Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

О ДВИЖЕНИИ ФРОНТА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

УДК 533.6+517.946

С. С. Титов

**Уральская архитектурно-художественная академия,
620219 Екатеринбург**

Для уравнения нелинейной теплопроводности (диффузии) [1, 2] со степенной нелинейностью

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(T^\sigma \operatorname{grad}(T)) + Q(T) \tag{1}$$

естественно ставить задачу о распространении возмущения по нулевому фону ($T = 0$) [3–5], исследуя взаимосвязь закона движения фронта с поведением ненулевого решения в его окрестности. Эта задача имеет как теоретическое значение (движение нулей решений нелинейного уравнения (1)), так и прикладное (распространение фронта нелинейной диффузии). В предположении локальной аналитичности T такая постановка допускает полное решение в виде задачи о движении тепловой волны [4, 5]. Ниже для рациональных значений $\sigma > 0$ в одномерном симметричном случае построено общее решение данного уравнения в окрестности фронта диффузии. Это решение, в отличие от [4], где произвол был в одну функцию и примыкание к фону аналитическое, зависит от двух произвольных функций t и может содержать в точке примыкания к нулевому фону особенность типа корня.

Постановка задачи. Для произвольных σ и функции источника $Q(T)$ заменой [4, 6] $u = T^\sigma$, $t = t/2$ приведем (1) в случае симметрии к уравнению

$$u_t = (u^2)_{xx} + \frac{\nu}{x}(u^2)_x + \omega(u_x)^2 + Q_*(u). \tag{2}$$

Здесь $\omega = 2/\sigma - 2$; $Q_*(u) = 2\sigma u^{(\sigma-1)/\sigma} Q(u^{1/\sigma})$; $\nu = 0$; 1 и 2 соответственно для плоской, осевой и сферической симметрии; x — пространственная переменная.

Пусть $x = h(t)$ — фронт нелинейной диффузии (при $\sigma > 0$, согласно [1], фронт диффузии существует). Введением переменной $\xi = x - h(t)$ уравнение (2) преобразуется:

$$u_t = h_t u_\xi + (u^2)_{\xi\xi} + \omega(u_\xi)^2 + \frac{\nu}{\xi + h}(u^2)_\xi + Q_*(u). \tag{3}$$

Будем строить его решение в окрестности точки $\xi = 0$, где полагаем $u = 0$, в виде ряда

$$u(\xi, t) = \sum_{n \in P} g_n(t)\xi^n, \tag{4}$$

где $P = \{n_0, n_1, n_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ $(0 < n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$ — набор показателей степени ξ. Требуется определить строение ряда (4), описать множество его индексов P и коэффициенты g_n, исследовать ряд (4) на сходимость и применить его к решению физически поставленных задач.

Построение решения. Характер примыкания решения к нулевому фону зависит от множества P. Для его определения подставим (4) в (3) при $\nu = 0$, $Q_* = Q = 0$ и получим уравнение

$$\sum_{n\in P} g_n'(t)\xi^n = h'(t)\sum_{k\in P} kg_k(t)\xi^{k-1} + \sum_{m,n\in P}[(m+n)(m+n-1)+\omega mn]g_m(t)g_n(t)\xi^{m+n-2}, \quad (5)$$

нелинейное слагаемое в котором соответствует возможности введения [7] некоторого умножения $(\cdot)$ на множестве функций, зависящих от ξ таким образом, что

$$v\cdot w = (vw)_{\xi\xi} + \omega v_\xi w_\xi, \quad (6)$$

или на подалгебре, порожденной степенными функциями,

$$\xi^m\cdot\xi^n = [(m+n)(m+n-1)+\omega mn]\xi^{m+n-2}. \quad (7)$$

Из (9) следует, что для получения замкнутой системы уравнений для $h(t)$ и коэффициентов $g_n(t)$ достаточно потребовать замкнутости множества $B = \{\xi^{n_0}, \xi^{n_1}, \xi^{n_2}, \dots\}$ относительно умножения (7) и сдвига $\xi^k \mapsto \xi^{k-1}$, т. е. что B есть подмножество базиса некоторого кольца (алгебры) с умножением (7) и $\xi^1 \in B$.

Алгебра (6), (7) устроена достаточно просто: она градуирована таким образом, что $\xi^{(\alpha-2)}\cdot\xi^{(\beta-2)} = \lambda_{\alpha,\beta}(\omega)\xi^{(\alpha+\beta)-2}$, где $\lambda_{\alpha,\beta}(\omega)\neq 0$ всюду, кроме некоторой (зависящей от ω) кривой второго порядка на плоскости $\alpha O\beta$; в частности, в этой алгебре два нильпотентных элемента ε (для которых $\varepsilon\cdot\varepsilon = 0$):

$$\varepsilon_1 = \xi^0 \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_2 = \xi^\delta$$

($\delta = 2/(\omega+4)$, если $\omega\neq -4$ (т. е. $\sigma\neq -1$)). Так как строим решение, примыкающее к нулю, то $\varepsilon_1 = \xi^0 = 1 \notin P$. В то же время, если $P \supseteq \mathbb{N}$ вовсе не содержит нильпотентных элементов, то в силу (5) наименьшая нецелая степень ξ^α в решении (4) необходимо такова, что $\xi^\alpha\cdot\xi^\alpha = 0$ с умножением (7), т. е. $\alpha = \delta$. Итак, если $\delta\notin P$, то решение аналитично по ξ, т. е. $P = \mathbb{N}$, и тогда получаем исследованный ранее регулярный случай [2–5]. Для его развития будем предполагать неаналитичность решения u при $u = 0$.

При $h'(t)\neq 0$ и рациональном $\sigma = -1 + p/q$ $(p, q\in\mathbb{N})$ имеем

$$\omega = 2\frac{2q-p}{p-q}, \qquad \delta = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}.$$

Игнорируя возможность $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$, представим алгебру (7) как гомоморфный образ групповой алгебры аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Это приводит к следующему описанию множества показателей P для $\sigma > 0$: из-за того, что $n_0 = \delta = 2/(\omega+4)\in P$, $1 = p/p \in P$, и из-за взаимной простоты p и q множество P вкладывается в арифметическую прогрессию с разностью $1/p$ и наименьшим элементом n_0. Отсюда $n_i = \delta + (1/p)i$, $i\in\mathbb{N}$.

Однако для нецелых $\sigma > 0$ нетривиальной оказывается проверка того, что такой ряд действительно удовлетворяет решаемому уравнению. Тем не менее рекуррентное вычисление коэффициентов в теперь уже определенной нумерации при рациональных σ ($\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma = p/q - 1 > 0$) дает представление решения уравнения (3) в виде ряда по степеням переменной $\xi^{1/p}$:

$$u(\xi,t) = G(t)\xi^{1-q/p} + H(t)\xi + \sum_{n=p+1}^{\infty} g_{n/p}(t)\xi^{n/p}, \quad (8)$$

т. е. $g_{k/p} = 0$ при $k < p+q$, кроме $k = p$ и $k = p-q$. Здесь $G(t)$ — произвольная функция, не обращающаяся в нуль в рассматриваемой окрестности; $H(t) = g_1(t)$ — произвольная функция, пропорциональная скорости $h'(t)$ движения фронта диффузии:

$$h'(t) = -2\frac{q(p+q)}{p(p-q)}H(t).$$

Для краткости перейдя к целочисленной нумерации и полагая $G_n = g_{n/p}$, так что $G = G_{p-q}$, $H = G_p$ и т. п., при любом ν имеем

$$G_{p+q}(t) = \frac{pq}{2(p^2+pq-2q^2)}\frac{[H(t)]^2}{G(t)},$$

и коэффициенты ряда определяются рекуррентно по формуле

$$G_{m+p+q}(t) = \frac{1}{2(m+p+2q)(m+2q)G(t)}\left\{ p^2\frac{G'_m}{G(t)} - 2(m+p)(m+q)\frac{H(t)}{G(t)}G_{m+p}(t) - \right.$$

$$-\sum_{k=p+q}^{m+p-q}\frac{(m+2p)(m+p)(p-q)+2(2q-p)k(m+2p-k)}{p-q}G_k G_{m+2p-k} -$$

$$\left. -p\sum_{s\geqslant 0}\frac{\nu(-1)^s}{h^{s+1}}\sum_{k=p-q}^{m+q-ps}[m+(1-s)p]G_k G_{m+p-k-ps}\right\}. \tag{9}$$

Итак, решение уравнения (3) при рациональных $\sigma > 0$ можно строить в виде (8), причем не только при $\nu = 0$, $Q = 0$, так как последние два члена в (3) не влияют на выделение особенностей: функция источника $Q(u)$ предполагается аналитической, $Q(0) = 0$, а множитель $\nu/(h+\xi)$ разлагается, как геометрическая прогрессия, в ряд по целым степеням ξ при $h(t) \neq 0$, так что учет источника $Q \not\equiv 0$ добавит к правой части (9) нелинейности из уже вычисленных коэффициентов, аналогичных последней нелинейности в (9), учитывающей член с $\nu \neq 0$. Ввиду громоздкости этого выражения оно здесь не приведено.

Структура ряда. Для достижения вычислительной эффективности необходимо исследовать структуру построенного ряда.

Используя алгебру (6), (7) и рекурсию (9), запишем коэффициенты G_n в виде дифференциальных многочленов

$$G_n(t) = \sum_{m=\{m_k\},l=\{l_k\}} U_{m,l}\prod_{k\geqslant -1}[G^{(k)}(t)]^{m_k}[H^{(k)}(t)]^{l_k},$$

где U_{ml} — числовые множители, зависящие от наборов степеней $m = \{m_k\}$, $l = \{l_k\}$; $H^{(-1)} \sim h$.

Лемма 1. *Степени производных в любом коэффициенте $G_{n/p}$ удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{k\geqslant -1}\{[\frac{p-q}{p}+2k]m_k + (1+2k)l_k\} = \frac{n}{p}.$$

Приведенная лемма позволяет свести алгебраическую рекурсию (9) к числовой рекурсии для множителей $U_{m,l}$. Этому утверждению можно придать аналитическую формулировку, представляющую тепловую волну как нелинейную суперпозицию процессов движения фронта и переноса тепла вблизи него.

Лемма 2. *Каждый дифференциальный одночлен в G_n с точностью до числового* *множителя совпадает с дифференциальным одночленом в выражении*

$$\left(\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}\right)^S \left[\frac{H^{\lambda+1}}{G^\lambda}\right]$$

для представления n *в виде* $n = (1+S)p + (\lambda+S)q$, *где* λ, S — *целые числа* ($S \geqslant 0$, $\lambda \geqslant -1$).

Уточнение структуры ряда и его суммирование при полиномиальных $G(t)$, $h(t)$ дает представление решения в виде аналитической функции от ξ и конечного числа аргументов — производных $G(t)$, $h(t)$, несмотря на то что группа Ли — Беклунда [6] уравнения (1) при $\sigma > 0$ тривиальна [8–10].

Сходимость ряда. С учетом лемм 1, 2 при помощи замены $y = \xi^{1/p}$, $z = T^{p/q}/\xi$ сходимость полученного ряда следует из аналога теоремы Ковалевской [4] при $z\Big|_{y=0} \equiv G_{p-q}(t) \equiv G \neq 0$, так как формальный ряд для решения в силу сказанного выше существует для любых аналитических в окрестности точки $(y,t) = (0,t_0)$ функций $G_0(t)$, $h(t)$.

Теорема. *Для любых аналитических в окрестности точки* $t = t_0$ *функций* $G(t)$, $H(t)$, $G(t_0) \neq 0$, *любых* $\sigma = p/q - 1 > 0$, $\nu \geqslant 0$ *и любой аналитической в нуле функции источника* Q ($Q(0) = 0$) *ряд* (8) *с рекурсией* (9) *есть решение уравнения* (3), *аналитическое в окрестности точки* $t = t_0$, $\xi = 0$, *представляющее в силу* (2), (3) *решение уравнения* (1), *примыкающее к нулю.*

Следует отметить, что условие $G(t) \neq 0$ отделяет многообразие построенных решений от рассмотренных в [2–5]. Особый случай $G(t_0) = 0$ требует дальнейшего изучения.

Движение тепловой волны в плазме. В качестве примера рассмотрим уравнение (1) при $p/q = 7/2$, что соответствует тепловой волне в плазме [11], $\sigma = 5/2$.

Изложенная выше конструкция дает

$$u(\xi,t) = G(t)\xi^{5/7} + H(t)\xi + g_{9/7}\xi^{9/7} + \sum_{n=11}^{\infty} g_{n/7}(t)\xi^{n/7},$$

где после перенумерации $G_n = g_{n/7}$ последовательно находим

$$g_1 = G_7 = H(t) = -35h'/36, \quad G_8 = 0, \quad G_9 = \frac{7}{55}\frac{H^2}{G}, \quad G_{10} = 0, \quad G_{11} = -\frac{42}{715}\frac{H^3}{G^2},$$

$$G_{12} = -\frac{5}{14}\nu\frac{G}{h}, \quad G_{13} = -\frac{25074}{983125}\frac{H^4}{G^3}, \quad G_{14} = g_2 = \frac{49}{288}\frac{G'}{G} - \frac{3}{8}\nu\frac{H}{h}, \quad G_{15} = -\frac{17262}{3342625}\frac{H^5}{G^4}$$

и т. д. В случае $h'(t) \equiv 0$ представленная конструкция дает решение физической задачи об остановившейся тепловой волне. При этом на линии остановившегося фронта $h(t) \equiv x_0$ в нашем распоряжении остается произвол в одну аналитическую функцию — отводимый от границы поток тепла, который определяется функцией $G(t)$.

Этот произвол может использоваться и для исследования особенностей температурного режима около оси симметрии [12], а также для постановки и решения обобщенной задачи Стефана с заданным тепловым потоком на фронте волны.

Важным модельным примером является также схождение тепловой волны к центру симметрии с постоянной скоростью. Если при этом поток тепла на фронте волны постоянен, то в случае плоской симметрии ($\nu = 0$) получаем решение типа бегущей волны, непригодное при $\nu \neq 0$. Для этих значений ν изложенный выше метод дает решение в виде ряда, пригодного, в частности, для постановки инициирующего волну краевого режима [2].

Так, задавая $h(t) = x_0 - vt$, $v = \text{const} > 0$ для равномерно движущегося к центру фронта, получаем, что краевой режим температуры на начальном радиусе $x = x_0$ должен иметь вид

$$T|_{x=x_0} = G^{2/5}v^{2/7}t^{2/7}\left\{1 + \frac{35}{36}\frac{v^{9/7}}{G}t^{2/7} + \frac{1715}{156816}\frac{v^{16/7}}{G^2}t^{4/7} - \right.$$
$$\left. - \frac{60025}{1111968}\frac{v^{27/7}}{G^3}t^{6/7} - \frac{5}{14}\nu\frac{1}{x_0}vt + O(t^{8/7})\right\}^{2/5}.$$

Автор благодарен А. Ф. Сидорову за внимание к работе и рецензенту за конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, №5. С. 667–704.
2. **Сидоров А. Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, №1. С. 47–51.
3. **Сидоров А. Ф.** О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации многофазной несжимаемой жидкости // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1984. Т. 15, №2. С. 121–133.
4. **Баутин С. П.** Применение характеристических рядов для представления решений нелинейных уравнений параболического типа в окрестности линии вырождения // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1985. Т. 16, №5. С. 16–28.
5. **Сидоров А. Ф.** Применение специальных конструкций рядов для расчета особенностей обобщенных решений нелинейных уравнений // Конструирование алгоритмов и решений задач математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. ИПМ. 1987. С. 79–97.
6. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
7. **Титов С. С.** Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. Саратов: Саратов. ун-т, 1988. С. 104–110.
8. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, №3. С. 492–495.
9. **Дородницин В. А., Свирщевский С. Р.** О группах Ли — Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. М., 1983. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 101).
10. **Титов С. С.** О виде нелинейности в симметричном уравнении теплопроводности с нетривиальной группой Ли — Беклунда // Современный групповой анализ. Л., 1990. (Препр. / Ленингр. ин-т информатики и автоматизации АН СССР; № 116).

11. **Имшенник В. С.** Кумуляция сходящихся ударных волн с учетом диссипативных процессов // ПМТФ. 1980. № 6. С. 10–19.
12. **Титов С. С.** Представление решений нелинейного осесимметричного уравнения фильтрации газа в виде логарифмического ряда // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 68. С. 132–144.

Поступила в редакцию 27/II 1995 г.,
в окончательном варианте — 16/V 1995 г.