepsilon^+ = (I + K_0^+ c_1)^{-1} \varepsilon_*^+$$

или в более симметричной форме

$$(1.6) \qquad \varepsilon^+ = (c_0 + c_0 K_0^+ c_1)^{-1} \sigma_*^+, \ \sigma_* = \sigma_0 + \sigma_1 = c_0 \varepsilon_0 + c_0 K_0^+ p.$$

Сравнивая полученный результат с [1], заключаем, что задача определения деформаций внутри неоднородного включения в среде, находящейся под действием внешнего поля σ_0, эквивалентна аналогичной задаче для неоднородности, находящейся под действием внешнего поля $\sigma_* = \sigma_0 + \sigma_1$ ($\sigma_1 = c_0 K_0^+ p$ — поле, индуцированное включением).

Отметим, что впервые связь между включением и неоднородностью получил Дж. Эшелби [3] для случая, когда включение и неоднородность имеют эллипсоидальную форму, среда и неоднородность изотропны, а внешнее поле однородно. Аналогичная задача для анизотропного случая рассмотрена в [4].

Соотношения (1.6) обобщают результаты [3, 4] и в замкнутой форме устанавливают связь между неоднородным включением произвольной формы в анизотропной среде и неоднородностью для произвольного внешнего поля.

2. Пусть теперь область V, занятая неоднородным включением, — эллипсоид с полуосями a_1, a_2, a_3. В этом случае в силу свойств оператора K_0^+ [5] индуцированное включением поле $\sigma_1 = c_0 K_0^+ p$ однородно, причем

$$\sigma_1 = c_0 A p,$$

где A — постоянный четырехвалентный тензор, компоненты которого вычисляются через фурье-образ тензора Грина однородной среды $G_0(\mathrm{n})$. Обозначим через $\langle f(\mathrm{n}) \rangle$ среднее значение функции $f(\mathrm{n})$ по эллипсоиду:

$$(2.1) \qquad \langle f(\mathrm{n}) \rangle = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \int_\Omega f(\mathrm{n}) \rho^3(\mathrm{n}) d\mathrm{n},$$

$$\rho(\mathrm{n}) = (a_1^2 n_1^2 + a_2^2 n_2^2 + a_3^2 n_3^2)^{-1/2}.$$

Интегрирование в $\langle f(\mathrm{n}) \rangle$ ведется по всем направлениям единичного вектора n, т.е. по поверхности единичной сферы. Тогда

$$(2.2) \qquad A = \langle K_0(\mathrm{n}) \rangle, \ K^0_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathrm{n}) = [n_\alpha G^0_{\beta\mu}(\mathrm{n}) n_\lambda]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)},$$

$$G^0_{\beta\mu}(\mathrm{n}) = [c_0^{\alpha\beta\lambda\mu} n_\alpha n_\lambda]^{-1}.$$

Компоненты тензоров $G_0(\mathrm{n})$ и $K_0(\mathrm{n})$ можно вычислить в явном виде для произвольной анизотропной среды. Для частных случаев изотропной и ортотропной сред они получены в [1, 6]. Отметим, что компоненты тензора A и, значит, индуцированное включением поле σ_1 зависят от геометрических параметров области V. Эта зависимость сосредоточена в скалярном весовом множителе $\rho(\mathrm{n})$ из (2.1), что упрощает исследования и предельные переходы к случаям иглы, трещины и диска.

Для определения деформации внутри неоднородного включения эллипсоидальной формы воспользуемся результатами, полученными в [1] для эллипсоидальной неоднородности.

Рассмотрим сначала случай, когда внешнее поле σ_0 однородно. Тогда суммарное поле $\sigma_* = \sigma_0 + \sigma_1$ также однородно. Так как внешнее однородное поле индуцирует внутри V однородное поле деформаций ε^+ [3, 5, 7], из уравнений (1.6) находим

$$\varepsilon^+ = (c_0 + c_0Ac_1)^{-1}\sigma_* = B^{-1}\sigma_*, \tag{2.3}$$
$$B = c_0 + c_0Ac_1 = \langle c_0 + c_0K_0(\mathrm{n})c_1\rangle = \langle B(\mathrm{n})\rangle.$$

Таким образом, как и в случае неоднородности, задача сводится к обращению постоянного четырехвалентного тензора B.

Пусть теперь внешнее поле σ_0 линейно. В [5, 8] доказано свойство полиномиальной консервативности эллипсоидальной области: если внешнее поле напряжений в окрестности V — полином степени n, то индуцированное внутри V поле деформаций — полином той же степени. В частности, если внешнее поле — линейная форма относительно $\mathbf{x}$, то ε^+ — также линейная форма.

Положим $\sigma_0^{\alpha\beta} = d^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda}x^\lambda$, где $d^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda}$ — заданный трехвалентный тензор. В этом случае суммарное поле σ_* содержит линейную σ_0 и однородную σ_1 составляющие. В силу линейности первого из уравнений (1.5) относительно ε^+ оно равносильно системе

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^+ + K_0^+c_1\varepsilon_1^+ &= \sigma_1 \\ \varepsilon_2^+ + K_0^+c_1\varepsilon_2^+ &= \sigma_0 \end{aligned}\right\} \varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^+ = \varepsilon^+.$$

Здесь ε_1^+ — деформация, вызванная действием однородного поля σ_1, индуцированного включением, а ε_2^+ — действием линейного внешнего поля σ_0. Деформация ε_1^+ находится из соотношений (2.3), в которых нужно заменить σ_* на $\sigma_1 = c_0Ap$. Согласно свойству полиномиальной консервативности эллипсоидальной области, деформацию ε_2^+ можно искать в виде $(\varepsilon_2^+)_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\lambda}x^\lambda$, где $b_{\alpha\beta\lambda}$ — неизвестный трехвалентный тензор, связанный с заданным тензором $d^{\alpha\beta\cdot}_{\cdot\cdot\lambda}$ уравнением

$$Da^2b = \frac{1}{3}d, \quad D^{\alpha\beta\cdot\lambda\mu\cdot}_{\cdot\cdot\nu\cdot\cdot\eta} = \langle\rho(\mathrm{n})n_\nu B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathrm{n})n_\eta\,\rho(\mathrm{n})\rangle.$$

Здесь $D^{\alpha\beta\cdot\lambda\mu\cdot}_{\cdot\cdot\nu\cdot\cdot\eta}$ — постоянный шестивалентный тензор, симметричный по парам индексов $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, $\nu\eta$; $a^2 = (a_i^2\delta_{ij})$ — матрица третьего порядка, определяемая полуосями эллипсоида $a_i (i = 1, 2, 3)$; δ_{ij} — символ Кронекера; $B(\mathrm{n})$ — тензор, введенный в (2.1).

Таким образом, в случае внешнего линейного поля задача определения деформаций внутри неоднородного включения сводится к обращению двух постоянных тензоров: четырехвалентного B и шестивалентного D, т.е. к конечному числу алгебраических операций. Подчеркнем также, что решение задачи получено в замкнутой форме, несмотря на то что тензор Грина анизотропной однородной среды в явном виде неизвестен.

Если деформации $\varepsilon^+(\mathbf{x})$ внутри неоднородного включения определены, то напряжения $\sigma(\mathrm{n})$ на его внешней поверхности при заданных условиях на границе равны напряжениям на внешней поверхности «эквивалентной» неоднородности и вычисляются по формулам [1]

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathrm{n}) = B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathrm{n})\varepsilon^+_{\lambda\mu}.$$

Однако в отличие от неоднородности исследование поведения напряжений на поверхности неоднородного включения осложняется тем, что поле σ_* зависит от геометрических параметров области, занятой включением.

3. Вычислим энергию взаимодействия неоднородного включения с внешним полем. Представим оператор Грина G для среды с неоднородностью в виде [9, 10]

$$G = G_0 - G_0 \nabla P \nabla G_0, \tag{3.1}$$

где P — оператор энергии взаимодействия, ядро которого сосредоточено в области неоднородности V и для которого в [9] получено выражение

$$P = -C_1(C_1 + C_1 K_0^+ C_1)^{-1} C_1, \quad C_1 = c_1 V. \tag{3.2}$$

Если имеет смысл оператор C_1^{-1}, то P можно записать как

$$P = -(C_1^{-1} + K_0^+)^{-1}.$$

Полная упругая энергия системы

$$\Phi = \frac{1}{2}\int \mathrm{q}(\mathrm{x})\mathrm{u}(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \frac{1}{2}\int\int \mathrm{q}(\mathrm{x})G(\mathrm{x}, \mathrm{x}')\mathrm{q}(\mathrm{x}')d\mathrm{x}d\mathrm{x}'$$

или в операторной форме

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{q}G\mathrm{q}, \quad \mathrm{q} = \mathrm{q}_0 + \mathrm{q}_1.$$

Подставим в Φ вместо G его выражение из (3.1) и запишем полную энергию Φ в виде двух слагаемых:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{\mathrm{int}}.$$

Здесь Φ_0 — собственная энергия суммарного поля, вызванного действием сил q_0 и q_1 в однородной среде; Φ_{int} — энергия взаимодействия неоднородного включения с этим суммарным полем:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\mathrm{q}G_0\mathrm{q},$$

$$\Phi_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{2}\mathrm{q}G_0\nabla P\nabla G_0\mathrm{q} = \frac{1}{2}\varepsilon_* P \varepsilon_* = \frac{1}{2}\int_V\int_{V'} \varepsilon_*(\mathrm{y})P(\mathrm{y}, \mathrm{y}')\varepsilon_*(\mathrm{y}')d\mathrm{y}d\mathrm{y}'.$$

Для вычисления энергии взаимодействия Φ_{int} применим метод, предложенный в [9] и основанный на разложении ядра $P(\mathrm{y}, \mathrm{y}')$ оператора P из (3.2) в ряд по мультиполям. Пусть поле σ_0 и, следовательно, ε_* однородны. Тогда для Φ_{int} имеем точную формулу

$$\Phi_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\varepsilon^*_{\alpha\beta} P_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon^*_{\lambda\mu},$$

где P_0 — уже постоянный четырехвалентный тензор, главный член разложения $P(\mathrm{y}, \mathrm{y}')$. Если включение имеет эллипсоидальную форму, то

$$P_0 = -vc_1(c_1 + c_1 A c_1)^{-1} c_1 = -v(c_1^{-1} + A)^{-1}$$

(v — объем эллипсоида, A — постоянный тензор, приведенный в (2.2)).

Таким образом, для неоднородного включения эллипсоидальной формы во внешнем однородном поле задача решается в явном виде для произвольной анизотропной среды и анизотропного включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кунин И.А., Соснина Э.Г.** Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде // ПММ. — 1973. — Т. 37, вып. 2. — С. 524—531.
2. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.
3. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963.
4. **Walpole L.I.** The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1967. — V. 300, N 1461. — P. 270—288.

5. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 3. — С. 571—574.
6. Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. — 1981. — Т. 45, вып. 1. — С. 165—170.
7. Kinoshita N., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media // Phys. Stat. Sol. (a). — 1971. — V. 5, N 3. — P. 759—768.
8. Asaro R.I., Barnett D.M. The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion // J. Mech. and Phys. Solids. — 1975. — V. 23, N 1. — P. 77—83.
9. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Локальные неоднородности в упругой среде // ПММ. — 1970. — Т. 34, вып. 3. — С. 422—428.
10. Kunin I. On elastic crack-inclusion interaction // Intern. J. Solids and Struct. — 1985. — V. 21, N 7. — P. 757—766.

г. Новосибирск *Поступила 9/IV 1993 г.*

УДК 539.4

А.Г. Котоусов

ЭНЕРГОВОЛНОВОЙ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ХРУПКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Практически во всех публикациях по проблемам хрупкого динамического разрушения отмечаются большие трудности при проведении как теоретических, так и экспериментальных исследований. Аналитические решения модельных задач известны лишь для бесконечных областей, практическая же значимость этих решений в полной мере еще не раскрыта. Кроме того, поиск аналитических или численно-аналитических решений при произвольном законе распространения трещины даже для бесконечных областей представляет собой «весьма сложную задачу» [1]. Поэтому в данной области механики твердого деформируемого тела чрезвычайно актуальна разработка новых подходов, быть может, менее общих, но «дающих более обозримые результаты» [1].

В настоящей работе предлагается один из таких подходов, основанный на энергетическом принципе и принципе «временного разделения». На базе этих принципов сформулирован так называемый волновой критерий разрушения, который можно использовать для решения конкретных практических задач механики хрупкого динамического разрушения.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейно-упругое тело (изотропное или анизотропное, однородное или неоднородное) в ортогональной (декартовой) системе координат $\{0, x, y, z\}$, содержащее дефекты типа трещин, полостей и т.п. (рис. 1). На тело действуют внешние силы, приводящие к тому, что в момент времени $t = 0$, определяемый условиями (критериями) старта (разрушения), из наиболее нагруженной точки тела (источника разрушения) начинает распространяться магистральная трещина. Ставится задача об оценке динамического роста этой трещины.

2. Энерговолновой подход. Основная идея разрабатываемого подхода состоит в отказе от поиска точного решения этой задачи, а вместо этого предлагается построение верхних интегральных оценок динамического роста трещины. Эти интегральные оценки строятся на основе невозмущенного распространением трещины решения соответствующей динамической (или статической) задачи, процесс получения которого, несомненно, проще.

Запишем закон сохранения энергии для тела конечных размеров. В общем случае он имеет вид [2]

$$d(U + K) + dW = dA + dQ, \tag{2.1}$$